SDLD30 - Réponse sismique spectrale d'un système 2 masses et 3 ressorts multi-supporté

Résumé :

Le problème consiste à calculer la réponse spectrale d'un système 2 masses - 3 ressorts soumis à une excitation sismique multiple.

On teste l'élément discret en traction, le calcul des modes propres, des modes statiques et de la réponse spectrale par superposition modale via l'opérateur COMB_SISM_MODAL. Différents cumuls sont testés lors du calcul des réponses d'appuis.

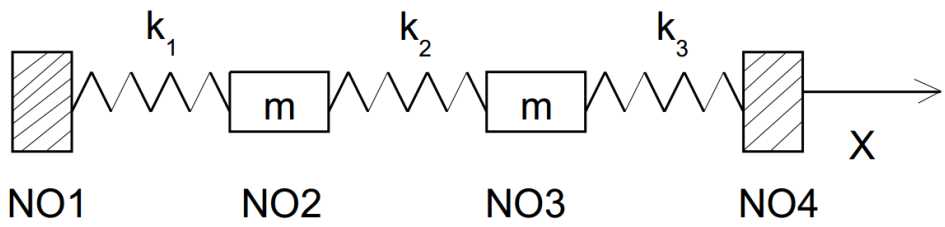
Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats analytiques de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure est modélisée par un ensemble de 3 ressorts et de 2 masses ponctuelles.



1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison : $k_1 = k_2 = k = 1000\ N/m$; $k_3 = 10k = 10000\ N/m$
masse ponctuelle : $m_2 = m_3 = m = 10\ kg$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

- **conditions aux limites**

  Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x.
  Les points $NO1$ et $NO4$ sont encastrés : DX=DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0.
  Les autres points sont libres en translation selon la direction x : DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0.

- **chargement**

  La structure est soumise à une excitation sismique spectrale multiple et à des déplacements différentiels.
  Les spectres de réponses d'oscillateur en pseudo accélération sont simplifiés. Seules les valeurs correspondant aux 2 fréquences propres du système sont mentionnées. Elles ne dépendent pas de l'amortissement :

- au nœud $NO1$:

$$SRO_{NO1}(f_1) = A_{11} = 7\ m/s^2$$
$$SRO_{NO1}(f_2) = A_{21} = 5\ m/s^2$$
$$DDS_{NO1} = D1 = -0.04\ m$$

- au nœud $NO4$:

$$SRO_{NO4}(f_1) = A_{12} = 12\ m/s^2$$
$$SRO_{NO4}(f_2) = A_{22} = 6\ m/s^2$$
$$DDS_{NO4} = D_2 = 0.06\ m$$

1.4 Conditions initiales

Le système est initialement au repos.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On calcule la réponse spectrale par superposition modale d'un système masse ressort soumis à deux excitations distinctes. On détermine le déplacement des masses et les réactions d'appui aux nœuds $NO1$ et $NO4$ suivant l'axe x.

On calcule analytiquement :

- les fréquences propres f_i,
- les vecteurs propres associés φ_{Ni} normalisés par rapport à la masse modale,
- les modes statiques d'appuis ψ_j du système,
- les facteurs de participation modale P_{ij} relatif aux appuis,
- Rm_{ij} le maximum de la réponse de chaque mode à partir des spectres d'excitation,
- Re_j la contribution du mouvement d'entraînement de chaque appui à partir des déplacements différentiels,
- Rc_j le terme de correction statique,
- les composantes primaires et secondaires de la réponse en fonction des régles de cumul adoptées.

2.2 Résultats de référence

- **matrice de rigidité** K

$$K=\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2\mathrm{k} & -k & 0 \\ 0 & -k & 11\mathrm{k} & -10\mathrm{k} \\ 0 & 0 & -10\mathrm{k} & 10\mathrm{k} \end{bmatrix}$$

$$K^p=\begin{bmatrix} 2\mathrm{k} & -k & -k & 0 \\ -k & 11\mathrm{k} & 0 & -10\mathrm{k} \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & -10\mathrm{k} & 0 & 10\mathrm{k} \end{bmatrix}$$

matrice partitionnée degrés de liberté de structure 2, 3, degrés de liberté de support 1, 4

$$K^p=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xs} \\ k_{sx} & k_{ss} \end{bmatrix} \qquad k_{xx}=\begin{bmatrix} 2\mathrm{k} & -k \\ -k & 11\mathrm{k} \end{bmatrix} \qquad k_{xs}=\begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -10\mathrm{k} \end{bmatrix}$$

$$k_{sx}=\begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -10\mathrm{k} \end{bmatrix} \qquad k_{ss}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 10\mathrm{k} \end{bmatrix}$$

- **matrice de masse** M

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&m&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- **calcul modal en base encastrée**

$$k_{xx}=\begin{bmatrix}2\mathrm{k}&-k\\-k&11\mathrm{k}\end{bmatrix}$$

$$\left(k_{xx}-\lambda_i m_{xx}\varphi_i\right)=0 \qquad \lambda_i=\omega_i^2$$

soit $\lambda_1=\frac{k}{2\mathrm{m}}\left(13-\sqrt{85}\right)$ $\lambda_2=\frac{k}{2\mathrm{m}}\left(13+\sqrt{85}\right)$

1) fréquences propres :

soit $f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}$ $f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}$

1) modes propres non normés :

soit $\varphi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\\left(-9+\sqrt{85}\right)/2\\0\end{pmatrix}$ $\varphi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\\left(9+\sqrt{85}\right)/2\\0\end{pmatrix}$

- masses modales généralisées $\mu_i={}^T\varphi_i M\varphi_i$:

soit $\mu_1=\frac{m}{4}\left(170-18\sqrt{85}\right)$ $\mu_2=\frac{m}{4}\left(170+18\sqrt{85}\right)$

[1] modes propres normés à la masse modale généralisée unitaire φ_{Ni} :

soit $\varphi_{N1}=\frac{\varphi_1}{\sqrt{\mu_1}}$ $\varphi_{N2}=\frac{\varphi_2}{\sqrt{\mu_2}}$

- réactions modales Fm_i :

$$r_i=k_{sx}\varphi_{Nis} \qquad \varphi_{Ni}^p=\begin{pmatrix}\varphi_{Nix}\\\varphi_{Nis}\end{pmatrix} \qquad Fm_i^p=\begin{pmatrix}0\\r_i\end{pmatrix}$$

soit $Fm_1=\frac{k}{\sqrt{\mu_1}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\5\left(9-\sqrt{85}\right)\end{pmatrix}$ $Fm_2=\frac{k}{\sqrt{\mu_2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-5\left(9+\sqrt{85}\right)\end{pmatrix}$

- facteurs de participation modale $P_{ij}={}^T\varphi_i M\psi_j$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud $NO1$:

$$P_{11}={}^{T}\varphi_1 M\,\psi_1=\frac{m}{42\sqrt{\mu_1}}\left(13+\sqrt{85}\right)$$

- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud $NO4$:

$$P_{12}={}^{T}\varphi_1 M\,\psi_2=\frac{10\,m}{21\sqrt{\mu_1}}\left(-8+\sqrt{85}\right)$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud $NO1$:

$$P_{21}={}^{T}\varphi_2 M\,\psi_1=\frac{m}{42\sqrt{\mu_2}}\left(-13+\sqrt{85}\right)$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud $NO4$:

$$P_{22}={}^{T}\varphi_2 M\,\psi_2=\frac{10\,m}{21\sqrt{\mu_2}}\left(8+\sqrt{85}\right)$$

- facteur de participation du mode dynamique 1 dans la direction X:

$$P_{1X}=P_{11}+P_{12}$$

- facteur de participation du mode dynamique 2 dans la direction X:

$$P_{2X}=P_{21}+P_{22}$$

- **modes statiques d'appuis** ψ_j

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud $NO1$:

déplacements : $\psi_1=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}21\\11\\1\\0\end{pmatrix}$ réactions nodales : $Fs_1=K\,\psi_1=\frac{10}{21}k\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud $NO4$:

déplacements : $\psi_2=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}0\\10\\20\\21\end{pmatrix}$ réactions nodales : $Fs_2=K\,\psi_2=\frac{10}{21}k\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

- **réponse du mode** i **au mouvement de l'appui** j

$$Rm_{ij}=r_i P_{ij}\frac{A_{ij}}{\omega_i^2}\ \text{avec}\ r_i=\varphi_{\mathrm{Ni}}\ \text{ou}\ Fm_i$$

- **correction statique**

- modes statiques u_j solution de $K\,u_j=M\,\psi_j$:

déplacements : $u_1=\frac{m}{441\,k}\begin{pmatrix}0\\122\\13\\0\end{pmatrix}$ réactions nodales : $Fu_1=\frac{m}{441}\begin{pmatrix}-122\\231\\21\\-130\end{pmatrix}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

déplacements : $u_2=\frac{m}{441\,k}\begin{pmatrix}0\\130\\50\\0\end{pmatrix}$ réactions nodales : $Fu_2=\frac{m}{441}\begin{pmatrix}-130\\210\\420\\-500\end{pmatrix}$

- correction statique relative au mouvement de l'appui j si le mode 2 n'est pas retenu :

$$Rc_j=\left(ru_j-\frac{P_{1j}r_1}{\omega_1^2}\right)A_{1j} \text{ avec : } ru_j=u_j \text{ ou } Fu_j \text{ et } r_1=\varphi_{N1} \text{ ou } Fm_1$$

- **contribution de l'appui j au mouvement d'entraînement**

$$Re_j=r_j D_j \text{ avec } r_j=\psi_j \text{ ou } Fs_j$$

Ces calculs analytiques sont décrits dans le fichier Matlab sdld30a.55.

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune (solution analytique exacte).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le système est modélisé par :

- 3 éléments discrets K_T_D_L,
- 2 éléments discrets M_T_D_N.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 3 mailles SEG2.

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Fréquences propres

MODE	Référence
1	2,18815E+00
2	5,30484E+00

4.2 Réponse globale sur base modale complète

Les modes 1 et 2 sont pris en compte. Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) de la réponse sont directement cumulées au niveau des appuis.

- **calcul n°1**

  COMB_MODE='SRSS'

  - réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $R_1=\sqrt{Rm_1^2+Re_1^2}$ avec $Rm_1=\sqrt{Rm_{11}^2+Rm_{21}^2}$ (cumul sur les modes)
  - réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $R_2=\sqrt{Rm_2^2+Re_2^2}$ avec $Rm_2=\sqrt{Rm_{12}^2+Rm_{22}^2}$
  - réponse globale : $R=\sqrt{R_1^2+R_2^2}$ (cumul sur les appuis)

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
$NO1$	4,00000E-02
$NO2$	5,43820E-02
$NO3$	5,75544E-02
$NO4$	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
$NO1$	5,36769E+01
$NO4$	7,44120E+01

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Réponse globale sur base modale incomplète sans correction statique

Seul le mode 1 est pris en compte. Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) de la réponse sont directement cumulées au niveau des appuis.

- **calcul n°1**

```
COMB_MODE='SRSS'
```

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $R_1=\sqrt{Rm_1^2+Re_1^2}$ avec $Rm_1=Rm_{11}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $R_2=\sqrt{Rm_2^2+Re_2^2}$ avec $Rm_2=Rm_{12}$
- réponse globale : $R=\sqrt{R_1^2+R_2^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
$NO1$	4,00000E-02
$NO2$	5,43794E-02
$NO3$	5,73536E-02
$NO4$	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
$NO1$	5,36743E+01
$NO4$	5,68312E+01

4.4 Réponse globale sur base modale incomplète avec correction statique

Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse. La contribution statique du mode 2 négligé est prise en compte.

- **calcul n°1**

```
COMB_MODE='SRSS'
```

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $R_1=\sqrt{Rm_1^2+Rc_1^2+Re_1^2}$ avec $Rm_1=Rm_{11}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $R_2=\sqrt{Rm_2^2+Rc_2^2+Re_2^2}$ avec $Rm_2=Rm_{12}$
- réponse globale : $R=\sqrt{R_1^2+R_2^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence	Tolérance
$NO1$	4,00000E-02	0.001
$NO2$	0.054389658	0.001
$NO3$	0.058152653	0.001
$NO4$	6,00000E-02	0.001

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence	Tolérance
NO1	53.6846755	0.001
NO4	111.6190600	0.001

4.5 Partition des composantes primaire et secondaire de la réponse

Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) sont traitées séparément.

- **calcul n°1**
- réponse primaire sur base modale complète (modes 1 et 2)
  COMB_MODE='SRSS'

  1) réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $RI_1=\sqrt{Rm_{11}^2+Rm_{21}^2}$ (cumul sur modes)
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $RI_2=\sqrt{Rm_{12}^2+Rm_{22}^2}$
- réponse primaire : $RI=\sqrt{RI_1^2+RI_2^2}$

déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	0,00000E+00
NO2	4,12562E-02
NO3	6,60152E-03
NO4	0,00000E+00

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,12562E+01
NO4	6,60152E+01

- réponse secondaire
  COMB_DEPL_APPUI='QUAD'

  1) réponse secondaire : $RII=\sqrt{Re_1^2+Re_2^2}$

déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	4,00000E-02
NO2	3,54306E-02
NO3	5,71746E-02
NO4	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

NO1	3,43386E+01
NO4	3,43386E+01

- **calcul n°2**

  - réponse primaire sur base modale incomplète sans correction statique
  Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse
  COMB_MODE='SRSS'

  - réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $RI_1=Rm_{11}$
  - réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $RI_2=Rm_{12}$
  - réponse primaire : $RI=\sqrt{RI_1^2+RI_2^2}$

  déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	0,00000E+00
NO2	4,12528E-02
NO3	4,52841E-03
NO4	0,00000E+00

  réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,12528E+01
NO4	4,52841E+01

- réponse secondaire
COMB_DEPL_APPUI='LINE'

- réponse secondaire : $RII=Re_1+Re_2$

  - déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
$NO1$	-4,00000E-02
$NO2$	7,61905E-03
$NO3$	5,52381E-02
$NO4$	6,00000E-02

  réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
$NO1$	-4,76190E+01
$NO4$	4,76190E+01

- **calcul n°3**

  - réponse primaire sur base modale incomplète avec correction statique
  Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse
  COMB_MODE='SRSS'

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $RI_1=\sqrt{Rm_{11}^2+Rc_1^2}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $RI_2=\sqrt{Rm_{12}^2+Rc_2^2}$
- réponse primaire : $RI=\sqrt{RI_1^2+RI_2^2}$

déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence	Tolérance
$NO1$	0,00000E+00	-
$NO2$	4,1266282E-02	0.001
$NO3$	1.0620582E-02	0.001
$NO4$	0,00000E+00	-

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence	Tolérance
$NO1$	4,12662823E+001	0.001
$NO4$	1.0620581996E+02	0.001

- réponse secondaire
  COMB_DEPL_APPUI='ABS'
- réponse secondaire : $RII=|Re_1|+|Re_2|$

déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
$NO1$	4,00000E-02
$NO2$	4,95238E-02
$NO3$	5,90476E-02
$NO4$	6,00000E-02

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,76190E+01
NO4	4,76190E+01

- **calcul n°4**

- réponse primaire sur base modale incomplète avec correction statique

  Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse.
  COMB_MODE='SRSS'

  - réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $RI_1=\sqrt{Rm_{11}^2+Rc_1^2}$
  - réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $RI_2=\sqrt{Rm_{12}^2+Rc_2^2}$
  - réponse primaire : $RI=\sqrt{RI_1^2+RI_2^2}$

- réponse secondaire : test cumul de $DDSs$

  5 cas de charge sont définis. Les 5 réponses statiques élémentaires associées sont :
  - cas a : $DDSa_{NO1}=-0.04$ soit $R_a=r_1\times DDSa_{NO1}$
  - cas b : $DDSb_{NO4}=0.06$ soit $R_b=r_2\times DDSb_{NO4}$
  - cas c : $DDSc_{NO4}=0.03$ soit $R_c=r_2\times DDSc_{NO4}$
  - cas d : $DDSd_{NO1}=-0.07$ soit $R_d=r_1\times DDSd_{NO1}$
  - cas e : $DDSe_{NO4}=0.05$ soit $R_e=r_2\times DDSe_{NO4}$

  4 combinaisons sont calculées :

  - **combinaison n°1**

    cumul linéaire des cas a et b : TYPE_COMBI='LINE' NUME_ORDRE=200

    réponse secondaire : $RII_1=Ra+Rb$

  déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	-4,00000E-02
NO2	7,61905E-03
NO3	5,52381E-02
NO4	6,00000E-02

  réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	-4,76190E+01
NO4	4,76190E+01

  - **combinaison n°2**

    cumul absolu des cas a et c : TYPE_COMBI='ABS' NUME_ORDRE=201

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

réponse secondaire : $RII_2 = |Ra| + |Rc|$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	4,00000E-02
NO2	3,52381E-02
NO3	3,04762E-02
NO4	3,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	3,33333E+01
NO4	3,33333E+01

- **combinaison n°3**

cumul quadratique des cas d et e : TYPE_COMBI='QUAD' NUME_ORDRE=202

réponse secondaire : $RII_3 = \sqrt{Rd^2 + Re^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	7,00000E-02
NO2	4,37189E-02
NO3	4,77356E-02
NO4	5,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,09635E+01
NO4	4,09635E+01

- **combinaison n°4**

cumul linéaire des cas a et e : TYPE_COMBI='LINE' NUME_ORDRE=203

réponse secondaire : $RII_4 = Ra + Re$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	-4,00000E-02
NO2	2,85714E-03
NO3	4,57143E-02
NO4	5,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

NOEUD	Référence
NO1	-4,28571E+01
NO4	4,28571E+01

La réponse secondaire totale est établie par le cumul quadratique des 4 combinaisons précédentes :

$$RII = \sqrt{RII_1^2 + RII_2^2 + RII_3^2 + RII_4^2}$$ NUME_ORDRE=204

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	9,84886E-02
NO2	5,67386E-02
NO3	9,13703E-02
NO4	9,74679E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	8,30266E+01
NO4	8,30266E+01

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus avec *Code_Aster* sont conformes aux résultats analytiques de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)