SDLD21 - Système masse-ressort à 8 degrés de liberté avec amortisseur visqueux

Résumé :

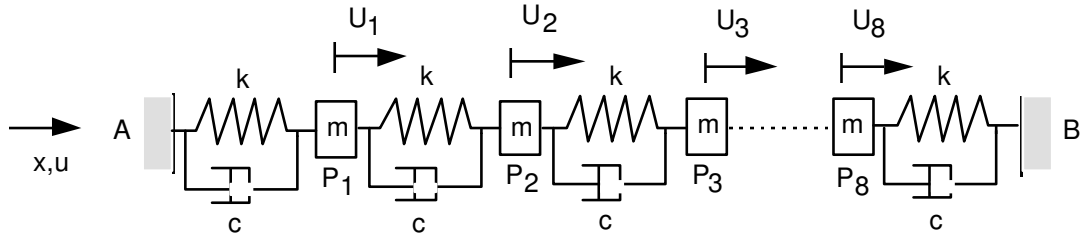
Ce problème unidirectionnel consiste à effectuer une analyse harmonique d'une structure mécanique composée d'un ensemble de masses-ressorts avec amortisseurs visqueux et soumise à une excitation sinusoïdale. Ce test de mécanique des structures correspond à une analyse dynamique d'un modèle discret ayant un comportement linéaire.

Les résultats obtenus (champ de déplacement, vitesse et accélération pour différentes fréquences d'excitation) sont en bon accord avec les résultats du guide VPCS.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Masses ponctuelles : $m_{P_1}=m_{P_2}=m_{P_3}=\ldots\ \ldots=m_{P_8}=m$

Raideurs de liaison : $k_{AP1}=k_{P1P2}=k_{P2P3}=\ldots\ \ldots=k_{P8B}=k$

Amortissement visqueux : $c_{AP1}=c_{P1P2}=c_{P2P3}=\ldots\ \ldots=c_{P8B}=c$

1.2 Propriétés de matériaux

Ressort de translation élastique linéaire	$k=10^5\,N/m$
Masse ponctuelle	$m=10\,Kg$
Amortissement visqueux unidirectionnel	$c=50\,N/(m/s)$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites :

Points A et B : encastrés $(u=0)$.

Chargement : Force concentrée sinusoïdale de fréquence variable au point P_4

Point P_4 $\quad F_{x_4}=F_0\sin\Omega t$ $\quad \Omega=2\pi f \quad 5\,Hz\le f\le 40\,Hz$

$F_0=constante=1\mathrm{N}$

Autres points P_i $\quad f_{x_i}=0$

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'étude du régime harmonique permanent.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le système d'équations différentielles du second ordre couplées est de la forme :

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=F$$

avec $M=\begin{bmatrix}10 & & & \\ & 10 & & \\ & & . & \\ & & & 10\end{bmatrix}$ $C=50\begin{bmatrix}2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & . & & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & . & . & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & \end{bmatrix}$

$$K=10^{+5}\begin{bmatrix}2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & . & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & \end{bmatrix}$$

La solution ω à une excitation harmonique $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F_0}e^{j\omega t}\ (j^2=-1)$ est de la forme $u=u_0e^{j\omega t}$, ce qui conduit à : $(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{M}\omega^2+j\omega\boldsymbol{C})u_0=\boldsymbol{F_0}$

Ce système peut être résolu pour tout ω, soit directement, soit en utilisant la transformation modale à partir des modes propres réels obtenus par le système conservatif associé $(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{M}\omega^2)\phi=0$.

Il admet n solutions propres (8 dans ce cas) ω_i^2 et vecteurs associés ϕ_i regroupés dans la matrice spectrale $\Lambda=[\omega_i^2]$ et la matrice modale $\Phi=[\phi_i]$.

La transformation modale consiste à écrire : $\mathbf{u}_0=\Phi\mathbf{q}$ ce qui conduit à :

$$\left[\Lambda-\omega^2\boldsymbol{I}+j\omega\xi\right]q={}^t\Phi F_0$$

$\boldsymbol{I}$ est l'identité,

ici ξ est diagonale $\xi=\left[\xi_{ii}\right]$ car l'amortissement est proportionnel $(\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{K})$.

La réponse s'écrit : $u_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\phi_i^t\phi_i}{\omega_i^2-\omega^2+j\omega\xi_{ii}}F_0$

On obtient la solution exacte en prenant tous les modes propres.

On en déduit : $\dot{u_0}=j\omega u_0$ et $\ddot{u_0}=-\omega^2u_0$

2.2 Résultats de référence

Déplacement selon x du point P_4 pour certaines fréquences.

2.3 Incertitude sur la solution

Solution semi-analytique.

2.4 Référence bibliographique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

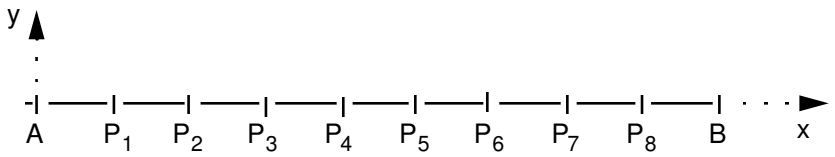
[1] J. PIRANDA : Notice d'utilisation du logiciel d'analyse modale MODAN - Version 0.2 (1990). Laboratoire de Mécanique Appliquée - Université de Franche Comté - Besançon (France).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Elément discret de rigidité en translation



Caractéristiques des éléments

DISCRET :	avec masses nodales	M_T_D_N
	et matrices de rigidité	K_T_D_L
	et matrices d'amortissement	A_T_D_L

Conditions limites :

en tous les nœuds	DDL_IMPO	(TOUT='OUI' DY= 0. , DZ= 0.)
aux nœuds extrémités		(GROUP_NO=AB DX= 0.)

Noms des nœuds :

$Point\ A = N1$ $P_1 = N2$

$Point\ B = N10$ $P_2 = N3$

.....

$P_8 = N9$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 10
Nombre de mailles et types : 9 SEG2

3.3 Grandeurs testées et résultats

Parties réelle et imaginaire de la composante DX du déplacement du point P_4.

Fréquence	Référence
5.00	1.0237 E–4 –8.5187 E–6
5.50	4.5066 E–4 –7.7914 E–4
6.00	–9.4101 E–5 –1.0585 E–5
10.00	8.4143 E–7 –1.0335 E–6
15.00	1.2656 E–5 –5.6652 E–6
20.00	2.9784 E–6 –6.6970 E–6
25.00	–1.2536 E–6 –5.2703 E–6
30.00	–2.0904 E–6 –5.4821 E–6

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

35.00	–4.5447 E–6 –1.1190 E–6
39.50	–2.6895 E–6 –3.0505 E–7

Parties réelle et imaginaire de la composante DX de la vitesse du point P_4 .

Fréquence	Référence
5.00	2.6762 E–4 3.2160 E–3
5.50	2.6925 E–2 1.5574 E–2
6.00	3.9904 E–4 –3.5475 E–3
10.00	6.4937 E–5 5.2869 E–5
15.00	5.3393 E–4 1.1928 E–3
20.00	8.4157 E–4 3.7428 E–4
25.00	8.2786 E–4 –1.9691 E–4
30.00	1.0333 E–3 –3.9403 E–4
35.00	2.4608 E–4 –9.9943 E–4
39.50	7.5709 E–5 –6.6749 E–4

Parties réelle et imaginaire de la composante DX de l'accélération du point P_4 .

Fréquence	Référence
5.00	–1.0103 E–1 8.4076 E–3
5.50	–5.3819 E–1 9.3047 E–1
6.00	1.3374 E–1 1.5044 E–2
10.00	–3.3218 E–3 4.0801 E–3
15.00	–1.1242 E–1 5.0322 E–2
20.00	–4.7033 E–2 1.0575 E–1
25.00	3.0931 E–2 1.3004 E–1
30.00	7.4273 E–2 1.9478 E–1
35.00	2.1979 E–1 5.4116 E–2
39.50	1.6566 E–1 1.8789 E–2

3.4 Remarques

Contenu du fichier résultats :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les valeurs du déplacement de la composante DX du point P_4 pour toutes les fréquences de 5 à $40\,Hz$ par pas de 0.5 (Cas test initial de VPCS).

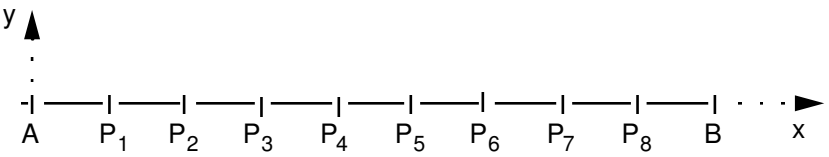
Les valeurs de la vitesse et de l'accélération de la composante DX du point P_4 pour quelques fréquences de vibration.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Elément discret de rigidité en translation



Caractéristiques des éléments

DISCRET :	avec masses nodales	M_T_D_N
	et matrices de rigidité	K_T_D_L
	et matrices d'amortissement	A_T_D_L

Conditions limites :

en tous les nœuds	DDL_IMPO	(TOUT='OUI' DY= 0. , DZ= 0.)
aux nœuds extrémités		(GROUP_NO=AB DX= 0.)

Noms des nœuds :

$Point\ A = N1$ $P_1 = N2$
$Point\ B = N10$ $P_2 = N3$
.....
$P_8 = N9$

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 10
Nombre de mailles et types : 9 SEG2

Pour tester REST_SPEC_TEMP, on va comparer plusieurs approches (sur base modale et physique) en testant la composante DX au point P_4 du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.
On teste ainsi deux méthodes :

- calcul sur base modale, puis après REST_SPEC_TEMP, retour sur base physique avec RECU_FONCTION sur le RESU_GENE,
- calcul sur base physique directement.

A chaque fois on teste l'option TOUT_CHAM='OUI' ou en calculant séparément les trois champs cinématiques avec NOM_CHAM = 'DEPL', 'VITE' ou 'ACCE'.

Par ces différents chemins on doit retrouver les mêmes résultats car la base modale est complète (ce n'est pas problématique car on a un faible nombre de degrés de liberté physiques).
Plutôt que de ne tester qu'en des instants particuliers, les comparaisons (sur base physique) se font en analysant la somme sur tous les instants des valeurs absolues du maximum (à chaque pas) des écarts entre les solutions temporelles (obtenues par FFT inverse avec REST_SPEC_TEMP). Cette norme doit à chaque fois être strictement nulle.

Etant donné le nombre d'opérations supplémentaires liées aux tests de REST_SPEC_TEMP, le temps CPU de la modélisation B est nettement accru, comparé aux autres modélisations qui ne comportent pas ces tests.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Parties réelle et imaginaire de la composante DX du déplacement du point P_4.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Fréquence	Référence
5.00	1.0237 E–4 –8.5187 E–6
5.50	4.5066 E–4 –7.7914 E–4
6.00	–9.4101 E–5 –1.0585 E–5
10.00	8.4143 E–7 –1.0335 E–6
15.00	1.2656 E–5 –5.6652 E–6
20.00	2.9784 E–6 –6.6970 E–6
25.00	–1.2536 E–6 –5.2703 E–6
30.00	–2.0904 E–6 –5.4821 E–6
35.00	–4.5447 E–6 –1.1190 E–6
39.50	–2.6895 E–6 –3.0505 E–7

Pour les tests sur REST_SPEC_TEMP, toutes les normes sur les valeurs maximales des écarts entre les solutions calculées pour les champs de déplacement, vitesse et accélération sont strictement nulles : on a donc les mêmes résultats sur base modale ou physique et quel que soit le mode d'utilisation de REST_SPEC_TEMP.

4.4 Remarques

Contenu du fichier résultats :

Les valeurs du déplacement de la composante DX du point P_4 pour toutes les fréquences de 5 à $40\,Hz$ par pas de 0.5 (Cas test initial de VPCS).

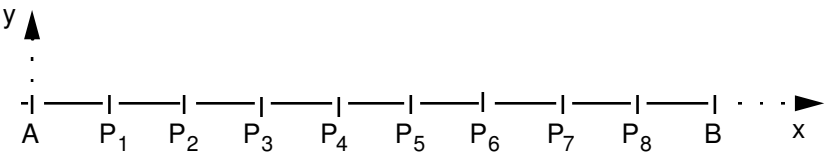
Les valeurs de la vitesse et de l'accélération de la composante DX du point P_4 pour quelques fréquences de vibration.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Elément discret de rigidité en translation



Caractéristiques des éléments

DISCRET :	avec masses nodales	M_T_D_N
	et matrices de rigidité	K_T_D_L
	et matrices d'amortissement	A_T_D_L

Conditions limites :

en tous les nœuds	DDL_IMPO	(TOUT='OUI' DY= 0. , DZ= 0.)
aux nœuds extrémités		(GROUP_NO=AB DX= 0.)

Noms des nœuds :

$Point\ A = N1$ $P_1 = N2$

$Point\ B = N10$ $P_2 = N3$

.....

$P_8 = N9$

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 10
Nombre de mailles et types : 9 SEG2

5.3 Grandeurs testées et résultats

Fréquences propres de la structure pour les numéros d'ordre de 1 à 5.

Numéro d'ordre	Référence
1	5.5271
2	10.8868
3	15.9155
4	20.4606
5	24.384

Amortissement réduis de la structure pour les numéros d'ordre de 1 à 5.

Numéro d'ordre	Référence
1	0.00868241
2	0.017101
3	0.025
4	0.0321394
5	0.0383022

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est identique à la modélisation A, la seule différence est au niveau du solveur employé : on utilise ici MUMPS.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 10
Nombre de mailles et types : 9 SEG2

6.3 Grandeurs testées et résultats

Comme pour la modélisation A, on teste sur les parties réelle et imaginaire de la composante DX du déplacement, de la vitesse et de l 'accélération du point P_4 . Les résultats sont égaux à ceux obtenus avec la modélisation A, jusqu'au moins la onzième décimale incluse.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont excellents, ce qui est normal pour une intégration directe.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)