Critères de stabilité mécanique

Résumé :

Ce document présente les différents critères de stabilité mécanique disponibles dans *Code_Aster*. On peut les classer suivant deux catégories :

- Le critère de stabilité associé aux systèmes conservatifs, qui se présente comme la généralisation du critère d'Euler basé sur l'analyse de la matrice de raideur globale réactualisée.
- Le critère de stabilité associé aux systèmes dissipatifs, qui doit tenir compte des contraintes d'irréversibilité liées à la dissipation d'énergie.

Ces critères sont utilisés pour distinguer dans les problèmes quasistatiques, les solutions numériques instables issues du calcul d'équilibre effectué dans la méthode des éléments finis (dérivée première de l'énergie nulle mais dérivée seconde négative) des solutions physiques, stables, pour lesquelles la dérivée seconde de l'énergie est positive.

Les critères présentés dans ce document sont directement transposables au cadre de la dynamique, mais comme ils ne tiennent pas compte ni de la matrice de masse ni de celle d'amortissement, on ne peut parler de critère de stabilité dynamique au sens classique (par exemple, d'amortissement devenant négatif ou nul).

Ces critères sont appelés au sein des opérateurs STAT_NON_LINE et DYNA_NON_LINE, pour pouvoir être évalués à chaque pas de la résolution incrémentale quasi-statique ou transitoire dynamique non linéaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Stabilité d'un système conservatif....3
1.1 Définition de la stabilité d'un système conservatif....3
1.2 Notion générale de flambage....3
1.3 Écriture du problème mécanique....5
1.4 Étude de stabilité....6
1.4.1 Écriture du problème non linéaire géométrique élastique....7
1.4.2 Étude de stabilité en non linéaire géométrique....9
1.4.2.1 Condition de stabilité d'un équilibre élastique non linéaire....10
1.4.2.2 Cas des petits déplacements : charge d'Euler....11
1.4.2.3 Cas particulier des forces imposées dépendant de la géométrie....11
1.4.2.4 Vibrations sous précontrainte....12
1.5 Implémentation dans le code....13
1.6 Critère d'Euler....13
1.7 Critère non linéaire....14
1.7.1 Impact sur l'opérateur STAT_NON_LINE....14
1.7.1.1 Algorithme de STAT_NON_LINE....14
1.7.1.2 Impact sur la structure de donnée résultat de STAT_NON_LINE....16
1.7.2 Particularités liées au tenseur de déformation....17
1.7.2.1 En déformations linéarisées : PETIT et PETIT_REAC....18
1.7.2.2 En grands déplacements : GROT_GDEP et SIMO_MIEHE....18
1.7.2.3 Cas des modélisations mixtes....19
1.7.3 Amélioration des performances du critère....19
1.8 Généralisation à la dynamique....20
1.9 Validation des développements....20
1.10 Extension du critère de flambement au traitement du comportement élastoplastique..21
1.11 Conclusion....23
2 Stabilité d'un système dissipatif....23
2.1 Définition de la stabilité d'un système dissipatif....23
2.2 Écriture dans le cadre de la méthode des éléments finis....24
2.3 Algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités....24
2.4 Implémentation dans le code....25
2.5 Exemple d'application : Cas de la barre en traction uniforme....26
2.5.1 Résultats analytiques de stabilité....26
2.5.2 Résultats de stabilité obtenus avec Code_Aster....26
2.6 Conclusion....27
3 Bibliographie....28
4 Description des versions du document....29

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Stabilité d'un système conservatif

1.1 Définition de la stabilité d'un système conservatif

La position d'équilibre d'un système conservatif est dite stable si elle est invariante sous l'effet de petites perturbations. Ce qui revient à vérifier que la solution obtenue se situe bien sur un minimum local de l'énergie potentielle ou dit autrement, à vérifier que la fonctionnelle de Hill [bib19] est conevexe. Mathématiquement, cela se traduit par la vérification de la positivité de la dérivée seconde de l'énergie potentielle **Φ** au point d'équilibre **u**. Considérons une petite perturbation de l'état d'équilibre v, respectant les conditions aux limites imposées sur la structure. On doit toujours retrouver l'inégalité :

$$\Phi(u) \leq \Phi(u+v) \qquad \text{éq 1.1-1}$$

La principale cause de perte de stabilité pour une structure mécanique conservative est le flambement. On s'intéresse donc plus particulièrement dans la suite à cette notion.

Remarque : Il existe d'autres définitions de la stabilité. On retrouve notamment la stabilité au sens de Rice, critère définit en 1975, qui revient à vérifier la stricte positivité des valeurs propres du tenseur acoustique. Toutefois, on peut avoir instabilité au sens de Hill avant instabilité au sens de Rice. Le critère au sens de Hill est donc plus conservatif. C'est pourquoi c'est celui que l'on privilégie.

1.2 Notion générale de flambage

Le flambage est un phénomène d'instabilité [bib6]. Son apparition peut être observée en particulier sur des éléments élancés de faible raideur de flexion. Au-delà d'un certain niveau de chargement, la structure subit un important changement de configuration (qui peut se manifester par apparition soudaine d'ondulations, par exemple). On distingue deux types de flambage : le flambage par bifurcation et le flambage par point limite ([bib1], [bib7], [bib8]). Pour décrire le comportement de ces deux types de flambage, on considère une structure dont le paramètre μ est caractéristique du chargement et dont le paramètre δ est caractéristique du déplacement.

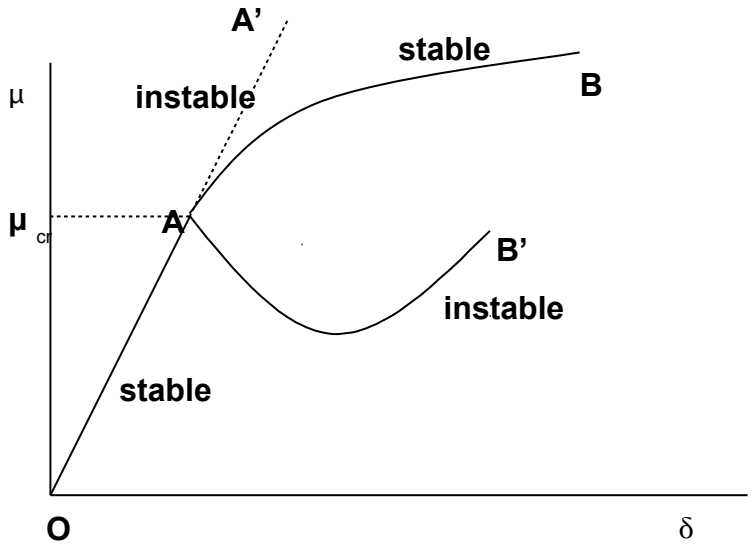


Figure 1.2-a : Flambage par bifurcation

Entre le point O et le point A, la structure admet une seule famille de courbe (μ, δ). Il peut, par exemple s'agir de l'élasticité linéaire classique ou de l'élastoplasticité, où si le problème est bien posé (*cf.* [§1.3]), on a le résultat classique d'existence et d'unicité de la solution. Par contre, au-delà du point

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A , plusieurs familles de courbes sont solutions du problème d'équilibre. Cette perte d'unicité s'accompagne d'une instabilité de la branche initiale (dite fondamentale). La branche secondaire peut être stable (courbe AB) ou instable (courbe AB'). La charge au-delà de laquelle il y a bifurcation s'appelle la charge critique μ_{cr} . Le flambage par bifurcation se caractérise par le fait que le mode (ou direction de flambement), qui initie la branche secondaire, n'engendre pas de travail supplémentaire dans le chargement appliqué : le mode de flambement lui étant orthogonal.

Un exemple de flambement par bifurcation avec instabilité de la branche secondaire se trouve dans le cas d'une coque cylindrique circulaire sous compression axiale [bib10]. Des exemples de flambement par bifurcation avec stabilité de la branche secondaire se trouvent dans des poutres élastiques en compression axiale, des anneaux circulaires en compression radiale et des plaques rectangulaires en compression longitudinale.

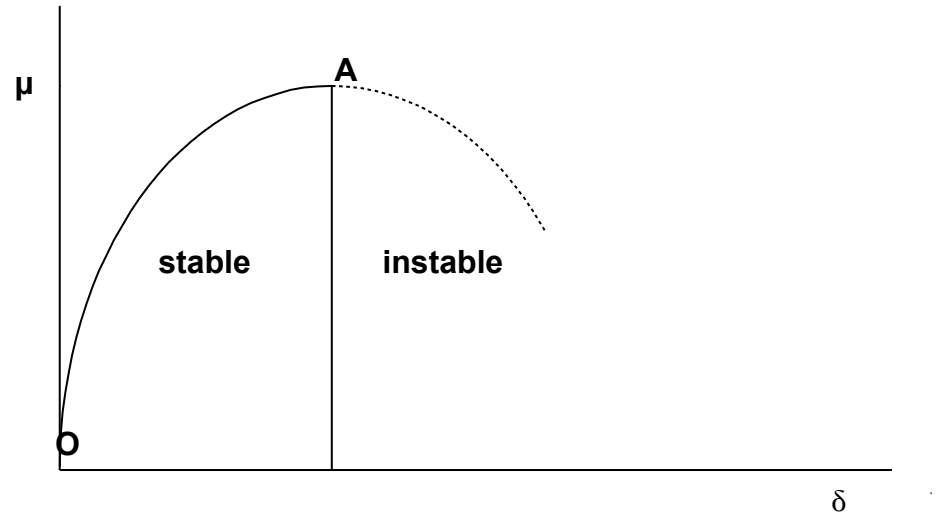


Figure 1.2-b : Flambage par point limite

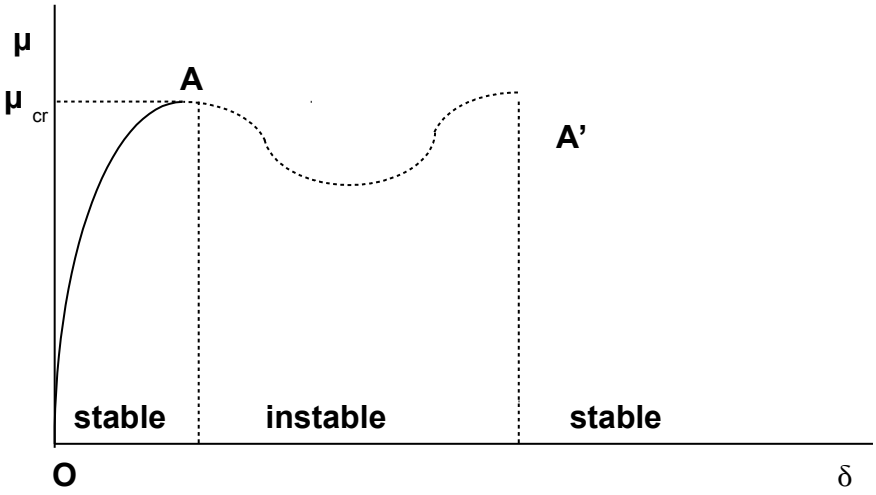


Figure 1.2-c : Flambage par point limite avec claquage

Sur les figures [Figure 1.2-b] et [Figure 1.2-c], qui illustrent le flambage par point limite, la structure n'admet qu'une seule famille (μ, δ) de solution des équations d'équilibre. Au point A , il y a perte de stabilité de la solution avec perte totale de rigidité dans le cas de la figure [Figure 1.2-b] et avec un

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

phénomène de claquage dans le cas de la figure [Figure 1.2-c] (la solution redevient stable après une discontinuité de déplacement ; cas d'une calotte sphérique sous pression externe). Le point A est alors appelé point limite. Le problème revient donc dans tous les cas à chercher la charge à partir de laquelle la branche fondamentale d'équilibre devient instable ou de stabilité incertaine. Cela mobilise généralement les grands déplacements. On peut enfin avoir le cas de la ruine par écoulement plastique qui s'apparente au point limite [Figure 1.2-b].

Code_Aster permet la recherche des modes de flambement linéaire, qualifiée de méthode d'Euler. Il suffit de résoudre un problème généralisé aux valeurs propres (grâce à l'opérateur CALC_MODES avec le mot clé TYPE_RESU='MODE_FLAMB'). Les deux matrices arguments du problème généralisé sont la matrice de rigidité et la matrice de rigidité géométrique, issues d'un calcul préalable élastique linéaire (opérateur MECA_STATIQUE).

Dans tous les cas où l'on ne peut négliger les non linéarités, qu'elles soient géométriques ou comportementales, l'approche Euler n'est plus valide.

Nous proposons donc un critère *ad hoc*, que l'on peut considérer comme une généralisation du critère d'Euler sur configuration réactualisée. Ce critère se construit sur la matrice de raideur tangente assemblée, qui est calculée dans l'algorithme de type Newton pour résoudre les problèmes quasi-statiques non linéaires (opérateur STAT_NON_LINE) ou dynamiques transitoires non linéaires (opérateur DYNA_NON_LINE). Ce critère, en non linéaire, permet de traiter rigoureusement les relations de comportement élastiques non linéaires. En revanche, les lois qui présentent un aspect dissipatif ne sont traitées rigoureusement que si le chargement, en tout point de la structure, suit une évolution monotone (cela correspond à l'hypothèse de Hill [bib4]).

1.3 Écriture du problème mécanique

Ce chapitre a pour objectif d'introduire le formalisme général de calcul de structure adapté au problème mécanique non linéaire que nous souhaitons aborder.
Pour commencer, nous allons donc brièvement rappeler la mise en équation d'un problème type de calcul de structure. Pour simplifier, nous nous plaçons, tout du moins au début, dans le cadre des petites perturbations.

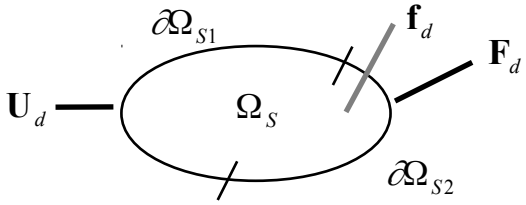


Figure 1.3-a : Représentation d'un problème de calcul de structure

La structure Ω_S est soumise à des efforts volumiques imposés $\mathbf{f}_d$, des efforts surfaciques $\mathbf{F}_d$ sur le bord $\partial\Omega_{S2}$ et des déplacements imposés $\mathbf{U}_d$ sur le reste du bord de Ω_S, noté $\partial\Omega_{S1}$.
Les inconnues du problème de référence sur le solide sont le champ de déplacement $\mathbf{u}$ et le champ de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

La solution ($\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$) du problème de structure où les effets thermiques sont négligés se définit comme :

Trouver $(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})\in\mathbf{H_1}(\Omega_S)\times\mathbf{L}^2(\Omega_S)$ qui vérifie :

- Équations de liaisons :

$$\mathbf{u}\,|_{\partial\Omega_{S1}}=\mathbf{U_d} \qquad \text{éq 1.3-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Relation de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{ avec } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ qui est le tenseur de déformation} \quad \text{éq 1.3-2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \text{ en hypothèse de petites perturbations} \quad \text{éq 1.3-3}$$

Si on suppose un comportement élastique linéaire

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{éq 1.3-4}$$

- Équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \rho\, \boldsymbol{\gamma} = \nabla . \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d \quad \text{avec } \boldsymbol{\gamma} = \dfrac{\mathrm{d}^2 \mathbf{u}}{\mathrm{d}\, t^2} \\ \boldsymbol{\sigma} . \mathbf{n}\,|_{\partial \Omega_{S2}} = \mathbf{F_d} \end{cases} \quad \text{éq 1.3-5}$$

1.4 Étude de stabilité

L'objet de ce chapitre est de présenter les méthodes permettant de déterminer la stabilité de l'équilibre quasi-statique non linéaire d'une structure dans un système conservatif. Pour commencer, nous nous intéressons uniquement à la détection d'instabilité, ou plus exactement à la perte d'unicité de la solution [bib6]. Parmi les travaux de synthèse récents, on peut citer [bib9] ou [bib7] et [bib8] qui présentent des papiers très complets sur l'analyse de stabilité non linéaire des structures.
Le calcul de la solution post-critique ne sera pas abordé.

Pour faire l'analyse de stabilité, nous introduisons une configuration initiale de référence Ω_{S0}, une configuration actuelle Ω_S et une configuration perturbée Ω_{S1} :

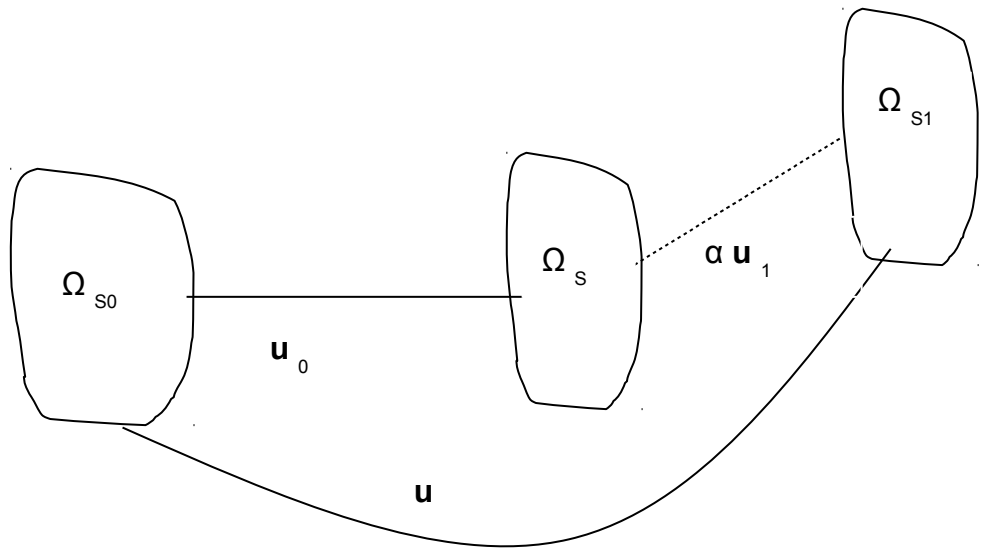


Figure 1.4-a : Définition des différentes configurations

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Soit $\mathbf{u}$ le champ de déplacement des points de la structure. Le comportement est supposé, pour le moment, linéaire élastique isotrope. La structure soumise aux déplacements et efforts imposés va se déformer et devenir la structure repérée par la configuration actuelle Ω_S. Nous cherchons à déterminer un état d'équilibre caractérisé par le champ de déplacement entre la configuration initiale Ω_{S0} et la configuration courante Ω_S, ainsi qu'un champ de contrainte de Cauchy, noté $\boldsymbol{\sigma}$, ou de Piola-Kirchhoff II, noté $\boldsymbol{\pi}$:

$$\boldsymbol{\pi} = \det \mathbf{F} \,.\, \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{I}} \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} : \text{tenseur gradient de la transformation} \\ \det \mathbf{F} = \dfrac{\rho_0}{\rho} \\ \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{I}} : \text{tenseur de Piola - Kirchhoff I} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\pi} = \frac{\rho_0}{\rho} \,.\, \mathbf{F}^{-1} \,.\, \boldsymbol{\sigma} \,.\, \mathbf{F}^{-T}$$

éq 1.4-1

Dans cette expression, on voit apparaître le rapport entre la masse volumique initiale ρ_0 et la masse volumique courante ρ .
L'étape suivante est la prédiction de la stabilité de cet équilibre.

Dans ce but, nous allons chercher un critère permettant de déterminer s'il existe un seul champ de déplacement équilibrant les efforts appliqués. Nous supposerons que les efforts augmentent progressivement et nous allons chercher à trouver à partir de quel moment il existe deux configurations Ω_S et Ω_{S1} qui respectent les équations du problème : nous cherchons un point de bifurcation, c'est-à-dire une perte d'unicité de la solution. Cet instant sera qualifié d'instant de flambage.

1.4.1 Écriture du problème non linéaire géométrique élastique

La solution $\mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}$ du problème de structure sans effets thermiques vérifie ([bib1], [bib7], [bib2]) :

- Équations de liaisons :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega_{s0}} = \mathbf{U_d} \qquad \text{éq 1.4.1-1}$$

- Relation de comportement élastique :

$$\boldsymbol{\pi} = \varphi_{,\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) \qquad \text{éq 1.4.1-2}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui est le tenseur de déformation. Si on suppose un comportement élastique linéaire :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{éq 1.4.1-3}$$

- Équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \rho \underline{\gamma} = \nabla \,.\, \boldsymbol{\pi} + \mathbf{f}_d \quad \text{avec } \boldsymbol{\gamma} = \dfrac{\mathrm{d}^2 \mathbf{u}}{\mathrm{d}\, t^2} \\ \mathbf{F} \,.\, \boldsymbol{\pi} \,.\, \mathbf{n_0}|_{\partial\Omega_{s0}} = \mathbf{F}_d \end{cases} \qquad \text{éq 1.4.1-4}$$

Le tenseur de déformation associé est celui de Green-Lagrange (référencé à la configuration initiale) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \text{avec } \mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \qquad \text{éq 1.4.1-5}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec : $\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^{T}\mathbf{u}) : \text{partie linéaire} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \nabla^{T}\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} : \text{partie quadratique} \end{cases}$ éq 1.4.1-6

Nous pouvons maintenant écrire le Principe des Puissances Virtuelles en élasticité non linéaire géométrique et en quasi-statique :

$$p^{intal\,\mathrm{int}} - p^{ext} = 0, \forall \mathbf{u}^{*} \text{ C A } 0$$

Avec : $\begin{cases} \mathrm{p}^{\mathrm{int}} = \int_{\Omega_{S0}} Tr(\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{*})\,d\Omega = \int_{\Omega_{S0}} Tr\left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u})\right)\mathbf{C}(\varepsilon^{L}(\mathbf{u}^{*}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u}^{*}))\right] d\Omega \\ \mathrm{p}^{\mathrm{ext}} = \int_{\partial\Omega_{S0}} \mathbf{F}_{d}.\mathbf{u}^{*}\,dS + \int_{\Omega_{S0}} \mathbf{f}_{d}.\mathbf{u}^{*}\,d\Omega \end{cases}$

éq 1.4.1-7

En vue d'obtenir une formulation discrétisée, on peut réécrire le tenseur de déformation :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \left[\mathbf{B}^{\mathbf{L}} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{u})\right].\mathbf{u} \\ \boldsymbol{\pi} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ avec } \boldsymbol{\pi} \text{ qui est le tenseur de Piola - Kirchhoff II} \end{cases}$$

éq 1.4.1-8

La puissance des efforts internes devient :

$$\mathbf{P}^{int} = \int_{\Omega_{SO}} Tr\left[\pi.[\mathbf{B}^{\mathbf{L}} + \mathbf{B}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{u})]^{T}\mathbf{u}^{*}\right] d\Omega$$

éq 1.4.1-9

En tenant compte de la relation de comportement [éq 1.4.1-3] :

$$\mathbf{P}^{int} = \int_{\Omega_{S0}} Tr\left[\left[\mathbf{B}^{\mathbf{L}} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{u})\right]^{T}\mathbf{C}[\mathbf{B}^{\mathbf{L}} + \mathbf{B}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{u})]\mathbf{u}.\mathbf{u}^{*}\right] d\Omega$$

éq 1.4.1-10

Après discrétisation par les éléments finis, on peut mettre cette équation sous forme matricielle :

$$\mathbf{u}^{*}.[\mathbf{K_0} + \mathbf{K}^{\mathbf{L}}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{u})].\mathbf{u} = \mathbf{P}^{\mathbf{ext}}$$

éq 1.4.1-11

La matrice $\mathbf{K}^{\mathbf{L}}$ est symétrique et on a les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{K_0} = \int_{\Omega_{S0}} \mathbf{B}^{L^{T}}\mathbf{C}\mathbf{B}^{L}\,d\Omega \\ \mathbf{K}^{L} = \int_{\Omega_{S0}} \left[\frac{1}{2}\mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u})^{T}\mathbf{C}\mathbf{B}^{L} + \mathbf{B}^{L^{T}}\mathbf{C}\mathbf{B}^{L}(\mathbf{u})\right] d\Omega \\ \mathbf{K}^{Q} = \frac{1}{2}\int_{\Omega_{S0}} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u})^{T}\mathbf{C}\mathbf{B}^{NL}\,d\Omega \end{cases}$$

éq 1.4.1-12

On obtient directement de ce qui précède l'écriture sous forme matricielle de l'équilibre :

$$[\mathbf{K_0} + \mathbf{K}^{\mathbf{L}}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{u})].\mathbf{u} = \mathbf{F}^{\mathbf{ext}}$$

éq 1.4.1-13

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Soit encore, de manière équivalente :

$$\mathbf{F}^{int}=\mathbf{F}^{\mathbf{ext}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}^{int}=\int_{\Omega_{S0}} [\mathbf{B}^{\mathbf{L}}+\mathbf{B}^{\mathbf{NL}}(\mathbf{u})]^t \boldsymbol{\pi}\, d\,OMEGA \qquad \text{éq 1.4.1-14}$$

Nous pouvons tout aussi bien formuler le Principe des Puissances Virtuelles à partir de l'état de contrainte de Cauchy et du tenseur de déformation d'Almansi (donc sur la configuration courante). On obtient alors :

$$\int_{\Omega_S} Tr(\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*))\,d\,\Omega=\int_{\partial\Omega_S} \mathbf{F}_d.\mathbf{u}^*\,dS+\int_{\Omega_S} \mathbf{f}_d.\mathbf{u}^*\,d\,\Omega \qquad \text{éq 1.4.1-15}$$

Que l'on peut aussi mettre sous la forme suivante, après discrétisation :

$$\int_{\Omega_S} \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\sigma}\,d\,\Omega=\mathbf{F}^{\text{int}}=\mathbf{F}^{ext} \qquad \text{éq 1.4.1-16}$$

Soit encore, en supposant la relation de comportement élastique :

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}=\mathbf{F}^{ext} \quad \text{avec}\, \mathbf{K}=\int_{\Omega_S} \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\,\mathbf{B}\,d\,\Omega \qquad \text{éq 1.4.1-17}$$

Les intégrales de ces équations sont calculées sur le volume courant Ω_S qui dépend, bien entendu, du champ de déplacement solution $\mathbf{u}$. De même, l'opérateur $\mathbf{B}$ doit être calculé sur la configuration actuelle Ω_S et non sur la configuration initiale Ω_{S0}, comme c'était le cas précédemment.

1.4.2 Étude de stabilité en non linéaire géométrique

On va chercher s'il existe un deuxième champ de déplacement cinématiquement admissible qui vérifie les équations d'équilibre : on cherche donc à savoir si on aura bifurcation.

Ce deuxième champ sera écrit comme la somme d'une perturbation ajoutée à la première solution, soit : $\mathbf{u}=\alpha\,\mathbf{u_1}$, avec α qui est un réel très petit et que l'on va faire tendre vers 0. Le champ $\mathbf{u_1}$ est choisi cinématiquement admissible à 0.

Le Principe des Puissances Virtuelles sera ensuite écrit pour ce nouveau champ.

Le champ de déformation se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}+\alpha\,\mathbf{u_1})=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})+\alpha\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u_1})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u_1},\mathbf{u}))\right]+\frac{\alpha^2}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{q}(\mathbf{u_1},\mathbf{u_1}) \qquad \text{éq 1.4.2-1}$$

Les déformations virtuelles sont données par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^*=\boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u}^*)+\boldsymbol{\varepsilon}^{q}(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)+\alpha\,\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u_1},\mathbf{u}^*)=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)+\alpha\,\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u_1},\mathbf{u}) \qquad \text{éq 1.4.2-2}$$

De même, si nous choisissons Ω_{S0} comme configuration de référence, les contraintes deviennent :

$$\boldsymbol{\pi}_1=\boldsymbol{\pi}+\alpha\mathbf{C}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u_1})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u_1})+\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u_1},\mathbf{u}))\right]+\frac{\alpha^2}{2}\mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u_1},\mathbf{u_1}) \qquad \text{éq 1.4.2-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Nous pouvons maintenant exprimer le Principe des Puissances Virtuelles pour le champ de déplacement perturbé. Prenons comme hypothèses que les forces imposées ne dépendent pas du déplacement et que la configuration initiale est choisie comme référence.

$$\begin{cases} P_1^{int} = P^{int} \\ +\alpha\left[\int_{\Omega_{S0}} Tr\left(\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}^*)\right)d\Omega + \int_{\Omega_{S0}} Tr\left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u}_1)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u}_1)+\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}))\right)\right]d\Omega\right]+o(\alpha) \\ P_1^{ext} = P^{ext} \\ P_1^{int} - P_1^{ext} = 0 \end{cases}$$

éq 1.4.2-4

Pour α suffisamment petit, il suffira que le terme proportionnel à α dans l'expression [éq 1.4.2-4] soit nul pour que le Principe des Puissances Virtuelles soit vérifié pour le champ $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}_1$. Dans ce cas, il n'y aura donc plus unicité de la solution, ce qui traduira la perte de stabilité du système.

Lorsque les efforts imposés ne dépendent pas de la configuration géométrique, l'étude de stabilité s'énonce donc comme :

Connaissant l'état actuel, i.e. le champ de déplacement $\mathbf{u}$ cinématiquement admissible et le champ de contrainte $\boldsymbol{\pi}$, s'il existe un champ de déplacement $\mathbf{u}_1$ cinématiquement admissible à 0 et tel que, pour tout déplacement $\mathbf{u}^*$ cinématiquement admissible à 0, on ait :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{S0}} Tr(\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}^*))\,d\Omega \\ &+\int_{\Omega_{S0}} Tr\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u}^*)\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{L}(\mathbf{u}_1)+\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)\mathbf{C}\varepsilon^{L}(\mathbf{u}_1)+\varepsilon^{L}(\mathbf{u}^*)\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u}_1)+\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u}_1)\right]d\Omega \\ &=0 \end{aligned}$$

éq 1.4.2-5

Alors le problème considéré est instable.

On peut exprimer cette condition de bifurcation sous forme matricielle en introduisant, de plus, la matrice de raideur géométrique $\mathbf{K}(\boldsymbol{\pi})$ qui en discrétise le premier terme :

$$\forall\,\mathbf{u}^*\,\mathrm{CA}\,0,\mathbf{u}^{*T}\mathbf{K}_t\mathbf{u}_1=0$$
$$\text{Avec}\quad \mathbf{K}_T=\mathbf{K}_0+\mathbf{K}^{L}(\mathbf{u})+\mathbf{K}^{Q}(\mathbf{u})+\mathbf{K}(\boldsymbol{\pi})\ \text{ qui est la raideur tangente}$$

éq 1.4.2-6

Si l'on écrit la condition de bifurcation sur la configuration courante Ω_S, alors on a :

$$\forall\,\mathbf{u}^*\,\mathrm{CA}\,0,\mathbf{u}^{*T}[\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\sigma})]\mathbf{u}_1=0$$

éq 1.4.2-7

La contrainte à considérer est alors la contrainte de Cauchy et toutes les intégrales sont évaluées sur le domaine courant Ω_S.

1.4.2.1 Condition de stabilité d'un équilibre élastique non linéaire

Il vient immédiatement, que s'il existe un état tel que la matrice tangente $\mathbf{K}_\mathbf{T}$ définie ci-dessus soit singulière, nous aurons bien exhibé un champ de déplacement $\mathbf{u}_1$ non nul qui démontre la perte d'unicité de la solution du problème mécanique. Ce champ de déplacement est le mode de flambage. On peut remarquer que la condition de bifurcation est bien vérifiée, quels que soient la norme et le

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

signe de $\mathbf{u}_1$: en ce sens, on parle donc de mode de flambage, comme d'une direction, car on s'est limité dans [éq 1.4.2-4] au premier ordre en α .

1.4.2.2 Cas des petits déplacements : charge d'Euler

Lorsque les déplacements peuvent être qualifiés de petits avant flambage, on peut confondre la configuration initiale avec la géométrie courante. Les matrices $\mathbf{K}^L$ et $\mathbf{K}^Q$ peuvent alors être négligées. De plus, la contrainte $\boldsymbol{\pi}$ peut être confondue avec la contrainte usuelle $\boldsymbol{\sigma}$; les équations de flambage s'écrivent alors :

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})]\mathbf{u}_1 = 0 \qquad \text{éq 1.4.2.2-1}$$

Il convient de remarquer que la matrice $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$ est proportionnelle à $\boldsymbol{\sigma}$ et donc au chargement appliqué à la structure. Si on multiplie la contrainte par λ , on obtient :

$$\left[\mathbf{K}_0 + \lambda\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})\right]\mathbf{u}_1 = 0 \qquad \text{éq 1.4.2.2-2}$$

Cette équation fait immédiatement penser à un problème généralisé aux valeurs propres, du même type que dans le cas de la recherche des modes de vibration, qui s'écrit :

$$[\mathbf{K}_0 - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{v}_1 = 0 \qquad \text{éq 1.4.2.2-3}$$

La matrice $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$ est remplacée par la matrice de masse M , et l'on voit apparaître la pulsation propre ω , alors que $\mathbf{v}_1$ est le mode de vibration associé.

Si l'on souhaite étudier le flambement sous un chargement dont seule une partie est pilotée (partie variable du chargement), par un principe de superposition, la contribution, constante, du chargement non pilotée doit être additionnée au terme $\mathbf{K}_0$ et seule la contrainte générée par le chargement piloté sera dans le terme en λ . Formellement, on pose donc le problème suivant :

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}_{cte}) + \lambda\,\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}_{var})]\,\mathbf{u}_1$$

$$\text{Avec :} \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{cte} : \text{contrainte générée par le chargement non piloté} \\ \boldsymbol{\sigma}_{var} : \text{contrainte générée par le chargement piloté} \end{cases} \qquad \text{éq 1.4.2.2-4}$$

Les deux champs de contraintes sont obtenus par résolution de deux problèmes linéaires, l'un pour le chargement non piloté, l'autre pour la partie pilotée du chargement total (*cf.* [U2.08.04] et [bib17]).

1.4.2.3 Cas particulier des forces imposées dépendant de la géométrie

Exemple des pressions suiveuses :
Lorsque les forces extérieures dépendent de la configuration, cela entraîne que le travail des forces extérieures intervient dans la condition de stabilité. Prenons l'exemple d'une pression appliquée sur la structure. Cette pression sera supposée constante pendant le flambement : autrement dit, la valeur de pression ne change pas pendant le déplacement.
Cette hypothèse correspond à deux types de problèmes réels. Le premier type est celui où le volume du fluide imposant la pression sur la structure est très grand devant les variations de volume engendrées par le déplacement du solide. Les problèmes de réservoirs sous pression interne, où les déplacements de parois sont non négligeables par rapport aux dimensions de la structure elle-même, ne rentrent donc pas dans ce cadre.
Le deuxième cas correspond à l'existence d'une source de fluide qui permet de maintenir la pression à une valeur constante. Il n'est alors plus nécessaire de se soucier de l'amplitude du déplacement du solide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La valeur de pression étant prise fixe, la variation de la normale au cours du temps est à prendre en compte. Cette variation est due au champ de déplacement qui modifie la surface de la structure. De même, si on raisonne en termes de résultante et donc d'intégrale, l'élément de surface peut aussi changer d'aire. Par conséquent, la résultante des forces de pression va varier et il convient d'en tenir compte.

Il est cependant difficile d'exhiber l'existence d'un potentiel. C'est pourquoi on se ramène au cas conservatif.

Nous voyons rapidement que la puissance des efforts, exprimée sur la configuration actuelle, associée à une pression est donnée par l'équation suivante (voir par exemple [bib11]) :

$$\mathrm{P}^{ext}_{pression} = \int_{\partial\Omega_{SP}} p\left[\mathbf{n} + \alpha \frac{dS_1}{dS}\mathbf{n_1}\right].\mathbf{u}^* dS \qquad \text{éq 1.4.2.3-1}$$

Dans cette équation, nous remarquons que la puissance des efforts extérieurs est modifiée dans le déplacement $\alpha\,\mathbf{u_1}$. Nous aurons alors :

$$\mathrm{P}^{ext}_1 = \mathrm{P}^{ext} + \int_{\partial\Omega_{SP}} p\,\alpha\,\mathbf{n_1}.\mathbf{u}^* dS_1 \qquad \text{éq 1.4.2.3-2}$$

Finalement, la matrice $\mathbf{K}_\mathrm{T}$ est enrichie d'un terme supplémentaire, fonction de la pression :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^L(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^Q(\mathbf{u}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\pi}) + \mathbf{K}(p) \qquad \text{éq 1.4.2.3-3}$$

Si on écrit les opérateurs sur la géométrie actuelle, on aboutit à :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{K}(p) \qquad \text{éq 1.4.2.3-4}$$

Lorsque nous serons en présence de forces suiveuses de pression, les mêmes méthodes que celles présentées précédemment pourront s'appliquer pour calculer les charges de flambage : il suffira de compléter la matrice $\mathbf{K}_\mathrm{T}$ avec le nouveau terme $\mathbf{K}(p)$. On peut montrer que la matrice $\mathbf{K}(p)$ est symétrique si les forces de pression ne travaillent pas sur le « bord » du modèle.

1.4.2.4 Vibrations sous précontrainte

La même méthodologie peut aussi s'appliquer à l'étude des vibrations de la structure dans la configuration courante Ω_S. Cette structure est précontrainte et déformée. Il suffit d'écrire le Principe des Puissances Virtuelles non linéaire géométrique [éq 1.4.1-7] en tenant compte des effets d'inertie et en y injectant l'hypothèse que les déplacements sont des fonctions périodiques du type :

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 \sin(\omega t) \qquad \text{éq 1.4.2.4-1}$$

Il en découle :

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^L(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^Q(\mathbf{u}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\pi}) + \mathbf{K}(p) - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{v}_1 = 0 \qquad \text{éq 1.4.2.4-2}$$

Tout d'abord, nous remarquons, dans cette équation, que lorsque nous avons un état critique alors la fréquence propre de vibration de la structure correspondant au mode de flambage est nulle.
De plus, nous observons que les fréquences propres de la structure chargée sont différentes de celles de la structure initiale pour deux raisons :

1. La pulsation propre ω est modifiée par la précontrainte p : c'est l'effet principal qui est utilisé, par exemple, pour accorder un violon. La tension de la corde joue sur la hauteur de la note correspondante, donc sur sa fréquence propre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2. Un deuxième effet est la variation de la fréquence par modification de la géométrie : la matrice de raideur géométrique de départ $\mathbf{K}_0$ est remplacée par la matrice de raideur sur la géométrie actuelle : $\mathbf{K}_0+\mathbf{K}^L+\mathbf{K}^Q$. Ce qui a pour effet de modifier les équations vibratoires.

L'opérateur DYNA_NON_LINE permet de mener des analyses vibratoires sur la configuration non linéaire courante (mot clé MODE_VIBR), mais sans prise en compte de la précontrainte pour l'instant.

1.5 Implémentation dans le code

En toute rigueur, afin de s'assurer de l'analyse de stabilité d'un calcul quasi-statique non linéaire, il faut utiliser le critère de stabilité *ad hoc* à chaque pas du calcul incrémental. Tout critère de stabilité non linéaire doit donc être intrinsèquement le moins coûteux possible en temps CPU et en place mémoire.
Algorithmiquement parlant, il paraît judicieux d'implanter l'appel au critère à l'intérieur même de la routine correspondant à l'opérateur STAT_NON_LINE [bib15]. En effet, le principe d'appel à chaque pas s'accommode mal d'un appel totalement externalisé à la méthode incrémentale de résolution du problème mécanique non linéaire.

1.6 Critère d'Euler

Ce critère (cf. [§1.4.2.2]) ne nécessite que la résolution d'un problème statique linéaire, puis la construction et l'assemblage de la matrice de raideur géométrique. Celle-ci et la matrice de raideur assemblée sont alors à passer comme argument d'un solveur [bib12] pour le problème aux valeurs propres [éq 1.4.2.2-2].

En sortie on récupère donc les modes de flambement et les charges critiques correspondantes. Pour plus de détails, l'utilisateur pourra utilement consulter le document [U2.08.04] [bib17].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.7 Critère non linéaire

1.7.1 Impact sur l'opérateur STAT_NON_LINE

Commençons par rappeler brièvement le fonctionnement de la méthode incrémentale de résolution des problèmes de structure non linéaires [bib15].

1.7.1.1 Algorithme de STAT_NON_LINE

On utilisera l'indice *i* (comme "instant") pour noter le numéro d'un incrément de charge et l'exposant *n* (comme "Newton") pour noter le numéro de l'itération de Newton en cours. L'algorithme utilisé dans l'opérateur STAT_NON_LINE peut alors s'écrire schématiquement de la façon suivante :

$(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ et $\boldsymbol{\sigma}_0$ connus

Boucle sur des instants t_i (ou incréments de charge) : chargement $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}(t_i)$

- $(\mathbf{u}_{i-1}, \boldsymbol{\lambda}_{i-1})$ connus
- Prédiction : calcul de $\Delta \mathbf{u}_i^0$ et $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i^0$
- Boucle sur des itérations de Newton : calcul d'une suite $(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^n)$
  - $(\mathbf{u}_i^n, \boldsymbol{\lambda}_i^n)$ et $(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^n)$ connus
  - Calcul des matrices et vecteurs associés aux charges suiveuses
  - Expression de la relation de comportement
    - calcul des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_i^n$ et des variables internes $\boldsymbol{\alpha}_i^n$ à partir des valeurs $\boldsymbol{\sigma}_{l-1}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{l-1}$ à l'équilibre précédent (t_{i-1}) et de l'incrément de déplacement $\Delta \mathbf{u_i^n} = \mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}$ depuis cet équilibre
    - calcul des "forces nodales" : $\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\sigma}_i^n + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}_i^n$
    - calcul éventuel de la matrice de raideur tangente : $\mathbf{K}_i^n = \mathbf{K}(\mathbf{u}_i^n)$
  - Calcul de la direction de recherche $(\Delta \mathbf{u}_i^{n+1}, \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1})$ par résolution d'un système linéaire
  - Itérations de recherche linéaire : ρ
  - Actualisation des variables et de leurs incréments :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \rho\, \boldsymbol{\delta}\, \mathbf{u}_i^{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1} = \boldsymbol{\lambda}_i^n + \rho\, \boldsymbol{\delta}\, \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1} \end{cases} \text{et} \begin{cases} \Delta \mathbf{u}_i^{n+1} = \Delta \mathbf{u}_i^n + \rho\, \boldsymbol{\delta}\, \mathbf{u}_i^{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1} = \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^n + \rho\, \boldsymbol{\delta}\, \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1} \end{cases}$$

  - Test de convergence
- Archivage des résultats à l'instant t_i

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i \\ \boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_{i-1} + \Delta \boldsymbol{\lambda}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On remarque qu'il y a trois niveaux de boucles imbriquées : une boucle extérieure sur les pas de temps, une boucle d'itérations (qualifiées de globales) de Newton et des sous-boucles éventuelles pour la recherche linéaire (si elle est demandée par l'utilisateur) et certaines relations de comportement nécessitant des itérations (dites internes), par exemple pour l'élasto-plasticité en contraintes planes.

Si l'on choisit le critère basé sur la matrice tangente assemblée, il faut disposer de cette matrice réactualisée à chaque pas où l'on veut faire l'analyse de stabilité.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

C'est le cas lorsque l'on utilise une méthode de type Newton, et non pas une méthode de type Newton modifiée.

On aboutit alors à l'algorithme suivant :

$(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ et $\boldsymbol{\sigma}_0$ connus

Boucle sur des instants t_i (ou incréments de charge) : chargement $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}(t_i)$

- $(\mathbf{u}_{i-1}, \boldsymbol{\lambda}_{i-1})$ connus
- Prédiction : calcul de $\Delta \mathbf{u}_i^0$ et $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i^0$
- Boucle sur des itérations de Newton : calcul d'une suite $(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^n)$
  - $(\mathbf{u}_i^n, \boldsymbol{\lambda}_i^n)$ et $(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^n)$ connus
  - Calcul des matrices et vecteurs associés aux charges suiveuses
  - Expression de la relation de comportement
    - calcul des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_i^n$ et des variables internes $\boldsymbol{\alpha}_i^n$ à partir des valeurs $\boldsymbol{\sigma}_{l-1}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{l-1}$ à l'équilibre précédent (t_{i-1}) et de l'incrément de déplacement $\Delta \mathbf{u_i^n} = \mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}$ depuis cet équilibre
    - calcul des "forces nodales" : $\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\sigma}_i^n + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}_i^n$
    - calcul éventuel de la matrice de raideur tangente : $\mathbf{K}_i^n = \mathbf{K}(\mathbf{u}_i^n)$
  - Calcul de la direction de recherche $(\Delta \mathbf{u}_i^{n+1}, \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1})$ par résolution d'un système linéaire
  - Itérations de recherche linéaire : ρ
  - Actualisation des variables et de leurs incréments :
    $$\begin{cases} \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \rho\, \delta\, \mathbf{u}_i^{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1} = \boldsymbol{\lambda}_i^n + \rho\, \delta\, \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1} \end{cases} \text{et} \begin{cases} \Delta \mathbf{u}_i^{n+1} = \Delta \mathbf{u}_i^n + \rho\, \delta\, \mathbf{u}_i^{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1} = \Delta \boldsymbol{\lambda}_i^n + \rho\, \delta\, \boldsymbol{\lambda}_i^{n+1} \end{cases}$$
  - Test de convergence
- Archivage des résultats à l'instant t_i

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i \\ \boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_{i-1} + \Delta \boldsymbol{\lambda}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{cases}$$

- Critère de stabilité, fonction de la raideur tangente réactualisée : $\mathbf{K}_i^n = \mathbf{K}(\mathbf{u}_i^n)$

Le critère est calculé à la fin du pas, juste après l'archivage. Il a donc comme arguments les quantités convergées au pas courant. De plus, ce choix de position d'appel permet de tenir compte correctement des chargements suiveurs, puisque leur calcul se fait lors des itérations de Newton. Le critère ne saurait donc être appelé avant la fin de ces itérations.

1.7.1.2 Impact sur la structure de donnée résultat de STAT_NON_LINE

L'appel du critère de stabilité non linéaire va induire la résolution d'un problème aux valeurs propres. Le résultat de ce calcul sera donc un ensemble de couples charge critique / mode de flambage.
Les charges critique sont des scalaires et les modes associés sont des champs de déplacement, qui viendront enrichir la structure de donnée résultat de STAT_NON_LINE.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.7.2 Particularités liées au tenseur de déformation

Dans le code, il convient de distinguer deux grandes familles de description des déformations.

D'une part le tenseur linéarisé correspond au cas des petites perturbations (argument PETIT du mot clé DEFORMATION), mais aussi au cas des petites perturbations réactualisées (lagrangien réactualisé à chaque pas du calcul incrémental : argument PETIT_REAC du mot clé DEFORMATION).

Le tenseur de déformation s'écrit alors (comme [éq 1.3-3]) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}\right) \qquad \text{éq 1.7.2-1}$$

L'utilisation de PETIT_REAC implique une résolution de l'équilibre de la structure sur sa géométrie actuelle avec un tenseur de déformations linéarisé. On calcule donc l'incrément de déformation par rapport à la position $\mathbf{X}$, au déplacement $\mathbf{u}$ et à l'incrément de déplacement $\Delta \mathbf{u}$ de la façon suivante :

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial (X+u)_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial (X+u)_i}\right) \qquad \text{éq 1.7.2-2}$$

D'autre part, le code propose des tenseurs de déformation de type Green-Lagrange (GROT_GDEP) pour le traitement des grands déplacements (et des rotations finies pour certains éléments de structure) mais sous hypothèse de petites déformations. Le tenseur utilisé est le tenseur classique suivant [éq 1.4.1-5] :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} = u_{k,i} u_{k,j}\right) \qquad \text{éq 1.7.2-3}$$

Le mot-clé GROT_GDEP s'applique aux modélisations poutre, coque ou 3D.

Enfin, le cadre de modélisation en grandes transformations le plus complet accessible dans *Code_Aster* est issu de la théorie de Simo et correspond au mot-clé SIMO_MIEHE. Il prend en compte les grandes rotations et les grandes déformations puisque la loi de comportement est écrite en grandes déformations. Pour plus de précisions sur les différences fondamentales entre les différents types de déformations, la documentation [bib16] de *Code_Aster* présente en détail la modélisation SIMO_MIEHE.

Code_Aster ne permet pas les calculs en configuration eulerienne : comme avec le tenseur d'Almansi, par exemple. Tous les tenseurs de déformation disponibles sont de type lagrangien.

La différence fondamentale, quant à l'écriture du critère, se situe entre les déformations linéarisées (PETIT et PETIT_REAC) et les déformations GROT_GDEP et SIMO_MIEHE.
En effet, *Code_Aster* a besoin pour faire sa recherche d'équilibre de la matrice tangente. Celle-ci s'écrit d'après l'équation ([§2.2.2.1] de la documentation sur STAT_NON_LINE [bib15]) :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{Q}^T : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \qquad \text{éq 1.7.2-4}$$

Or, $\mathbf{Q}^T : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}}$ correspond au terme classique de la rigidité matérielle et $\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma}$ correspond au terme de rigidité géométrique qui n'est présent qu'en grands déplacements. Ainsi le critère de flambement (formellement assimilable à [éq 1.4.2.2-2]) : $(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}))\boldsymbol{\nu} = 0$ n'est valable qu'en petites déformations, puisque le terme de rigidité géométrique est considéré comme négligeable dans

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

la matrice tangente. On peut alors, avec raison, faire une recherche classique des valeurs propres et vecteurs propres de type flambement d'Euler.

Par contre en grande transformation, l'évaluation de ce critère par la même méthode est problématique pour deux raisons : d'une part, dans la matrice tangente, le terme de rigidité géométrique est déjà calculé et, d'autre part, la matrice $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$ qu'il faudrait éventuellement ajouter est obtenue sous *Code_Aster* en petites déformations. Pour ces raisons, il est nécessaire d'évaluer de manière différente le critère selon le type de tenseur de déformation demandé par l'utilisateur.

Si l'on faisait le choix d'une description eulerienne, le développement d'un critère du type Euler réactualisé serait facilité au niveau du calcul du terme $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$, quel que soit le tenseur de déformation.

1.7.2.1 En déformations linéarisées : PETIT et PETIT_REAC

Comme nous l'avons dit précédemment, ce cas de figure ne pose pas de problème majeur. Il suffit de calculer la matrice de rigidité géométrique et de faire une recherche classique de modes et de valeurs propres, de type Euler [éq 1.4.2.2-2] :

$$(\mathbf{K}+\lambda\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}))\boldsymbol{\nu}=0 \qquad \text{éq 1.7.2.1-1}$$

$\mathbf{K}$ est la matrice tangente réactualisée à la fin du pas de temps.
Dans ce cas, on peut donc effectivement parler de critère de type Euler réactualisé.
Comme on est en petites déformations, la matrice des rigidités géométriques est proportionnelle au chargement. Donc, lorsque l'on obtient le coefficient critique λ, il suffit de le multiplier par la charge réelle au pas de temps actuel pour obtenir la charge critique de flambage. Le cas $\lambda=1$ correspond donc à la perte de stabilité.
Certains éléments finis comme les coques DKT ne permettent pas le calcul de la matrice de rigidité géométrique, contrairement aux éléments de type COQUE_3D, par exemple.

1.7.2.2 En grands déplacements : GROT_GDEP et SIMO_MIEHE

La méthode classique ne s'applique plus dans ce cas-là. En effet, *Code_Aster* calcule comme matrice tangente la matrice de rigidité matérielle plus la matrice de rigidité géométrique (et éventuellement, la contribution due aux pressions suiveuses).
Une des manières de vérifier alors le flambement est de faire une recherche des valeurs propres de la matrice tangente seule. Si une des valeurs propres est négative, c'est que la matrice est devenue singulière et qu'une instabilité est survenue entre le moment où toutes ses valeurs propres étaient positives et le moment où l'une d'elle est devenue négative.
Le problème à traiter est donc légèrement différent puisque dans le cas des petites déformations (PETIT et PETIT_REAC), on a le système suivant à résoudre [éq 1.7.2.1-1] : , $(\mathbf{K}+\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\nu}=0$ alors que dans le cas GROT_GDEP et SIMO_MIEHE il faut résoudre :

$$(\mathbf{K}+\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\nu}=0 \qquad \text{éq 1.7.2.2-1}$$

Avec $\mathbf{I}$ qui est la matrice identité et λ est, cette fois, de dimension physique équivalente à $\mathbf{K}$, alors que dans le cas des petites déformations, la valeur propre λ est adimensionnelle (d'où son interprétation directe en tant que coefficient multiplicateur du chargement).

L'un des défauts inhérents à cette méthode par rapport à la recherche plus classique expliquée plus haut [§1.4.2] est que l'on ne peut avoir de prévisions de flambage que lorsqu'on s'approche « près » de la charge critique, voire lorsqu'on la dépasse. Loin de cette charge, la première valeur propre trouvée n'a pas réellement de signification physique puisque des non linéarités peuvent apparaître entre le pas courant et la charge critique calculée. Le rapport coefficient critique sur charge à l'instant i est donc différent de celui à l'instant $i+1$ alors qu'en petites déformations ce rapport reste constant.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

De plus, pour tous les pas de temps, toutes les valeurs propres et vecteurs propres hormis la plus basse n'ont aucune signification physique puisque, pour un couple vecteur propre valeur propre $(\mathbf{V}_i, \lambda_i)$, on a :

$$(\mathbf{K}(\mathbf{u})+\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}))\mathbf{V}_i=\lambda_i \mathbf{V}_i \qquad \text{éq 1.7.2.2-2}$$

Ceci n'a de sens clair qu'à partir du moment où $\lambda_i \to 0$, auquel cas on retrouve la charge critique et le vecteur propre critique associé.
Toujours comparé au critère d'Euler (réactualisé [éq 3.2.2.1-1] ou non [éq 2.3.2.2-2]), on remarque que la valeur propre du problème [éq 1.7.2.2-1] : $(\mathbf{K}+\lambda \mathbf{I})\boldsymbol{\nu}=0$ n'est pas adimensionnée. Il en découle une plus grande difficulté d'interprétation quant à savoir si la valeur est « petite » ou non. Autrement dit, quand peut-on dire que l'on est proche d'une bifurcation ?
Pour définir un intervalle pertinent et d'usage général, afin de borner le voisinage d'une instabilité, il serait intéressant d'adimensionner les valeurs propres.

1.7.2.3 Cas des modélisations mixtes

Comme *Code_Aster* permet d'affecter plusieurs types de déformations à la même structure, il faut considérer le cas où l'on utilise plusieurs types de tenseurs de déformation dans le même calcul.
La différenciation des différentes matrices élémentaires n'étant d'aucune utilité, il convient de se résoudre à trancher au niveau global entre une méthode ou l'autre. On a choisi d'extraire les valeurs et vecteurs propres de la matrice tangente sans rajouter de matrices de raideurs géométriques. Tout se passe comme si la structure était en déformation de type Green-Lagrange du point de vue du critère. En effet, considérons un solide quelconque composé de deux parties I et II. Sur la partie I, le tenseur de déformation qui a été adopté est le tenseur linéarisé `PETIT` et sur la partie II celui de Green-Lagrange. La matrice tangente issue de l'assemblage des deux sous-matrices devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & \mathbf{K}_{II}+\mathbf{K}_{II}(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix} \qquad \text{éq 1.7.2.3-1}$$

Les termes étoilés représentent les nœuds communs aux deux parties et sont donc une combinaison linéaire des valeurs des deux matrices. Dans cette configuration, il apparaît qu'aucune des solutions n'est satisfaisante mais que la moins pénalisante est de faire une recherche de « type Green-Lagrange » [§1.7.2.2] c'est-à-dire d'utiliser $(\mathbf{K}+\lambda \mathbf{I})\boldsymbol{\nu}=0$ [éq 1.7.2.2-1].

Cette solution n'étant pas exacte mais néanmoins la seule capable d'être réalisé simplement, il est prévu d'ajouter un message d'alarme informant l'utilisateur que les résultats obtenus ne sont pas garantis dus à la juxtaposition de plusieurs types de tenseurs de déformations.

1.7.3 Amélioration des performances du critère

Durant la résolution incrémentale d'un problème quasi-statique non linéaire, dans l'idéal et si l'on admet que la discrétisation en temps est suffisamment fine, il faudrait faire une analyse de stabilité à chaque pas de calcul. A chaque pas, cela induit la résolution d'un problème aux valeurs propres, certes limité à la recherche de quelques modes. L'analyse de stabilité apporte donc un surcoût CPU important, à un calcul non linéaire pouvant déjà être long.

L'idée est de ne faire appel à la résolution d'un problème aux valeurs propres que quand c'est réellement nécessaire, donc quand la configuration courante est « proche » d'une instabilité. Si l'on peut définir ce voisinage par un intervalle prédéfini, alors on peut faire appel à un test de Sturm [bib12]. Ce test permet de savoir si il existe au moins une valeur propre sur l'intervalle de recherche. Dans l'affirmative, on pourra alors effectuer la recherche modale. Dans le cas contraire, on continue la résolution incrémentale quasi-statique, sans résoudre de problème aux valeurs propres.
Le coût d'un test de Sturm est notablement inférieur au coût de recherche des charges critiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'intervalle de recherche pour le test de Sturm peut, soit être donné par l'utilisateur, soit avoir une valeur par défaut dans le code.

Dans le cas d'un critère d'Euler réactualisé (cas des petites déformations [§1.7.2.1]), où le problème à résoudre s'écrit : $(\mathbf{K}+\lambda\mathbf{K}(\sigma))\nu=0$ [éq 1.7.2.1-1], l'intervalle de recherche doit être centré sur la valeur propre $\lambda=1$ (qui correspond à la valeur -1 pour l'algorithme de CALC_MODES, car il résout en fait un problème du type : $\mathbf{K}\nu=\mu\mathbf{K}(\sigma)\nu$)).

Les bornes de l'intervalle sont les bornes du coefficient multiplicateur du chargement, donc des quantités adimensionnelles, qui sont fonction des coefficients de sécurité et de l'évaluation des incertitudes pour le problème donné. Le test de Sturm est mis en œuvre dans ce cadre.
Dans le cas spécifique adapté aux tenseur de Green-Lagrange [§1.7.2.2], où l'on résout : $(\mathbf{K}+\lambda\mathbf{I})\nu=0$ [éq 1.7.2.2-1], l'intervalle est centré sur 0. De plus, les bornes de l'intervalle de test sont, contrairement au cas précédent, non adimensionnées [§1.7.2.2]. Il est donc plus difficile d'identifier des valeurs pertinentes et générales (pour le cas des valeurs par défauts). Le test de Sturm n'est pas implanté actuellement pour ce cas.

1.8 Généralisation à la dynamique

Nous n'aborderons pas ici le cadre des critères d'instabilité dynamique (amortissement négatif…). Il s'agit juste de signaler que le critère non linéaire présenté ici peut tout à fait s'appliquer directement en dynamique non linéaire. Il détectera alors tout flambage potentiel de la structure, au sens de la singularité de la matrice globale de raideur tangente réactualisée.
Afin d'être exhaustif en termes d'analyse de stabilité sur une étude dynamique non linéaire, l'utilisateur devrait utiliser deux critères :

- un critère de flambage (critère sur la raideur),
- un critère dynamique (critère sur l'amortissement ou sur le problème linéarisé quadratique global [bib14], par exemple).

Pour l'instant, le critère de flambage sur la raideur (identique à celui de STAT_NON_LINE) est seul disponible dans DYNA_NON_LINE.

La modélisation fluide-structure couplée (u,p,φ) [R4.02.02], qui est disponible dans DYNA_NON_LINE, nécessite quelques adaptations d'utilisation du critère de stabilité non-linéaire. En effet, cette formulation couplée génère une matrice de raideur globale assemblée intrinsèquement singulière sur tous les degrés de liberté fluides, ce qui la rend incompatible avec la méthode de recherche de valeurs propres utilisée pour l'analyse de stabilité. On peut cependant contourner le problème en corrigeant le problème assemblé (matrice de raideur et de raideur géométrique si besoin est) grâce à l'utilisation de deux mots-clés spécifiques. L'analyse de stabilité porte alors sur les degrés de liberté structures seuls.

1.9 Validation des développements

Les cas tests de validation sont : SSNL126 et SSLL105D.
Plus précisément, les cas tests SSNL126 traitent le cas d'une poutre encastrée à une extrémité et soumise à une compression à l'autre extrémité. La modélisation est tridimensionnelle, avec relation de comportement élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire. Deux représentations cinématiques sont présentées :

- modélisation a : déformations linéarisées,
- modélisation b : déformations de Green-lagrange.

Le cas test SSLL105D se base sur un problème de poutre en L, dont on étudie le flambement élastique. Les éléments finis sont de type poutre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.10 Extension du critère de flambement au traitement du comportement élastoplastique

Loin de toute exhaustivité, nous ne présenterons ici que les approches les plus simples, en vue de leur implantation aisée dans le code.
Lorsque la structure fonctionne dans un régime élastoplastique, le flambement est affecté par la perte de résistance due à la plasticité [bib2]. La modification vient de la relation de comportement pendant le déplacement supplémentaire $\alpha \mathbf{u}_1$.
La contrainte devient, sous forme incrémentale :

$$\Delta \boldsymbol{\pi}_1 = \Delta \boldsymbol{\pi} + \alpha \mathbf{C}_T [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}) + \Delta \varepsilon^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u})] + \frac{\alpha^2}{2} \mathbf{C}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \qquad 1.11\text{-}1$$

Dans cette expression, la matrice de comportement est la matrice tangente $\mathbf{C}_T$. Le choix de cette matrice n'est pas immédiat : en effet, la matrice dépend de $\alpha \mathbf{u}_1$ et n'est donc pas connue tant que le mode est inconnu. On peut, par exemple, décharger pendant le flambement si le mode se développe dans un sens et charger s'il se développe dans le sens opposé. Il est donc nécessaire de faire une hypothèse pour le comportement pendant le flambage plastique. Pour commencer, nous allons appliquer l'hypothèse de Hill [bib4] qui part du principe que la structure continue à charger plastiquement pendant le flambage.

Considérons une loi élastoplastique de type Von Mises. Nous définissons les trois modules : E qui est le module d'Young, $\mathrm{E_T}$ le module tangent, et le module sécant. Ces modules sont rappelés sur la figure suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

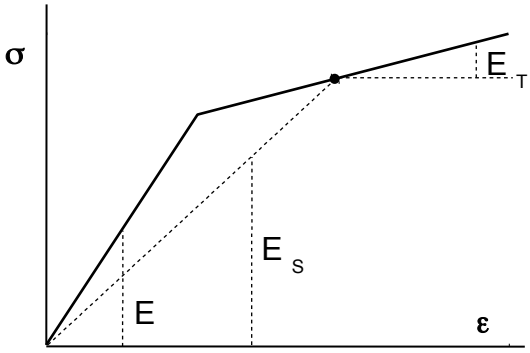


Figure 1.11.5-a : Représentation des divers modules sur une courbe de traction 1D

Puis nous proposons trois méthodologies possibles.

L'hypothèse du module tangent consiste simplement à remplacer le module d'Young par le module tangent dans la relation de comportement. On obtient alors :

$$\mathbf{C}_T = \frac{E}{E_T}\mathbf{C} \qquad \text{1.11-2}$$

Cette méthode est très rudimentaire, mais elle est toujours pessimiste, ce qui peut constituer un avantage, si l'on se place du point de vue du dimensionnement.

La méthode utilisée habituellement consiste à employer la matrice tangente du calcul incrémental (opérateur STAT_NON_LINE [bib15]). Nous avons donc l'équation suivante dans le cas de la plasticité de Von Mises [bib16] :

$$\mathbf{C}_T = \mathbf{C}\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}\left[\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}} \otimes \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}^T}\right]\mathbf{A}\,\mathbf{C}}{h + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}^T}\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}}\|_{VM}}}\right]$$

$$\text{Avec} \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}} : \text{vecteur déviateur des contraintes} \\ \mathbf{A} : \text{matrice intervenant dans la norme de VonMises} \left(\|\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}}\|_{VM} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}^T}\mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}}}\right) \\ h : \text{pente plastique définie par } h = \dfrac{E \,.\, E^T}{E - E^T} \end{cases} \qquad \text{1.11-3}$$

Cette méthode n'est parfaitement rigoureuse qu'en élasticité non linéaire ou si l'on respecte l'hypothèse de Hill : elle ne permet pas de prédire les bifurcations dans les trajets de chargement. Dès que la relation de comportement est dissipative (voir chapitre **2**), les charges critiques calculées ne seront exactes que si l'on peut vérifier que le chargement est monotone, en tout point de la structure (Hill [bib4]).

La méthode la plus réaliste consiste à utiliser la théorie finie de la déformation uniquement pour calculer la charge de flambement plastique. La matrice de comportement tangente est donnée par l'équation ci-dessous :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{C}_T = \left[\left(\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E_S} \right) \frac{\mathbf{A}[\boldsymbol{\sigma}^D \otimes \boldsymbol{\sigma}^{D^T}]\mathbf{A}}{\|\boldsymbol{\sigma}^D\|_{VM}} + \mathbf{C}^{-1} + \left(\frac{1}{E_S} - \frac{1}{E} \right) \mathbf{A} \right]^{-1} \quad \text{1.11-4}$$

Comparé à la méthode basée sur la matrice de raideur tangente [éq 1.11-3], ce critère nécessite la construction et l'assemblage d'une matrice globale spécifique. Cette opération coûteuse vient alourdir la résolution incrémentale.

Pour des considérations de généralité et de minimisation du coût de développement et du coût de calcul (CPU et mémoire), nous choisissons donc le critère basé sur le module tangent [éq 1.11-3].

1.11 Conclusion

Code_Aster offre deux critères de stabilité, au sens du flambage, pour les calculs de structure :

1. D'une part, dans les cas où une approche linéarisée suffit, on peut appliquer un critère de type Euler ([bib13] et [bib18]), par appel à un opérateur de résolution du problème aux valeurs propres généralisé (CALC_MODES avec le mot clé TYPE_RESU='MODE_FLAMB').

2. D'autre part, pour tous les cas où il est indispensable de tenir compte des non linéarités, qu'elles soient dues à la relation de comportement ou aux grandes transformations, l'utilisateur peut employer un critère adapté, de type Euler généralisé. L'appel de ce critère se fait au cours de la résolution incrémentale du problème quasi-statique (opérateur STAT_NON_LINE [bib15]).

A chaque pas de temps, le critère est basé sur la résolution d'un problème aux valeurs propres [bib13] sur les matrices de raideurs globales actualisées. Ce critère, qui se décline sous deux formes différentes, suivant le tenseur de déformation choisi, se base sur une linéarisation autour du pas de calcul courant. Il accepte tout type de tenseur de déformation, ainsi que tout type de relation de comportement pour laquelle on est capable de construire la matrice de raideur globale, à chaque instant. De plus, le critère choisi est parfaitement rigoureux dans le cas des relations de comportement élastiques non linéaires, et peut être étendu au cas de l'élastoplasticité associée à l'hypothèse de Hill [bib4].

2 Stabilité d'un système dissipatif

2.1 Définition de la stabilité d'un système dissipatif

Lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes dissipatifs (cas des matériaux plastiques ou fragiles...) on ajoute dans l'expression de l'énergie totale Φ un terme représentant la partie dissipée. Les dégradations irréversibles sont alors associées à des quantités, le plus souvent scalaires, comme l'endommagement ou la plasticité. Le critère de flambement présenté précédemment ne tient pas compte de l'irréversibilité. Il est suffisant mais non nécessaire pour justifier de la stabilité [bib19]. Lorsque le critère de flambement est atteint, l'unicité de la solution n'est plus garantie, mais on ne peut pas conclure directement sur la stabilité. On note u la variable d'état dérivant de la partie réversible de l'énergie et α la variable d'état dérivant de la partie irréversible du phénomène mécanique étudié. Le critère de stabilité consiste alors à vérifier la positivité de la dérivée seconde de l'énergie dans la

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

direction de l'accroissement de la variable α [bib20]. Considérons une perturbation admissible ($v,b \geq 0$). Le critère de stabilité revient alors à vérifier que l'on retrouve toujours l'inégalité :

$$\Phi(u,\alpha) \leq \Phi(u+v,\alpha+b) \qquad \text{éq 2 .1- 1}$$

Du point de vue mathématique, cela revient à vérifier que la fonction Φ réalise un minimum local en (u , α).

On s'intéresse plus particulièrement au cas des modèles d'endommagement. On considère (u , α), un état de la structure Ω vérifiant l'équilibre :

$$\forall v \in C^0, \int_\Omega \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\alpha).v \right) dx = 0 \qquad \text{éq 2 .1-2}$$

et le critère d'endommagement, tenant compte de l'irréversibilité de la variable d'état α :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(u,\alpha) \geq 0 \; et \; \forall \beta \in C^0 \geq 0, \int_\Omega \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(u,\alpha).\beta \right) dx = 0 \qquad \text{éq 2 .1-3}$$

O n obtient rapidement, avec un développement de Taylor à l'ordre 2 [bib20], l'équivalence entre le critère 2 .1-1 et le critère suivant, écrit sur la dérivée seconde de Φ :

$$D^2\Phi(u,\alpha) \geq 0 \qquad \text{éq 2 .1-4}$$

où D^2 est l'opérateur de dérivée seconde.

2.2 Écriture dans le cadre de la méthode des éléments finis

Du point de vue des éléments finis et en conservant les notations précédentes, ce critère s'écrit comme la positivité du quotient de Rayleigh sous contraintes d'inégalités suivant :

$$\forall (\boldsymbol{v},\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}) \neq \boldsymbol{0}, \; Q_{rc} = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})^t . \boldsymbol{K}^T (\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})^T . (\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})} \geq 0 \qquad \text{éq 2 . 2 - 1}$$

La façon la plus classique de vérifier qu'une fonction est positive consiste à calculer son minimum et à s'assurer de sa positivité. On présente dans la partie qui suit, l'algorithme de minimisation sous contraintes d'inégalités programmé dans *Code_Aster.*

2.3 Algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités

Parmi les algorithmes disponibles dans la littérature, celui qui s'est avéré le plus robuste et également le plus simple à programmer est la méthode des puissances, à laquelle on ajoute, à chaque itération, la projection des degrés de liberté $\boldsymbol{b}$ sur l'ensemble des valeurs positives, de sorte à vérifier la contrainte unilatérale imposée [bib21]. L'algorithme est construit en deux étapes, de la façon suivante :

1. La méthode des puissances est très utilisée en mathématique appliquée pour la recherche des valeurs propres maximales d'une matrice $\boldsymbol{M}$. Un décalage sur la plus grande valeur propre $\boldsymbol{\lambda_m}$: $\boldsymbol{N = \lambda_m I_d - M}$ permet ensuite d'effectuer la recherche des plus petits modes propres. On présente ci-dessous l'algorithme sous sa forme initiale. Soit, sous la forme utilisée pour la recherche de la valeur propre maximale d'une matrice symétrique $\boldsymbol{A}$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Soit P la projection d'un vecteur sur sa partie positive.
Initalisation : $(v,b\geq 0)_0/\|(v,b\geq 0)_0\|=1$.
Pour $k\geq 1$ Faire :
$(w,c)=A(v,b)_{k-1}$,
$(v,b)_k=\left(w,P(c)\right)$,
$(v,b)_k=(v,b)_k/\|(v,b)_k\|$
Si : $\|(v,b)_k-(v,b)_{k-1}\|<\epsilon$ alors Fin
Sinon : $k=k+1$
Fin Si
Fin Pour

Figure 2.3-a : Schéma de l'algorithme de recherche du maximum sous contrainte pour une matrice *A*

2. Sa limite de fiabilité se situe aux alentours du millier de degrés de liberté. Pour s'affranchir de cette limite et être en mesure de traiter des problèmes industriels, on utilise la méthode de réduction disponible dans Sorensen [bib22], qui consiste à projeter le problème sur une base constituée des *n* plus petits modes propres de la structure. En tenant compte de cette étape on récrit l'algorithme de la façon suivante, où K est toujours l'opérateur tangent, Q est l'opérateur de projection et B_n la projection dans l'espace réduit :

Réduction : $K^T=Q^T B_n Q$
Initialisation : $(v,b\geq 0)_0$; $z_0=Q(v,b)_0/\left(Q\|(v,b)_0\|\right)=1$,
Pour $k\geq 1$ Faire :
$(w,c)=Q^T B_n z_{k-1}$,
$(v,b)_k=\left(w,P(c)\right)$,
$z_k=Q(v,b)_k$,
$z_k=z_k/\|z_k\|$
Si : $\|z_k-z_{k-1}\|<\epsilon$ alors Fin
Sinon déflation
Fin si
Fin pour

Figure 2.3-b : Schéma de l'algorithme de recherche de maximum sous contraintes d'inégalité avec méthode de projection

2.4 Implémentation dans le code

L'étude de stabilité est déclenchée à l'appel de la commande CRIT_STAB de l'opérateur STAT_NON_LINE, sous la condition TYPE = 'STABILITE'. Les grandeurs, ou degrés de liberté, vérifiant la condition unilatérale d'irréversibilité sont déclarés dans une liste DDL_STAB=('','',...).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.5 Exemple d'application : Cas de la barre en traction uniforme

Le principale cas de référence retrouvé dans la bibliographie est l'étude de la stabilité de la solution homogène d'une barre endommagée sous l'effet d'un chargement de traction uniforme [bib23] :



Figure 2 . 5 - a : Représentation de la barre en traction uniforme

2.5.1 Résultats analytiques de stabilité

On démontre [bib23] qu'il existe deux types de solutions au problème étudié :

- La solution homogène, uniformément endommagée.
- Les solutions localisées qui concentrent l'endommagement de la barre sur une zone précise.

L'étude de stabilité de la solution homogène revient donc à vérifier que les niveaux d'énergie atteints, en considérant de petites perturbations de la solution ayant la forme d'une localisation, sont toujours supérieurs à celui obtenu à partir de la solution homogène.

Partant de la formulation en gradient d'endommagement suivante de l'énergie [bib24] :

$$\varphi = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}(1-\alpha)^2 E_0 \varepsilon(u)^2 + \frac{{\sigma_M}^2}{E_0}\alpha + \frac{E_0 l^2}{2} \nabla\alpha . \nabla\alpha \right) dx \qquad \text{éq 2.5.1-1}$$

la comparaison des niveaux d'énergie permet alors de tracer le diagramme de stabilité de la solution homogène en fonction du rapport entre la longueur de la barre *L*, la longueur interne du modèle *l* et du chargement appliqué U_t [bib23] :

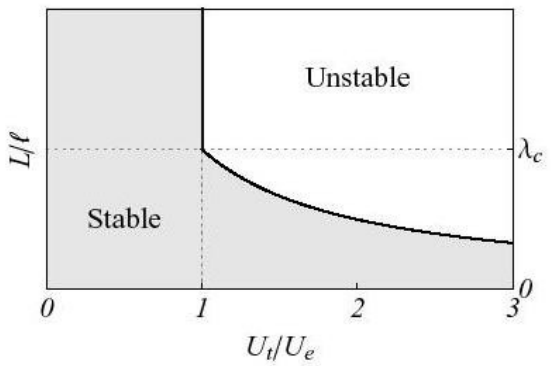


Figure 2 . 5 . 1- a : Diagramme de stabilité analytique de la barre en traction

2.5.2 Résultats de stabilité obtenus avec *Code_Aster*

En utilisant l'algorithme d'optimisation développé dans le code (2.3), on retrouve un diagramme de stabilité similaire à 5% près sur le chargement à partir duquel l'instabilité est détectée [bib25] :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

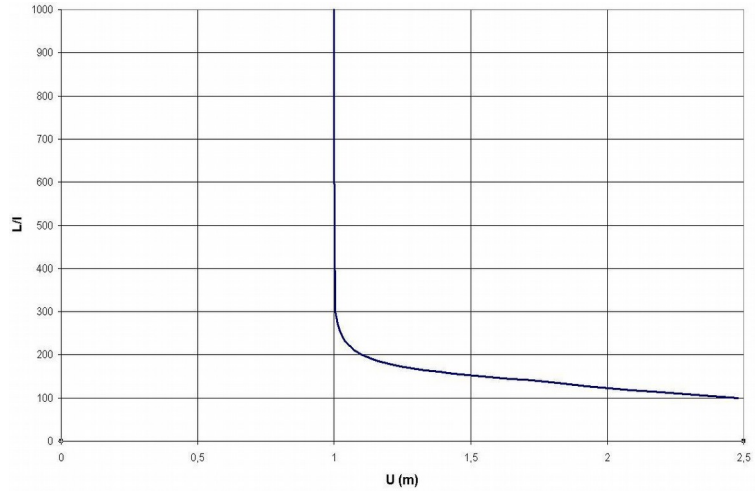


Figure 2 . 5 . 2- a : Diagramme de stabilité de la barre en traction obtenu avec *Code_Aster*

Des études paramétriques sur l'influence du nombre de fréquences propres calculées et sur lesquelles on s'appuie pour l'étude de stabilité montre qu'il est nécessaire d'en prendre une trentaine pour des problèmes discrétisés à plus ou moins 100 000 ddls mais qu'il devient important d'en considérer une bonne centaine pour les problèmes de plus grande tailles. Ce qui entraîne des coûts de calcul CPU plus importants, l'algorithme étant gourmand en temps. C'est pourquoi il n'est réellement déclenché que lorsque l'étude de flambement montre que l'unicité de la solution n'est plus assurée.

Lorsque l'algorithme montre que le critère de stabilité n'est plus vérifié (`CHAR_STAB` négatif) , le vecteur minimisant le quotient de Rayleigh (éq 2.2-1) est appelé direction d'instabilité. On le retrouve comme résultat sous la nomination `MODE_STAB` (par analogie avec `MODE_FLAMB` pour le critère de flambement) . La perturbation de la solution courante par cette direction d'instabilité la déstabilise et permet de bifurquer vers une solution stable. Dans l'exemple présenté ici, la direction d'instabilité est la localis ation de l'endommagement sur l'une des deux extrémités de la barre.

2.6 Conclusion

Code_Aster permet d'effectuer des études de stabilité sur des problèmes dissipatifs tels que les problèmes de plasticité ou d'endommagement. L'algorithme utilisé se base sur la méthode des puissances à laquelle s'ajoute la projection des degrés de liberté, dans l'espace respectant les contraintes unilatérales d'irréversibilité. Son application n'est réellement mise en oeuvre que lorsque le critère d'unicité est violé. Dans le cas contraire, l'unicité est suffisante pour garantir la stabilité. Si l'on détecte à un pas de temps du calcul éléments finis la perte de stabilité de la solution, l'algorithme fournit la direction à ajouter comme perturbation pour retrouver une solution bifurquée stable.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Bibliographie

• [1] C. CHAVANT, A. COMBESCURE, J. DEVOS, A. HOFFMANN, Y. MEZIERE : "Flambage élastique et plastique des coques minces", Cours IPSI, 1982.

• [2] S. DURANT, A. COMBESCURE : "Analyse de bifurcation en grandes déformations élasto-plastiques : formulation et validation élémentaires", Rapport interne n°190, LMT-Cachan, 1997.

• [3] N. GREFFET : "Simulation couplée fluide-structure appliquée aux problèmes d'instabilité non linéaire sous écoulement", Thèse de doctorat, LMT, ENS-Cachan, 2001.

• [4] R. HILL : "A general theory for uniqueness and stability in elastic-plastic solids", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 6, 236-249, 1958.

• [5] T.J.R. HUGHES, W.K. LIU, I. LEVIT : "Nonlinear dynamic finite element analysis of shells, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", W. Wunderlich, E. Stein & K.J. Bathe editors, Berlin, Springer, 151-168, 1981.

• [6] G. LOOSS : "Elementary stability and bifurcation theory", Springer-Verlag, 1990.

• [7] A. LEGER, A. COMBESCURE, M. POTIER-FERRY : "Bifurcation, flambage, stabilité en Mécanique des structures", Cours IPSI, 1998.

• [8] A. LEGER : "Bifurcation, flambage, stabilité en mécanique des structures", Note EDF-DER HI-74/98/024/0.

• [9] J. SHI : "Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by finite element method", Computer & Structures, Vol. 58, n°1, 203-220, 1996.

• [10] J.C. WOHLEVER, T.J. HEALEY : "A group theoretic approach to the global bifurcation analysis of an axially compressed cylindrical shell", Comp. Meth. In Applied Mech. And Engrg., Vol. 122, 315-349, 1995.

• [11] « Efforts extérieurs de pression en grands déplacements » [R3.03.04].

• [12] « Éléments vibro-acoustiques » [R4.02.02].

• [13] « Algorithme de résolution pour le problème généralisé » [R5.01.01].

• [14] « Algorithme de calcul du problème quadratiques de valeurs propres » [R5.01.02].

• [15] « Algorithme non linéaire quasi-statique » [R5.03.01].

• [16] « Intégration des relations élasto-plastiques » [R5.03.02].

• [17] « Modèle de Rousselier en grandes déformations » [R5.03.06].

• [18] « Notice de calcul au flambage » [U2.08.04].

• [19] Q-S. NGUYEN : "Stabilité et mécanique non linéaire", HERMES Science Publications, 2000.

• [20] A. BENALLAL et J-J. MARIGO : "Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening", Modeling Simul. Mater. Sci. Eng., 15 : 283-195, 2007.

• [21] A. PINTO DA COSTA et A. SEEGER :"Numerical resolution of cone-constrained eigenvalue problems", Computational and Applied Mathematics, 28(1) : 37-61, 2009.

• [22] « Solveurs modaux et résolution du problème généralisé (GEP) » [R5.01.01].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

• [23] K. PHAM, H. AMOR, J-J. MARIGO et C. MAURINI : "Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture", International Journal of Damage Mechanics, vol. 20, no. 4 : 618-652, 2011.

• [24] « Loi d'endommagemet régularisée quadratique ENDO_CARRE » [R5.03.26]

• [25] « Validation de l'algorithme d'optimisation sous contrainte d'inégalités de l'option DDL_STAB » [V6.02.138].

4 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	*N. GREFFET, J.M. PROIX, L. SALMONA EDF*-R&D/AMA	Texte initial
08/04/12	*N. GREFFET EDF-R&D/AMA,*	Généralisation à la dynamique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)