Adaptation de maillage en non-linéaire

Résumé :

Ce document présente la méthodologie de réalisation d'une étude non-linéaire avec adaptation de maillage. Cette adaptation du maillage au cours du transitoire est obtenue à l'aide du logiciel HOMARD appelé via la commande MACR_ADAP_MAIL [U7.03.01].

Un exemple illustre les possibilités et la mise en œuvre de stratégies de remaillage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction....3
2 Adaptation en non-linéaire....3
2.1 Problème considéré....3
2.2 Phase de rééquilibrage....4
2.3 Projection....5
2.3.1 Projection du champ de déplacement....5
2.3.2 Projection du champ de contraintes....5
2.3.3 Projection du champ de variables internes....5
3 Mise en œuvre....6
3.1 Schéma général....6
3.2 Exemple....7
4 Références....7

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

L'adaptation de maillage apporte une aide à l'utilisateur pour fournir des calculs les plus fiables possibles vis-à-vis des erreurs de discrétisation induites par la méthode de résolution aux éléments finis.

Nous ne détaillerons pas dans ce document le principe de l'adaptation et nous renvoyons le lecteur au document [U2.08.01]. Nous rappelons juste quelques éléments.

Schématiquement, une itération d'adaptation de maillage se présente comme sur la figure ci-dessous. Le logiciel calcule la solution numérique sur le maillage numéro k, puis en déduit les valeurs de l'indicateur d'erreur sur tout le maillage. À partir de la connaissance du maillage numéro k et de l'indicateur numéro k, le logiciel d'adaptation de maillage HOMARD, crée le nouveau maillage numéro $k+1$.

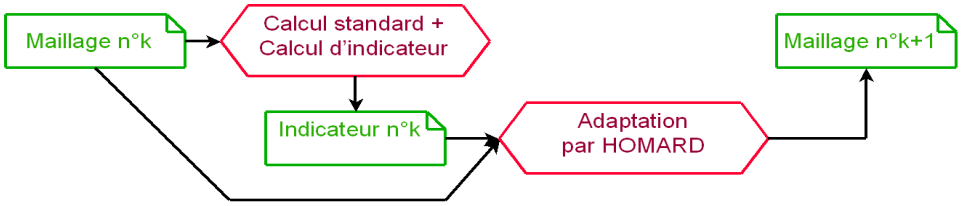


Illustration 1: Itération d'adaptation de maillage

Pour un calcul statique, cela revient à chercher à améliorer la solution par une succession de calculs sur des maillages différents. Pour un calcul transitoire en temps, le calcul est suspendu à un instant donné ; le maillage est adapté ; le calcul reprend sur le nouveau maillage. C'est à ce cas de figure que nous nous attaquons ici. En effet, dans le cas de la résolution d'un transitoire non-linéaire, le redémarrage du calcul n'est pas forcément chose aisée. L'objectif de ce document est d'aider l'utilisateur à mettre en œuvre ce type de modélisation.

2 Adaptation en non-linéaire

Dans cette partie, on décrit le problème type que l'on cherche à résoudre ainsi que les difficultés essentielles qu'il présente.

2.1 Problème considéré

Le problème type auquel on s'intéresse est un transitoire impliquant un modèle avec une loi de comportement non-linéaire. On souhaite adapter le maillage support au cours de la résolution suivant le schéma de la figure 2. Le principe est le suivant :

- on résout le transitoire sur un ou plusieurs pas de temps
- on adapte le maillage sur la base du calcul d'un indicateur d'erreur
- on reprend le transitoire

En fait, ce schéma dissimule une grande part de la complexité du problème. Prenons l'exemple de l'utilisation d'une loi de comportement élasto-plastique de von-Mises avec écrouissage isotrope. À chaque pas de temps, on stocke l'état du domaine de calcul Ω, donné par le champ de déplacement, le champ de contraintes et le champ de variables internes $(\boldsymbol{u}, \sigma, \alpha)$. C'est ce triplet porté par le maillage M qui détermine complètement l'équilibre de Ω. Or dans le cas de l'utilisation de l'adaptation de maillage, le maillage devient un élément évolutif. Si on suppose que le maillage est adapté à chaque pas de temps, il faut aussi transférer le triplet $(\boldsymbol{u}, \sigma, \alpha)$ d'un maillage à l'autre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

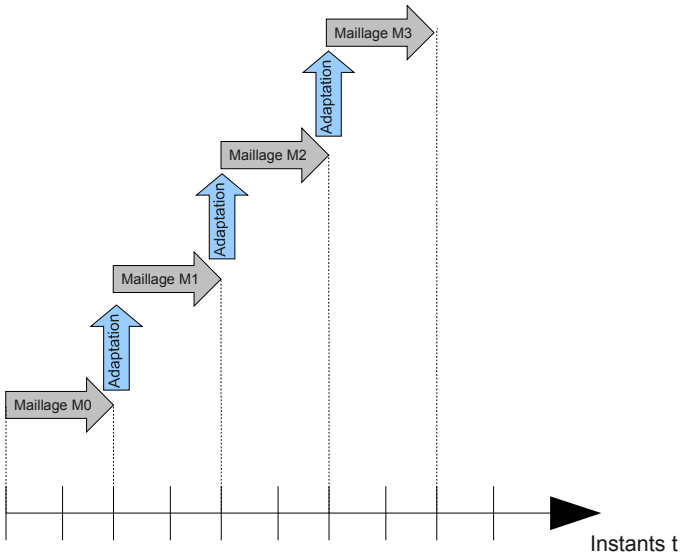


Illustration 2: Marche en temps avec adaptation de maillage

C'est la phase de projection. Malheureusement, une fois la projection réalisée, rien n'assure que la nouveau triplet assure l'équilibre de du domaine sur le nouveau maillage. Il faut pour cela corriger le nouveau triplet. C'est la phase de ré-équilibrage.

2.2 Phase de rééquilibrage

Dans la suite, on utilisera les hypothèses suivantes :
- utilisation d'une loi de comportement élasto-plastique de von-Mises avec écrouissage isotrope
- adaptation du maillage à chaque pas de chargement

On pose les notations suivantes :
- M_i désigne le maillage au pas de chargement i
- $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ désignent le triplet champ de déplacement, champ de contraintes et champ de variables internes au pas de chargement i
- $(x)_{M_i}$ désigne la grandeur x portée par le maillage M_i

On détaille maintenant le processus de calcul. On part d'un état équilibré $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{M_i}$ porté par le maillage M_i au pas de chargement i. On procède à la résolution du problème au pas de chargement $i+1$. On obtient l'état équilibré $(\boldsymbol{u}_{i+1}, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1})_{M_i}$. Sur la base du calcul d'un indicateur d'erreur, on produit un nouveau maillage M_{i+1}.

Pour continuer le calcul, il faut projeter l'état équilibré $(\boldsymbol{u}_{i+1}, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1})_{M_i}$ sur le nouveau maillage M_{i+1}. Nous détaillerons cette projection dans la suite. On obtient alors l'état $(\boldsymbol{u}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}^{proj})_{M_{i+1}}$ mais qui n'est pas forcément équilibré. En effet, la phase de projection peut induire des perturbations sur chacun des 3 champs et supprimer leur cohérence. Il s'agit donc de rééquilibrer l'état mécanique à l'instant $i+1$ du domaine Ω discrétisé par M_{i+1}.

Pour ce faire, on se reporte à la documentation [R5.03.01] « Algorithme non-linéaire quasi-statique » et en ne prenant pas en compte les variables de commandes, on trouve que le système que l'on résout à la première itération de chaque pas de temps est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i . \Delta \mathbf{u}_{i+1}^0 + \mathbf{B}^T . \Delta \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^0 = \mathbf{L}_{i+1}^{\text{méca}} - \mathbf{Q}_i^T . \boldsymbol{\sigma}_i \\ \mathbf{B} . \Delta \mathbf{u}_{i+1}^0 = \mathbf{u}_{i+1}^d - \mathbf{B} . \mathbf{u}_i \end{cases} \quad (1)$$

Les seconds membres $\mathbf{L}_{i+1}^{\text{méca}} - \mathbf{Q}_i^T . \boldsymbol{\sigma}_i$ et $\mathbf{u}_{i+1}^d - \mathbf{B} . \mathbf{u}_i$ mesurent respectivement :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- l'écart à l'équilibre entre le chargement et un état mécanique de contraintes
- l'écart à la vérification des conditions aux limites

La résolution du système non-linéaire sous-jacent amène à l'annulation de ces écarts et la production d'un état mécanique équilibré. C'est exactement ce que l'on cherche à faire non pas en partant de l'état mécanique de l'instant précédent $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)_{M_i}$ comme dans (1) mais à partir de l'état mécanique projeté $(\boldsymbol{u}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}^{proj})_{M_{i+1}}$.

Si on le transpose au cas qui nous intéresse, le système à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i . \Delta \mathbf{u}_{i+1}^0 + \mathbf{B}^T . \Delta \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^0 = \mathbf{L}_{i+1}^{\text{méca}} - \mathbf{Q}_{i+1}^T . \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{proj} \\ \mathbf{B} . \Delta \mathbf{u}_{i+1}^0 = \mathbf{u}_{i+1}^d - \mathbf{B} . \mathbf{u}_{i+1}^{proj} \end{cases} \quad (2)$$

Du point de vue de la modélisation, cela revient donc à relancer la résolution du pas de chargement $i+1$ en utilisant comme état initial l'état mécanique projeté $(\boldsymbol{u}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}^{proj})_{M_{i+1}}$.

L'utilisation du l'état mécanique projeté $(\boldsymbol{u}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}^{proj})_{M_{i+1}}$ comme état initial est capitale. Elle permet d'abord de partir d'un point de départ le plus proche possible du point d'arrivée et donc d'augmenter les chances de voir converger la méthode de Newton. Mais il y a une raison bien plus importante. Dans le cadre d'utilisation de lois de comportement irréversible, les variables internes, telle que la déformation plastique cumulée, portent l'histoire mécanique de chaque point de la structure. Il faut partir d'un état de variables internes le plus fidèle possible à l'état réel de la structure pour bien traduire son histoire mécanique.

Cela nous amène à une nouvelle constatation : il est essentiel de produire un état mécanique projeté $(\boldsymbol{u}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{proj}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}^{proj})_{M_{i+1}}$ le plus fidèle possible. C'est ce que nous allons aborder maintenant.

2.3 Projection

La projection des champs se fait avec l'opérateur PROJ_CHAMP ; pour toute information sur sa syntaxe et ses fonctionnalités complètes, le lecteur se reportera à [U4.72.05].

Nous nous intéressons à la projection de l'état mécanique qui est composé de 3 champs. Nous allons examiner la projection de chacun de ces champs.

2.3.1 Projection du champ de déplacement

Le champ de déplacement DEPL est un champ aux nœuds continu. Sa projection ne pose pas de problème particulier. La méthode de collocation, qui est utilisée par défaut pour ce type de champ, est parfaitement adaptée.

2.3.2 Projection du champ de contraintes

Le champ de contraintes (et/ou d'efforts) SIEF_ELGA est nativement calculé aux points d'intégration. De manière à minimiser la perturbation induite par la projection, il est préférable d'exploiter directement le champ au point d'intégration. C'est la méthode que l'opérateur de projection choisira automatiquement pour ce champ.

Il est possible de faire la projection en utilisant un champ par éléments aux nœuds ou un champ aux nœuds. Cela implique des manipulations supplémentaires assez techniques. Cette approche est déconseillée.

2.3.3 Projection du champ de variables internes

Le champ de variables internes VARI_ELGA est nativement calculé aux points d'intégration. De manière à minimiser la perturbation induite par la projection, il est préférable d'exploiter directement le

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

champ au point d'intégration. C'est la méthode que l'opérateur de projection choisira automatiquement pour ce champ.

Comme pour le champ de contraintes, il est possible d'utiliser un champ par éléments aux nœuds ou un champ aux nœuds mais cela pose plus de problème. En effet, si l'on considère le cas de la plasticité de Von Mises, la déformation plastique cumulée p doit toujours être positive, $p \geqslant 0$. Considérons la figure 3. Elle représente un élément SEG2 à 2 nœuds $N1$ et $N2$ et à 2 points d'intégration $PG1$ et $PG2$. Cet élément porte un champ à ses points d'intégration de valeur $VG1$ et $VG2$, qui sont toutes deux positives. Or, suite à l'extrapolation aux sommets, on constate que la valeur $VN1$ au sommet $N1$ reste bien positive tandis que la valeur $VN2$ au sommet $N2$ devient négative. De manière à être utilisée comme valeur initiale, la déformation plastique cumulée p doit être positive ou nulle ; la valeur $VN2$ sera donc mise à zéro.

L'utilisation d'un champ de variables internes aux nœuds est fortement déconseillée car, en plus des perturbations inhérentes à la projection comme au paragraphe précédent, elle impose un traitement supplémentaire pour rendre le champ admissible qui le perturbe notablement.

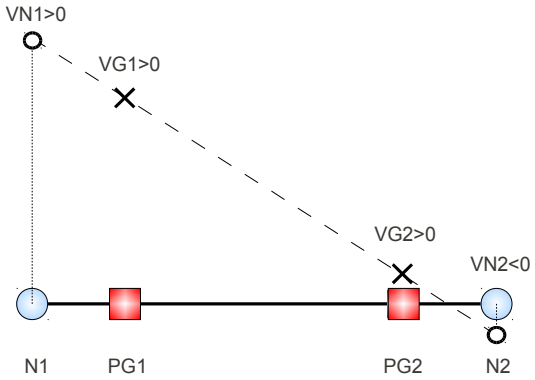


Illustration 3: Perturbation liée à l'extrapolation

3 Mise en œuvre

3.1 Schéma général

Le schéma général de l'adaptation est présenté sur la figure 4. Il comprend les 4 phases décrites précédemment :

- résolution sur un ou plusieurs pas de chargement
- adaptation du maillage sur la base du calcul d'un indicateur d'erreur
- projection des champs à la fin du dernier pas de temps sur le nouveau maillage
- équilibrage des champs à la fin du dernier pas de temps sur le nouveau maillage

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

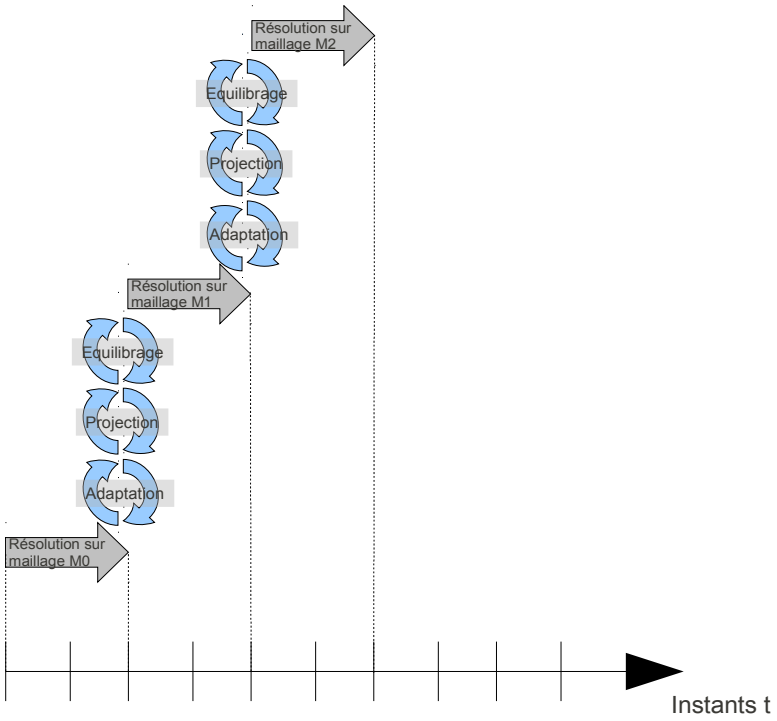


Illustration 4: Processus complet d'adaptation

3.2 Exemple

Un exemple de mise en œuvre pratique est présenté dans le cas-test *Code_Aster* SSNP158 [V6.03.158].

4 Références

Les documents [bib1] à [bib4] traitent de l'outil d'adaptation de maillage HOMARD.
Les documents [bib5] à [bib9] traitent des estimateurs d'erreur.

[1] G. NICOLAS & al. http://www.code_aster.org/outils/homard

[2] G. NICOLAS, T. FOUQUET, "Logiciel HOMARD - Volume 1 – Présentation générale", rapport EDF H-I23-2008-04107

[3] « Macro-commande MACR_ADAP_MAIL », [U7.03.01]

[4] « Macro-commande MACR_INFO_MAIL », [U7.03.02]

[5] « Estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz en élasticité 2D », [R4.10.01]

[6] « Estimateur d'erreur en résidu », [R4.10.02]

[7] « Indicateur d'erreur spatiale en résidu pour la thermique transitoire », [R4.10.03]

[8] « Détection des singularités et calcul d'une carte de taille », [R4.10.04]

[9] J. DELMAS : « Estimateurs d'erreur en quantités d'intérêt », Compte-rendu AMA 06-66

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)