Extrapolation de mesures sur un modèle numérique en dynamique

Résumé :

Une démarche d'extrapolation de résultats de mesures expérimentales en dynamique (déplacements, vitesses, accélérations, déformations, contraintes) sur un modèle numérique est présentée. Basée sur une représentation de la structure sur une base de projection préalablement choisie, elle consiste en la résolution du problème inverse défini par l'identification des coordonnées généralisées relatives à la base de projection. La résolution proposée utilise une minimisation, au sens des moindres carrés, en utilisant la décomposition LU ou la décomposition en valeurs singulières (SVD), d'une fonctionnelle éventuellement régularisée via l'adjonction d'un critère de proximité d'une solution connue a priori. Dans le cas d'une identification temporelle, une formulation explicite de l'information a priori est proposée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Problématique....3
2 Notations....3
3 Démarche d'extrapolation....4
4 Relations entre les grandeurs physiques et les grandeurs généralisées....4
5 Calcul des coordonnées généralisées....5
5.1 Formulation du problème....5
5.2 Détermination d'une quasi-solution....5
5.3 Détermination d'une solution inverse régularisée....6
5.3.1 Principes des méthodes de régularisation....6
5.3.2 Choix de l'information a priori....6
6 Mise en œuvre dans Code_Aster....8
7 Bibliographie....8
8 Description des versions du document....8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problématique

On souhaite estimer numériquement, le comportement en tout point d'une structure à partir des mesures effectuées en quelques points de la structure. Compte tenu des coûts et des contraintes d'accessibilité, les mesures expérimentales sont généralement en nombre limité et situées en des endroits qui ne sont pas forcément les plus sollicités. Ainsi, en dynamique, la connaissance des zones de concentration de contraintes et des valeurs locales de contraintes est cruciale pour vérifier la tenue mécanique du matériel. On est alors amené à extrapoler des résultats de mesures localisées, sur l'ensemble du maillage numérique de la structure.
La démarche d'extrapolation proposée est basée sur une représentation de la structure sur une base de projection judicieusement choisie (modes propres, réponse statique, ...). Elle consiste en la détermination des coordonnées généralisées relatives à cette base de projection. La résolution proposée utilise une minimisation, au sens des moindres carrés, par décomposition en LU ou en valeurs singulières (SVD), d'une fonctionnelle éventuellement régularisée via l'adjonction d'un critère de proximité d'une solution connue a priori. Dans le cas d'une identification temporelle, une formulation explicite de l'information a priori est proposée.

2 Notations

q , $\dot{q}$, $\ddot{q}$: vecteurs des déplacements, vitesses et accélérations dans le repère physique

η , $\dot{\eta}$, $\ddot{\eta}$: vecteurs des déplacements, vitesses et accélérations généralisés

Φ : matrice formée des vecteurs de base de projection (déplacements)

Φ_ϵ : matrice formée des vecteurs de base de projection (déformations)

Φ_σ : matrice formée des vecteurs de base de projection (contraintes)

$\bar{\Phi}$: matrice des vecteurs de base (déplacements), restreinte aux degrés de liberté mesurés

$\bar{\Phi}_\epsilon$: matrice des vecteurs de base (déformations), restreinte aux degrés de liberté mesurés

$\bar{\Phi}_\sigma$: matrice des vecteurs de base (contraintes), restreinte aux degrés de liberté mesurés

I : matrice identité

N_{num} : nombre de vecteurs de base de projection, N_{exp} : nombre de degrés de liberté mesuré

t : variable temps, ω : variable pulsation

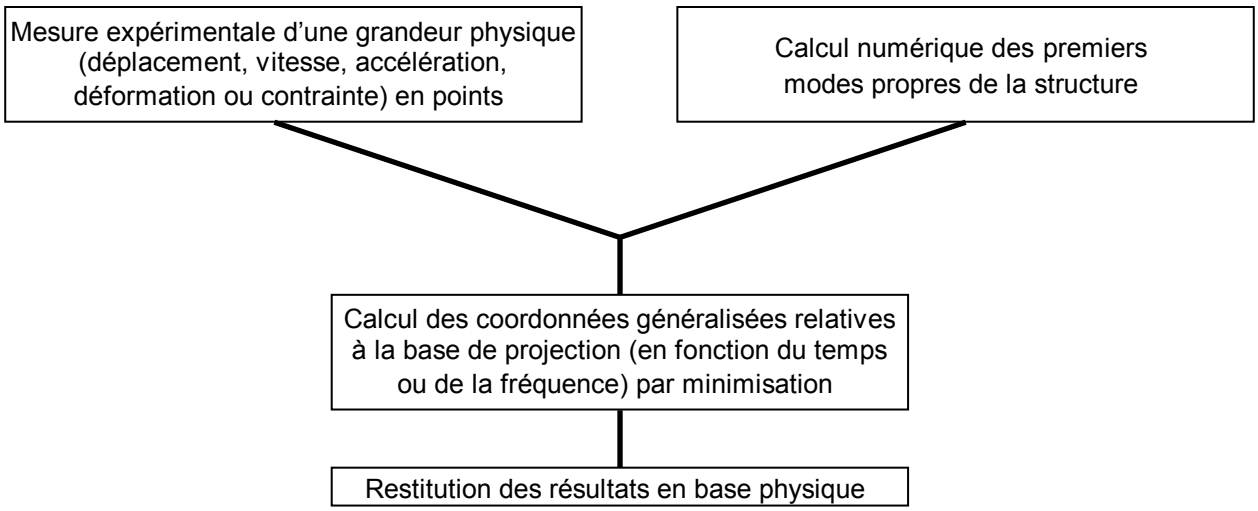
TF : transformée de Fourier, TF^{-1} : transformée de Fourier inverse

A^+ : pseudo-inverse de la matrice A

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Démarche d'extrapolation

La démarche que l'on souhaite mettre en place afin d'extrapoler des résultats de mesures vibratoires sur un modèle numérique se décompose en 4 étapes [bib1] :



Cette démarche s'appuie sur la notion de projection d'un champ dans un espace de dimension inférieure à la dimension de l'espace du modèle numérique et puis extrapolation sur l'espace du modèle numérique. Le fait de projeter le champ dans un espace de dimension réduite engendre nécessairement une perte d'information lors de l'extrapolation. On voit donc ici l'importance du choix de la base de projection. Cette base peut être formée de réponse modale et/ou de réponse statique. On suppose ici que le modèle numérique est linéaire.

4 Relations entre les grandeurs physiques et les grandeurs généralisées

On suppose que le comportement intrinsèque de la structure est représenté dans un espace engendré par les N_{num} vecteurs de base de projection. La transformation de Rayleigh-Ritz établit la relation entre les degrés de liberté de la structure dans le repère physique et ses coordonnées généralisées :

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\,\boldsymbol{\eta}$$

Dans cette formulation, la matrice des vecteurs de base contient toute l'information spatiale ; les coordonnées généralisées, quant à elles, dépendent :

- du temps, dans le cas d'un calcul de réponse temporelle : $\mathbf{q}(M,t) = \mathbf{\Phi}(M)\boldsymbol{\eta}(t)$
- de la pulsation, dans le cas d'un calcul de réponse harmonique : $\mathbf{q}(M,\omega) = \mathbf{\Phi}(M)\boldsymbol{\eta}(\omega)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut donc en déduire très simplement les relations suivantes :

	Réponse harmonique	Réponse temporelle
Déplacement	$\mathbf{q}(M,\omega)=\mathbf{\Phi}(M)\boldsymbol{\eta}(\omega)$	$\mathbf{q}(M,t)=\mathbf{\Phi}(M)\boldsymbol{\eta}(t)$
Vitesse	$\dot{\mathbf{q}}(M,w)=j\boldsymbol{\omega}\,\Phi(M)\boldsymbol{\eta}(\omega)$	$\dot{\mathbf{q}}(M,t)=\mathbf{\Phi}(M)\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)$
Accélération	$\ddot{\mathbf{q}}(M,w)=-\omega^2\mathbf{\Phi}(M)\boldsymbol{\eta}(\omega)$	$\ddot{\mathbf{q}}(M,t)=\mathbf{\Phi}(M)\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t)$
Déformations	$\boldsymbol{\epsilon}(M,\omega)=\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{\epsilon}}(M)\boldsymbol{\eta}(\omega)$	$\boldsymbol{\epsilon}(M,t)=\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{\epsilon}}(M)\boldsymbol{\eta}(t)$
Contraintes	$\boldsymbol{\sigma}(M,\omega)=\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{\sigma}}(M)\boldsymbol{\eta}(\omega)$	$\boldsymbol{\sigma}(M,t)=\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{\sigma}}(M)\boldsymbol{\eta}(t)$

Toutes ces formulations présentent donc une forme équivalente : dans la suite du document, nous traiterons essentiellement le cas du déplacement temporel, mais les résultats obtenus sont transposables à toutes les autres grandeurs : vitesse, accélération, déformation et contrainte.
De même, les relations établies en fonction du temps sont applicables dans le domaine spectral :

$$TF\left(\mathbf{q}(M,t)\right)=\mathbf{\Phi}(M)\,TF\left(\boldsymbol{\eta}(t)\right)=\mathbf{\Phi}(M)\boldsymbol{\eta}(\omega)$$
$$TF^{-1}\left(\mathbf{q}(M,\omega)\right)=\mathbf{\Phi}(M)\,TF^{-1}\left(\boldsymbol{\eta}(\omega)\right)=\mathbf{\Phi}(M)\boldsymbol{\eta}(t)$$

5 Calcul des coordonnées généralisées

5.1 Formulation du problème

Le calcul des coordonnées généralisées η s'effectue sur la matrice des déplacements (respectivement vitesses, accélérations, déformations, contraintes) restreinte aux degrés de liberté mesurés, par résolution du système matriciel :

$$q_{\mathbf{exp}}=\bar{\Phi}\,\eta$$

Les dimensions de la matrice $\bar{\mathbf{\Phi}}$ à « inverser » sont (N_{exp} , N_{num}).

On voit ici que le calcul des coordonnées généralisées est effectué dans un espace restreint : la dimension de l'espace engendré par les vecteurs de base est inférieure à la dimension du modèle numérique, on n'exploite que les informations aux degrés de liberté mesurés.

5.2 Détermination d'une quasi-solution

Pour la résolution du problème inverse, 3 cas peuvent se présenter :

- $N_{exp}=N_{num}$: le nombre de degrés de liberté mesurés est égal au nombre de vecteurs de base de projection dont on souhaite identifier les coordonnées généralisées.
  Dans ce cas, il existe une solution unique au problème d'inversion : $\boldsymbol{\eta}=\bar{\mathbf{\Phi}}^{-1}q_{\mathbf{exp}}$
- $N_{exp}>N_{num}$: le nombre de degrés de liberté mesurés est supérieur au nombre de vecteurs de base de projection du modèle numérique dont on souhaite identifier les coordonnées généralises.
  Dans ce cas, il n'existe pas de solution exacte au problème d'inversion. Une quasi-solution peut cependant être définie, qui minimise la distance : $\left|q_{\mathbf{exp}}-\bar{\mathbf{\Phi}}\,\boldsymbol{\eta}\right|$. La formule $\eta=\left[\,\bar{\mathbf{\Phi}}^T\bar{\mathbf{\Phi}}\,\right]^+\bar{\mathbf{\Phi}}^T q_{\mathbf{exp}}$ fournit alors la solution (unique) au sens des moindres carrés. Dans cette expression, la matrice $\left[\,\bar{\mathbf{\Phi}}^T\bar{\mathbf{\Phi}}\,\right]^+\bar{\mathbf{\Phi}}^T$ désigne la matrice inverse généralisée de $\bar{\mathbf{\Phi}}$.
  Le calcul du pseudo-inverse peut s'effectuer en utilisant la décomposition LU ou bien la décomposition en valeurs singulières (SVD).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $N_{exp} < N_{num}$: le nombre de degrés de liberté mesurés est inférieur au nombre de vecteurs de base de projection dont on souhaite identifier les coordonnées généralisées (ce qui correspond au cas le plus courant).
  Dans ce cas, il existe une infinité de solutions au problème d'inversion et l'objectif est de déterminer une solution acceptable en introduisant une condition supplémentaire (norme minimale de la solution ou application de méthodes dites « de régularisation »).

5.3 Détermination d'une solution inverse régularisée

5.3.1 Principes des méthodes de régularisation

Le but des méthodes de régularisation [bib4], [bib5] est de proposer une solution approchée et stable vis-à-vis des variations des données d'entrée. On ne cherche plus à résoudre l'équation de minimisation résultant de la formulation : $q_{\mathbf{exp}} = \bar{\mathbf{\Phi}}\,\boldsymbol{\eta}$, mais à déterminer une solution approchée (ou régularisée) répondant à deux exigences :

- elle satisfait à une condition de proximité : on cherche $\boldsymbol{\eta}_{\delta}$ tel que $| q_{\mathbf{exp}} - \mathbf{\Phi}_{num}\boldsymbol{\eta}_{\delta} | < \delta$,
- elle répond à une condition supplémentaire dite « information a priori ».

Les méthodes de régularisation consistent donc à compléter l'énoncé du problème en introduisant une information a priori pour extraire, dans la famille des solutions qui sont compatibles avec les données expérimentales, celle qui correspond le mieux au problème. Ceci se fait en fusionnant dans un critère unique une mesure de la fidélité de la solution par rapport aux données expérimentales et une mesure de sa fidélité à l'information a priori [bib2].
Une approche qui peut être aisément mise en œuvre en dimension finie est la régularisation par optimisation. A rapprocher de la méthode de régularisation de Tikhonov [bib3], elle consiste à considérer une solution a priori $\boldsymbol{\eta}_{priori}$ du problème de minimisation et à rechercher la solution du système approché la plus proche de cette solution. On cherche alors à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$| \mathbf{q}_{\mathbf{exp}} - \bar{\mathbf{\Phi}}\,\boldsymbol{\eta} |^2 + a\,| \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_{priori} |^2$$

Le paramètre a détermine le poids affecté à l'information a priori.
La solution de l'équation de minimisation est donnée par :

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\bar{\mathbf{\Phi}}^T \bar{\mathbf{\Phi}} + a\,\mathbf{I} \right]^{-1} \left(\bar{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{q}_{\mathbf{exp}} + a\,\boldsymbol{\eta}_{priori} \right)$$

ou, en faisant apparaître explicitement l'écart par rapport à la solution a priori :

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{priori} + \left[\bar{\mathbf{\Phi}}^T \bar{\mathbf{\Phi}} + a\,\mathbf{I} \right]^{-1} \bar{\mathbf{\Phi}}^T \left(\mathbf{q}_{\mathbf{exp}} - \bar{\mathbf{\Phi}}\,\boldsymbol{\eta}_{priori} \right)$$

Si l'on pose $\boldsymbol{\eta}_{priori} = 0$, cette formulation consiste à rechercher la solution dite de « norme minimale » (ou Tikhonov d'ordre 0).
L'ajout du terme régularisant lié à la matrice $a\,\mathbf{I}$ a pour rôle de décaler le spectre de $\bar{\mathbf{\Phi}}^T \bar{\mathbf{\Phi}}$ afin d'assurer l'étape d'inversion matricielle. Cette démarche de calcul permet donc de mettre en œuvre une procédure de calcul mieux conditionnée, qui adoucit les effets du bruit et qui fournit une solution physiquement acceptable.
Par ailleurs, le choix des valeurs de la matrice $a\,\mathbf{I}$ résulte d'un compromis entre la stabilité de la solution recherchée et la confiance que l'on peut accorder à la solution a priori.

5.3.2 Choix de l'information a priori

Dans le cas des méthodes de régularisation, le choix de l'information a priori constitue une étape-clé qui détermine la représentativité des résultats finaux. Ce choix peut s'appuyer sur une connaissance

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

physique de la solution ou sur une connaissance de son évolution en fonction du paramètre retenu. Nous fournissons, dans la suite, un exemple appliqué à la détermination par minimisation d'une variable temporelle [bib1].
La minimisation d'une variable en fonction du temps peut être réalisée à chaque pas de temps indépendamment du pas de temps précédent. L'introduction d'une information a priori permet cependant d'enrichir la fonctionnelle en supposant une évolution lente des variables déterminées :

$$\eta_{priori}(t)=\eta(t-dt)$$

Cette hypothèse n'est acceptable que lorsque le pas d'échantillonnage est suffisamment faible. En effet, la solution à un instant donné est approchée par (développement de Taylor) :

$$\eta(t)=\eta(t-dt)+dt\,\dot{\eta}(t-dt)+o(dt)$$

La fréquence maximale de réponse de la structure est déterminée par la pulsation du mode d'ordre le plus élevé $\omega_{\max}$ pris dans la modélisation. On a donc :

$$\left|\frac{\eta(t)-\eta(t-dt)}{\eta(t-dt)}\right|<\omega_{\max}dt+|o(dt)|$$

Pour que le terme correctif soit faible (et donc que l'information a priori constitue une approximation au premier ordre de la solution recherchée), le pas d'échantillonnage doit vérifier :

$$dt<<\frac{1}{\omega_{\max}}$$

A l'instant initial (t=0), étant donné que l'on ne dispose d'aucune information sur la solution a priori, le calcul est réalisé en recherchant la solution de norme minimale. Afin d'éviter de propager l'erreur qui en résulte, il peut être nécessaire d'affecter une faible confiance aux informations a priori sur les premiers pas de temps (par l'intermédiaire du paramètre α) et de n'exploiter les résultats qu'à partir de l'instant où l'on peut considérer que les erreurs se sont suffisamment atténuées. Le cas échéant, des études complémentaires seront menées afin de déterminer les paramètres optimaux d'utilisation de la fonctionnalité développée dans *Code_Aster*.

Dans le domaine fréquentiel, de nombreuses possibilités sont offertes pour déterminer l'information a priori. Elles s'appuient soit sur une connaissance physique de la solution (mise en évidence expérimentale de résonances ou de réponses forcées), soit sur une formulation des déplacements généralisés en fonction de la fréquence (type : fonctions gain), auquel cas la minimisation conduit finalement à caractériser les sollicitations dynamiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Mise en œuvre dans *Code_Aster*

La base de projection est constituée soit des modes dynamiques calculés par la commande CALC_MODES [U4.52.02] stockés dans un concept de type mode_meca, soit des modes dynamiques et des modes statiques calculés par la commande DEFI_BASE_MODALE [U4.64.02] stockés dans un concept de type base_modale.
La phase de calcul des coordonnées généralisées est traitée par la commande PROJ_MESU_MODAL [U4.73.01]. Les données y sont regroupées sous 4 mots-clés facteurs.
Les données relatives au modèle numérique (base de projection) sont regroupées sous le mot-clé facteur MODELE_CALCUL. On y précise le modèle numérique et la base de projection.
Les données relatives aux mesures sont regroupées sous le mot-clé facteur MODELE_MESURE. On y précise notamment le modèle associé à la structure et la mesure lue par la commande LIRE_RESU.
L'association spatiale manuelle éventuelle des noeuds est donnée sous le mot-clé facteur CORR_MANU.
Les données concernant la résolution du problème inverse sont regroupées sous le mot-clé facteur RESOLUTION. On y précise la méthode de décomposition employée (LU, SVD) et la prise en compte de terme de régularisation.
La restitution des résultats en base physique peut ensuite être effectuée par la commande REST_GENE_PHYS [U4.63.31].

7 Bibliographie

1) C. VARE : Extrapolation de résultats de mesures expérimentales sur un modèle numérique en dynamique. Spécification des développements dans *Code_Aster*. Note EDF/DER HP-54/98/063/B

2) S. AUDEBERT : Evaluation comparative de différentes méthodes d'inversion. Note EDF/DER HP-62/93/036

3) A. TIKHONOV, V. ARSENINE : Méthodes de résolution de problèmes mal posés. Ed. Mir - 1976

4) M. BONNET : Traitement numérique de problèmes inverses de source en acoustique linéaire. Contrat EDF - Convention P55L08/1E5240

5) A. TARANTOLA : Inverse problem theory - Methods for data fitting and model parameter estimation. Elsevier – 1987

8 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
5		Texte initial
6,4	*S. AUDEBERT, H. ANDRIAMBOLOLONA* EDF-R&D/AMA	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)