SDLD33 - Réponse sismique spectrale d'un système 2 masses - 4 ressorts multi-supporté par 2 groupes décorrélés d'appuis

Résumé :

Le problème consiste à calculer la réponse spectrale d'un système 2 masses – 4 ressorts multi-supporté, soumis à une excitation sismique multiple, en considérant les 3 appuis comme 2 groupes d'appuis décorrélés.

On teste l'élément discret en traction, le calcul des modes propres, des modes statiques et de la réponse spectrale par superposition modale via l'opérateur COMB_SISM_MODAL. Ce cas-test permet de valider l'ordre des combinaisons à considérer dans ce cas, à savoir le cumul intra-groupe puis le cumul inter-groupe.

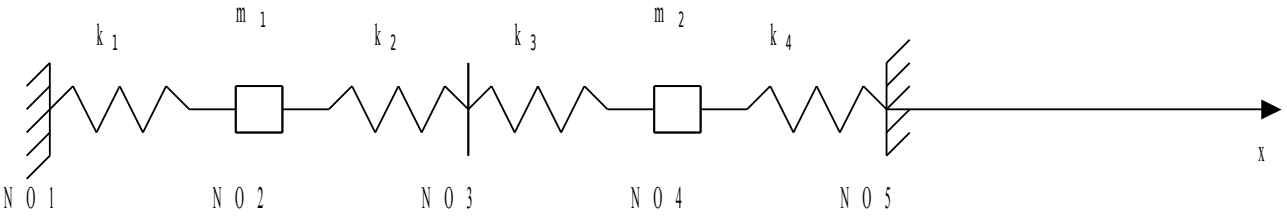
Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats analytiques de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Le système est composé d'un ensemble de 4 ressorts, 2 masses ponctuelles, supporté par 3 appuis..



1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison : $k = k_1 = k_2 = 10^3\ N/m \qquad k_3 = k_4 = 2.10^3\ N/m$;
masse ponctuelle : $m = m_1 = m_2 = 10\ kg$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites :
Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x .
Les points $NO1$, $NO3$ et $NO5$ sont encastrés : $dx = dy = dz = drx = dry = drz = 0$.
Les autres points sont libres en translation selon la direction x : $dy = dz = drx = dry = drz = 0$.

Chargement :
La structure est soumise à une excitation sismique spectrale multiple et à des déplacements différentiels.
Les spectres de réponses d'oscillateur en pseudo-accélération sont simplifiés. Seules les valeurs correspondant aux 2 fréquences propres du système sont mentionnées. Elles ne dépendent pas de l'amortissement :

au nœud $NO1$:

$$SRO_{NO1}(f_1) = A_{11} = 7\ m/s^2$$
$$SRO_{NO1}(f_2) = A_{21} = 5\ m/s^2$$
$$DDS_{NO1} = D_1 = -0.04\ m$$

au nœud $NO3$:

$$SRO_{NO3}(f_1) = A_{11} = 7.7\ m/s^2$$
$$SRO_{NO3}(f_2) = A_{12} = 5.5\ m/s^2$$
$$DDS_{NO3} = D_2 = -0.044\ m$$

au nœud $NO5$:

$$SRO_{NO5}(f_1) = A_{21} = 12\ m/s^2$$
$$SRO_{NO5}(f_2) = A_{22} = 6\ m/s^2$$
$$DDS_{NO5} = D_3 = 0.06\ m$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les excitations aux nœuds $NO1$ et $NO3$ sont corrélées. On constitue 2 groupes de supports décorrélés : le groupe 1 est composé des nœuds $NO1$ et $NO3$; le groupe 2 est constitué du seul nœud $NO5$.

1.4 Conditions initiales

Le système est au repos.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On calcule la réponse spectrale par superposition modale d'un système 2 masses – 4 ressorts soumis à trois excitations distinctes. On détermine le déplacement des masses aux nœuds $NO2$ et $NO4$ suivant l'axe x .

On calcule analytiquement :

- les fréquences propres f_i ,
- les vecteurs propres associés Φ_{N_i} normalisés par rapport à la masse modale,
- les modes statiques d'appuis Ψ_i du système,
- les facteurs de participation modale P_{ij} relatif aux appuis,
- Rm_{ij} le maximum de la réponse de chaque mode à partir des spectres d'excitation,
- Re_{ij} la contribution du mouvement d'entraînement de chaque appui à partir des déplacements différentiels,

2.2 Résultats de référence

2.2.1 Matrices et vecteurs caractéristiques

- **matrice de rigidité** K

$$K=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$ matrice relative aux degrés de liberté 1, 2, 3, 4,5

$$K^p=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 & -k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_3+k_4 & 0 & -k_3 & -k_4 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & -k_3 & 0 & k_2+k_3 & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

matrice partitionnée degrés de liberté de structure 2, 4, degrés de liberté de support 1, 3, 5

$$\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{p}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{xs}} \\ \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{sx}} & \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{ss}} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 \\ 0 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{xs}}=\begin{bmatrix} -k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & -k_4 \end{bmatrix}$$

- **matrice de masse** M

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&m_1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&m_2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

matrice relative aux degrés de liberté 1, 2, 3, 4, 5

$$M^p=\begin{bmatrix}m_1&0&0&0&0\\0&m_2&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

matrice partitionnée degrés de liberté de structure 2, 4, degrés de liberté de support 1, 3, 5

- **calcul modal en base encastrée**

$$(K-\lambda_i M)\phi_i=0 \quad \lambda_i=\omega_i^2$$

$$dét(K-\lambda_i M)=0\Leftrightarrow\lambda_i^2-\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_3+k_4}{m_2}\right)\lambda_i+\frac{(k_1+k_2)(k_3+k_4)}{m_1 m_2}=0$$

•

$$\lambda_1=\frac{2k}{m} \qquad \lambda_2=\frac{4k}{m}$$

- fréquences propres :

$$\Rightarrow \quad f_1=\frac{\omega_1}{2\pi} \qquad f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}$$

- modes propres non normés :

$$\phi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \phi_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

- masses modales généralisées $\mu_i=\phi_i^T M\,\phi_i$:
  - $\mu_1=\mu_2=m$
- modes propres normés à la masse modale généralisée unitaire ϕ_{Nk} :
  - $\Rightarrow \quad \phi_{N1}=\frac{\phi_1}{\sqrt{\mu_1}} \qquad \phi_{N2}=\frac{\phi_2}{\sqrt{\mu_2}}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- **modes statiques d'appuis** Ψ_{Sj}

Matrice des modes statiques réduite aux ddls de structure $\varphi_S = -\boldsymbol{k}^{-1}\boldsymbol{k}_{xs}$

$$\varphi_S = \frac{-1}{4k}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -k & -k & 0 \\ 0 & -2k & -2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud $NO1$:

déplacements : $\Psi_{S1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud $NO3$:

déplacements : $\Psi_{S2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud $NO5$:

déplacements : $\Psi_{S3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **mode de corps rigide** Ψ_{R1}

Matrice des modes rigides réduite aux ddls de structure : $\varphi_R = \varphi_S \boldsymbol{S_R}$

Mode de corps rigide $\Psi_{R1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

On vérifie bien que : $\Psi_{R1} = \Psi_{S1} + \Psi_{S2} + \Psi_{S3}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2.2 Chargement 1 multi-appuis

- facteurs de participation modale $P_{kj}=\Phi_{Nk}^{T} M \Psi_j$:
- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud $NO1$:

$$\Rightarrow \quad P_{11}=\Phi_{N1}^{T} M \Psi_1=\frac{\sqrt{m}}{2}$$

- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud $NO3$:

$$\Rightarrow \quad P_{12}=\Phi_{N1}^{T} M \Psi_2=\frac{\sqrt{m}}{2}$$

- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud $NO5$:

$$\Rightarrow \quad P_{13}=\Phi_{N1}^{T} M \Psi_3=0$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud $NO1$:

$$\Rightarrow \quad P_{21}=\Phi_{N2}^{T} M \Psi_1=\frac{\sqrt{m}}{2}$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud $NO3$:

$$\Rightarrow \quad P_{22}=\Phi_{N2}^{T} M \Psi_2=\frac{\sqrt{m}}{2}$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud $NO5$:

$$\Rightarrow \quad P_{23}=\Phi_{N2}^{T} M \Psi_3=\frac{\sqrt{m}}{2}$$

- **réponse du mode i au mouvement de l'appui j**

$$Rm_{kj}=\Phi_{Nk} P_{kj} \frac{A_{kj}}{\omega_i^2}$$

Réponses combinées des oscillateurs modaux

Réponse du mode 1 au mouvement de l'appui 1 : $Rm_{11}=\Phi_{N1} P_{11} \frac{A_{11}}{\omega_1^2}=\frac{A_{11}}{2\omega_1^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Réponse du mode 1 au mouvement de l'appui 2 : $Rm_{12}=\Phi_{N1} P_{12} \frac{A_{12}}{\omega_1^2}=\frac{A_{12}}{2\omega_1^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Réponse du mode 1 au mouvement de l'appui 3 : $Rm_{13}=\Phi_{N1} P_{13} \frac{A_{13}}{\omega_1^2}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Réponse du mode 2 au mouvement de l'appui 1 : $Rm_{21}=\Phi_{N2} P_{21} \frac{A_{21}}{\omega_2^2}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Réponse du mode 2 au mouvement de l'appui 2 : $Rm_{22}=\Phi_{N2} P_{22} \frac{A_{22}}{\omega_2^2}=\frac{A_{22}}{2\omega_2^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Réponse du mode 2 au mouvement de l'appui 3 : $Rm_{23}=\Phi_{N2} P_{23} \frac{A_{23}}{\omega_2^2}=\frac{A_{23}}{2\omega_2^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

- **cumul intra-groupe (somme algébrique)**

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

mode 1 : $$Rm_{1\text{groupe1}} = Rm_{11} + Rm_{12} = \frac{A_{11}+A_{12}}{2\omega_1^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

mode 2 : $$Rm_{2\text{groupe1}} = Rm_{21} + Rm_{22} = \frac{A_{22}}{2\omega_2^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- **contribution de l'appui j au mouvement d'entraînement**

$\mathrm{Re}_j = \psi_j D_j$

contributions des groupes 1 et 2 au mouvement d'entraînement

$$\mathrm{Re}_{groupe1} = \mathrm{Re}_1 + \mathrm{Re}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}D_1+D_2\\D_2\end{pmatrix} \qquad \mathrm{Re}_{groupe2} = \mathrm{Re}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\D_3\end{pmatrix}$$

- **cumul sur les modes (quadratique)**

$$Rm_{groupe1} = \sqrt{(Rm_{11}+Rm_{12})^2 + (Rm_{21}+Rm_{22})^2} = \begin{pmatrix}\frac{A_{11}+A_{12}}{2\omega_1^2}\\ \frac{A_{22}}{2\omega_2^2}\end{pmatrix}$$

$$Rm_{groupe2} = \sqrt{Rm_{13}^2 + Rm_{23}^2} = \frac{A_{23}}{2\omega_2^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- **réponse des groupes d'appuis 1 et 2**

$$R_1 = \sqrt{Rm_{groupe1}^2 + \mathrm{Re}_{groupe1}^2} \qquad R_1^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\frac{(A_{11}+A_{12})^2}{\omega_1^2} + (D_1+D_2)^2\\ \frac{A_{22}^2}{\omega_2^2} + D_2^2\end{bmatrix}$$

$$R_2 = \sqrt{Rm_{groupe2}^2 + \mathrm{Re}_{groupe2}^2} \qquad R_2^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\ \frac{A_{23}^2}{\omega_2^2} + D_3^2\end{bmatrix}$$

- **cumul inter-groupe (quadratique)**

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \qquad R^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\frac{(A_{11}+A_{12})^2}{\omega_1^2} + (D_1+D_2)^2\\ \frac{A_{22}^2+A_{23}^2}{\omega_2^2} + D_2^2 + D_3^2\end{bmatrix}$$

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune (solution analytique)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le système est modélisé par :

- 4 éléments discrets K_T_D_L,
- 2 éléments discrets M_T_D_N.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 4 mailles SEG2.

3.3 Paramètres de modélisation

Réponse sur les 2 premiers modes sans correction statique (combinaison des réponses modales SRSS)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Fréquences propres

MODE	Référence	Code_Aster	Erreur relative (%)
1	2.2507900E+00	2.25079079E+00	3.5E-05
2	3.1830000E+00	3.18309886E+00	0.003

4.2 Réponse globale sur base modale complète

Les modes 1 et 2 sont pris en compte. Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) de la réponse sont directement cumulées au niveau des appuis.

COMB_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $R_1=\sqrt{Rm_1^2+\mathrm{Re}_1^2}$ avec $Rm_1=\sqrt{Rm_{11}^2+Rm_{21}^2}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $R_2=\sqrt{Rm_2^2+\mathrm{Re}_2^2}$ avec $Rm_2=\sqrt{Rm_{12}^2+Rm_{22}^2}$
- réponse globale : $R=\sqrt{R_1^2+R_2^2}$

- déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence	Code_Aster	Erreur relative (%)
NO1	4.00000E-02	4.00000E-02	0.000
NO2	5.58000E-02	5.58083E-02	0.015
NO3	4.40000E-02	4.40000E-02	0.000
NO4	3.85600E-02	3.85683E-02	0.022
NO5	6.00000E-02	6.00000E-02	0.000

- réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence	Code_Aster	Erreur relative (%)
NO1	3.68000E+01	3.68044E+01	0.012
NO2	0.00000E+00	2.23756E-14	2.2E-14
NO3	8.64900E+01	8.64906E+01	7.0E-04
NO4	0.00000E+00	3.071843E-14	3.1E-14
NO5	7.71400E+01	7.71367E+01	-0.004

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Parfait accord des résultats *Aster* avec les valeurs de référence analytiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)