Algorithme de calcul des densités de ferraillage

Résumé :

On présente l'algorithme de calcul des densités de ferraillage de plaques et coques en béton armé implanté au sein de la commande CALC_FERRAILLAGE [U4.81.42]. Cet algorithme a été proposé en 1978 par Alain Capra et Jean-Francis Maury [bib1].

La détermination des ferraillages d'une section est effectuée, selon l'option choisie (CODIFICATION = 'EC2' ou 'BAEL') à l'Eurocode 2 partie 1-1 [bib2] ou au BAEL91-99.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1Présentation générale de la méthode....3
2Descriptif détaillé de l'algorithme....4
2.1Algorithme originel de Capra et Maury....4
2.2Implantation retenue dans code_aster....6
2.2.1Diagrammes contrainte-déformation pris en compte....6
2.2.2Détermination des aciers à l'ELU....8
2.2.2.1Détermination des efforts....8
2.2.2.2Détermination des aciers de flexion à l'EC2....9
2.2.2.3Différence entre BAEL91 et EC2....12
2.2.2.4Détermination des aciers d'effort tranchant à l'EC2....13
2.2.2.5Détermination des aciers d'effort tranchant pour BAEL91....14
2.2.3Détermination des aciers à l'ELS....15
2.2.3.1Détermination des aciers de flexion....15
2.2.3.2Détermination des aciers d'effort tranchant....17
2.2.4Algorithme d'optimisation de la section d'acier....18
2.2.5Calcul de la densité volumique d'armature....19
A l'issue des calculs à , les sections d'acier de flexion , , , et les sections d'acier d'effort tranchant sont exploitées pour calculer la densité volumique d'armature en si elles sont exprimées en pour les aciers de flexion en pour les aciers d'effort tranchant suivant la formule suivante où est la masse volumique des aciers en 19
19
2.2.6Calcul de l'indicateur de complexité de constructibilité....19
2.2.7Commentaire relatif aux aciers comprimés....20
3Références bibliographiques....21

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Présentation générale de la méthode

Cette méthode [bib1], mise au point en 1978 par Alain Capra et Jean-Francis Maury (ingénieurs à la Direction technique de Socotec), fait référence en la matière et constitue l'algorithme le plus souvent implanté dans les codes de calcul de ferraillage de plaques et coques en béton armé.

La méthode est fondée sur le principe de l'équilibre de chacune des facettes centrées au point de calcul et dont la normale tourne dans le plan tangent au feuillet moyen. Il s'agit d'un post-traitement d'un calcul statique d'une plaque ou d'une coque en béton armé, conduit à partir de l'état d'efforts généralisés précédemment obtenu.

Pour chaque position de la facette, on effectue un calcul de section rectangulaire soumise à la flexion composée et on en déduit les deux sections d'armatures supérieure et inférieure. Ces deux sections sont ensuite recalées en deux sections (par unité de longueur) suivant l'axe X (A_{XS} pour la nappe supérieure et A_{XI} pour la nappe inférieure) et deux sections (par unité de longueur) suivant l'axe Y (A_{YS} pour la nappe supérieure et A_{YI} pour la nappe inférieure).

On procède ensuite, à l'aide d'un algorithme adapté, à la recherche de l'optimum pour chaque nappe (inférieure et supérieure) correspondant à la valeur minimum de la somme $A_{XS}+A_{YS}$ (respectivement $A_{XI}+A_{YI}$). Cette méthode, au prix d'un coût de calcul un peu plus élevé que dans d'autres méthodes, notamment celle de Wood, permettent d'obtenir une répartition d'acier optimale.

Quelle que soit la codification choisie (BAEL91-99 ou Eurocode 2 partie 1-1), seuls les aciers tendus sont calculés. Les aciers comprimés ne sont jamais évalués. Ce parti pris est guidé par la volonté de simplifier les données de sortie. En effet, il est requis de distinguer aciers tendus et comprimés, ces derniers s'accompagnant de disposition constructives spécifiques visant à contrecarrer la poussée au vide. Ceci devra faire l'objet de vérifications indépendantes le cas échéant. De plus, les ferraillages minimums de non fragilité (visant à limiter de manière systématique la fissuration) ne sont pas évalués et doivent faire l'objet d'une vérification pour chaque élément structurel par l'utilisateur.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Descriptif détaillé de l'algorithme

L'objet de ce chapitre est de décrire la méthode de Capra et Maury de manière détaillée et de présenter également la technique utilisée pour implanter cette méthode au sein de *code_aster* ainsi que les opérations additionnelles nécessaires à sa mise en œuvre.

De manière très globale, l'algorithme utilisé peut être schématisé de la manière suivante :
- Acquisition des paramètres de configuration (type de calcul ELS/ELU, valeurs caractéristiques des contraintes limites pour l'acier et le béton, valeurs de l'enrobage sur les deux faces, coefficients partiels de sécurité, etc.) ;
- Acquisition des caractéristiques des éléments (épaisseur, efforts de membrane, moments de flexion) ;
- Détermination des contraintes réglementaires en fonction du type de calcul effectué (ELU/ELS) ;
- Pour chaque élément traité, détermination du ferraillage.

Cette dernière partie, qui est le cœur de la méthode de Capra et Maury est présentée dans le paragraphe suivant.

2.1 Algorithme originel de Capra et Maury

On définit un ensemble de facettes, centrées au point de calcul, dont la normale tourne dans le plan tangent au feuillet moyen. La facette est repérée par l'angle θ que fait sa normale avec l'axe OX du repère de l'élément (voir figure 2.1-1). L'angle θ est discrétisé régulièrement de $-90°$ à $+90°$ (ici avec un pas de $5°$). Les axes Ox et Oy sont les axes des nappes d'armatures.

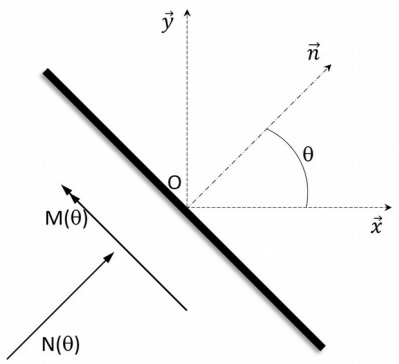


Figure 2.1-1: Représentation d'une facette

Pour chacune de ces facettes, on évalue le moment de flexion (M), la tension de membrane (N) et l'effort tranchant (V) qui s'y appliquent en fonction des tenseurs des efforts à l'aide des équations :

$$M(\theta)=M_{xx}\cos^2\theta+M_{yy}\sin^2\theta-2M_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad (1)$$

$$N(\theta)=N_{xx}\cos^2\theta+N_{yy}\sin^2\theta-2N_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

$$V(\theta)=V_{xz}\cos\theta+V_{yz}\sin\theta \quad (3)$$

Remarque : *Le calcul de $V(\theta)$ n'est effectué que pour les cas où on valorise la contribution de la compression membranaire dans la résistance au cisaillement (calculs dérivés de l'Eurocode 2), i.e. pour le code* `'EC2'`.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour les calculs au BAEL 91-99, on évalue l'effort de cisaillement tel que cela est proposé dans l'article de Capra et Maury à savoir [bib1], à partir de la contrainte de cisaillement équivalente qui s'exprime suivant la formule :

$$\tau . z = \sqrt{\left(T_{ZX}^2 + T_{ZY}^2\right)} \tag{4}$$

Où $z = 0{,}9\left(h - c\right)$ *avec* h *représentant la hauteur totale de la section et* c *l'enrobage en partie inférieure.*

Par un calcul en flexion composée, on détermine les sections d'acier en nappes supérieure et inférieure $A_S(\theta)$ et $A_I(\theta)$ d'acier requise dans la direction θ pour équilibrer la section dans le contexte réglementaire de béton armé retenu.

Les efforts résistants dans la direction θ des deux nappes peuvent être évalués à l'aide des expressions :

$$F_{RI}(\theta) = \left(A_{XI}\cos^2\theta + A_{YI}\sin^2\theta\right) f_{yd} \tag{5}$$

Et :

$$F_{RS}(\theta) = \left(A_{XS}\cos^2\theta + A_{YS}\sin^2\theta\right) f_{yd} \tag{6}$$

où f_{yd} représente la contrainte maximale admissible de l'acier (identique dans les deux directions).

La résistance est assurée si l'effort résistant est supérieur à l'effort appliqué, ce qui s'écrit :

$$F_I \le F_{RI} \text{ et } F_S \le F_{RS} \tag{7}$$

Ainsi, en considérant un repère orthonormé comportant A_{XS} en abscisse et A_{YS} en ordonnée, on a à résoudre finalement pour les ferraillages supérieur et inférieur :

$$\begin{aligned} &\left(A_{XS}\cos^2\theta + A_{YS}\sin^2\theta\right).f_{yd} \ge A_S(\theta).f_{yd} \text{ pour tous les angles } \theta \\ &\left(A_{XI}\cos^2\theta + A_{YI}\sin^2\theta\right).f_{yd} \ge A_I(\theta).f_{yd} \text{ pour tous les angles } \theta \end{aligned} \tag{8}$$

Et :

$$A_{XS} + A_{YS} \text{ et } A_{XI} + A_{YI} \text{ minimum.} \tag{9}$$

Les inégalités (7) définissent pour chaque valeur de θ un demi-espace limité par une droite de pente négative qui traduit un domaine de validité (figure 2.1-2).

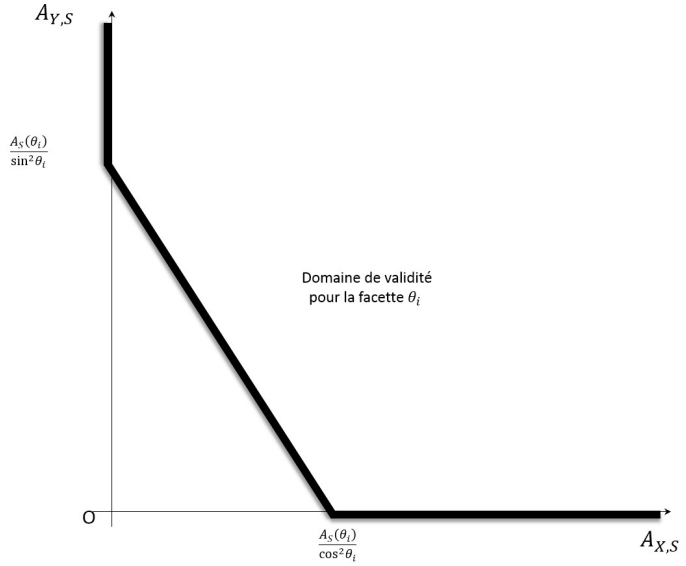


Figure 2.1-2: Domaine de validité pour une facette

En parcourant toutes les valeurs de θ, on obtient le domaine de validité indiqué sur la figure 2.1-3, délimité par la ligne brisée $A\,B\,C\,D$ ...

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

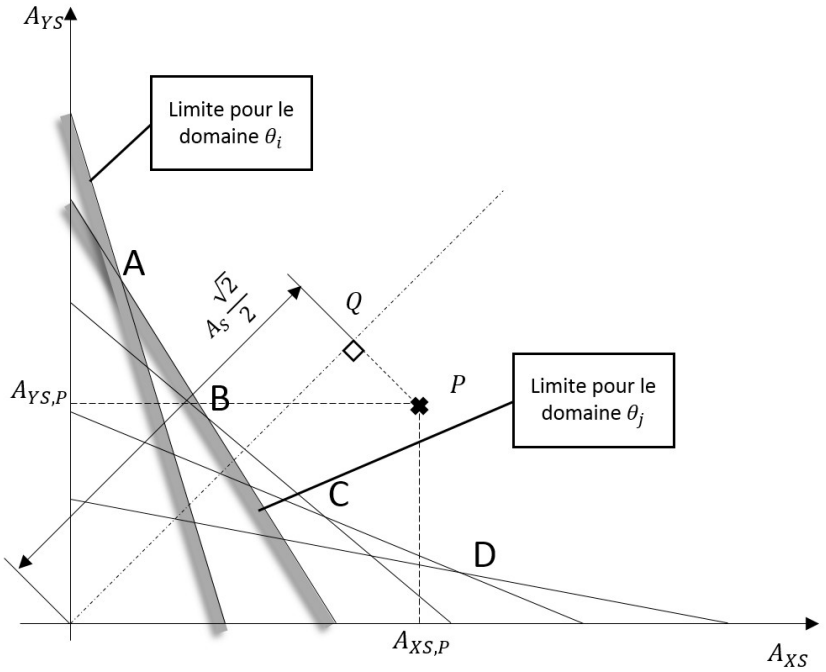


Figure 2.1-3: Domaine de validité pour toutes les facettes [bib1]

Pour chaque point P du domaine de validité, la section totale des armatures peut être obtenue en projetant le point P en Q sur la première bissectrice. La distance OQ représente alors la valeur $(A_S\sqrt{2})/2$ avec $A_S = A_{XS} + A_{YS}$.

On constate donc que l'optimum de ferraillage correspond à l'un des 36 points (compte tenu du pas de rotation des facettes retenu) de la frontière (illustration par les quatre points de la ligne brisée $A\,B\,C\,D\,...$) dont la projection sur la première bissectrice est la plus proche de l'origine des axes. La recherche de ce point est effectuée par une méthode de type « dichotomie ».

2.2 Implantation retenue dans code_aster

L'implantation retenue est un peu différente afin d'optimiser le temps de calcul. De plus, lors du calcul de la section soumise à la flexion composée, on effectue une vérification de non dépassement de la contrainte béton à l'ELS, et de non dépassement de la déformation du béton à l'ELU.

A l'issue du calcul en flexion composée, on détermine la section globale des aciers (supérieure et inférieure) nécessaire à l'équilibre des forces. On dispose donc d'une série de triplets (A_S , A_I , θ) représentative de chaque facette (A_S représentant la section supérieure, A_I la section inférieure et θ l'angle caractéristique de la facette).

On effectue alors l'optimisation du ferraillage pour la section inférieure, puis supérieure à l'aide de l'algorithme original décrit ci-dessous.

Il faut noter que tous les calculs ne concernent que des aciers tendus. Il n'est pas prévu de pouvoir traiter des aciers comprimés.

2.2.1 Diagrammes contrainte-déformation pris en compte

Les caractéristiques de la section sont décrites sur la figure 2.2-1, elles s'appuient sur les paramètres usuels de l'Eurocode 2 complété de quelques autres notations permettant de distinguer les enrobages en faces supérieure et inférieure.
Le diagramme contrainte-déformation, à droite de la figure 2.2-1 est le diagramme rectangulaire simplifié utilisé pour le béton :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

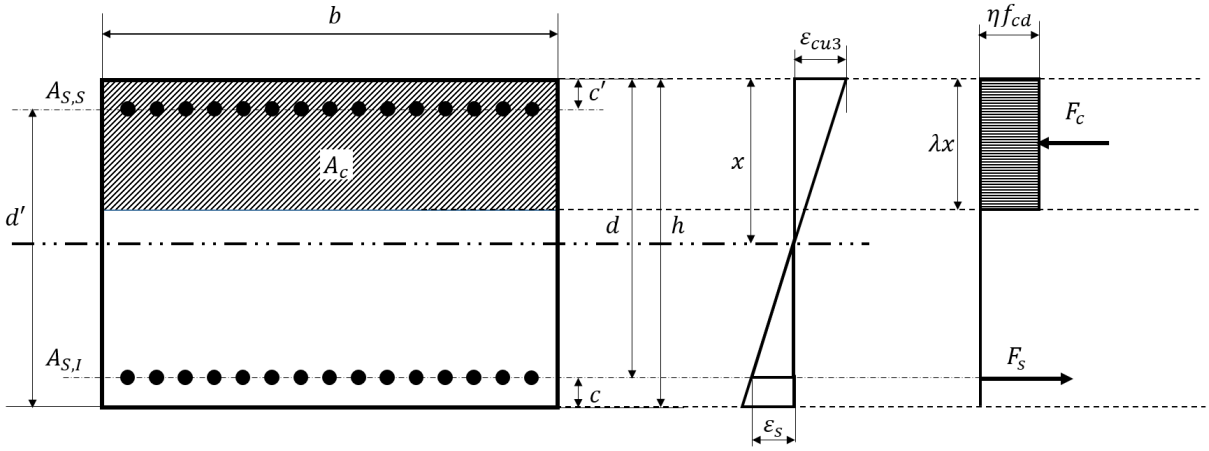


Figure 2.2-1: Équilibre d'une section en béton armé à l'ELU selon l'Eurocode 2

On identifie les éléments suivants :

- h : l'épaisseur de l'élément structurel,
- c et c' : les enrobages inférieur et supérieur,
- d et d' : les épaisseurs utiles tels que $d=h-c$ et $d'=h-c'$

À noter pour les coques et plaques, que la largeur b est systématiquement de l'unité de longueur de référence du modèle utilisé, les efforts généralisés de coque et plaque étant exprimés en effort par unité de longueur ou moment par unité de longueur.

Lorsque CODIFICATION ='EC2' , en cohérence avec l'Eurocode 2 [bib2], une distinction est faite en fonction de la classe de béton si sa résistance caractéristique est inférieure ou non à $f_{ck}\leq 50\,MPa$:

$$\lambda=min\left[0.8\,;0.8-0.8-\left(f_{ck}-50\right)/400\right] \tag{10}$$

Et :

$$\eta=min\left[1\,;1-\left(f_{ck}-50\right)/200\right] \text{ tant que } f_{ck}\leq 90\,MPa \tag{11}$$

Pour CODIFICATION = 'BAEL91' on a :

$$\lambda=0.8 \text{ et } \eta=1 \tag{12}$$

On rappelle l'expression selon l'Eurocode 2 des paramètres suivants :

- La contrainte limite de conception du béton : $f_{cd}=\frac{\alpha_{cc} f_{ck}}{\gamma_c}$ avec $\alpha_{cc}=1$ pour l'EC2
- La contrainte limite de conception de l'acier : $f_{yd}=\frac{f_{cd}}{\gamma_s}$
- La valeur de déformation ultime du béton utilisé dans le diagramme rectangulaire simplifié directement lié à la relation simplifiée « triangle-rectangle » du béton de l'Eurocode 2 (hypothèse valable jusqu'à $f_{ck}\leq 90\,MPa$: $\varepsilon_{cu3}=min\left[0.35\,;0.26+3.5\left(\frac{90-f_{ck}}{100}\right)^4\right]$ exprimé en %.

Pour CODIFICATION='BAEL91', la valeur de ε_{cu3} à utilisé pour le pivot B est $\varepsilon_{bc}=0.35\,\%$.

Le diagramme contrainte-déformation utilisé pour l'acier est le diagramme à palier horizontal sur la figure (2.2-2).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

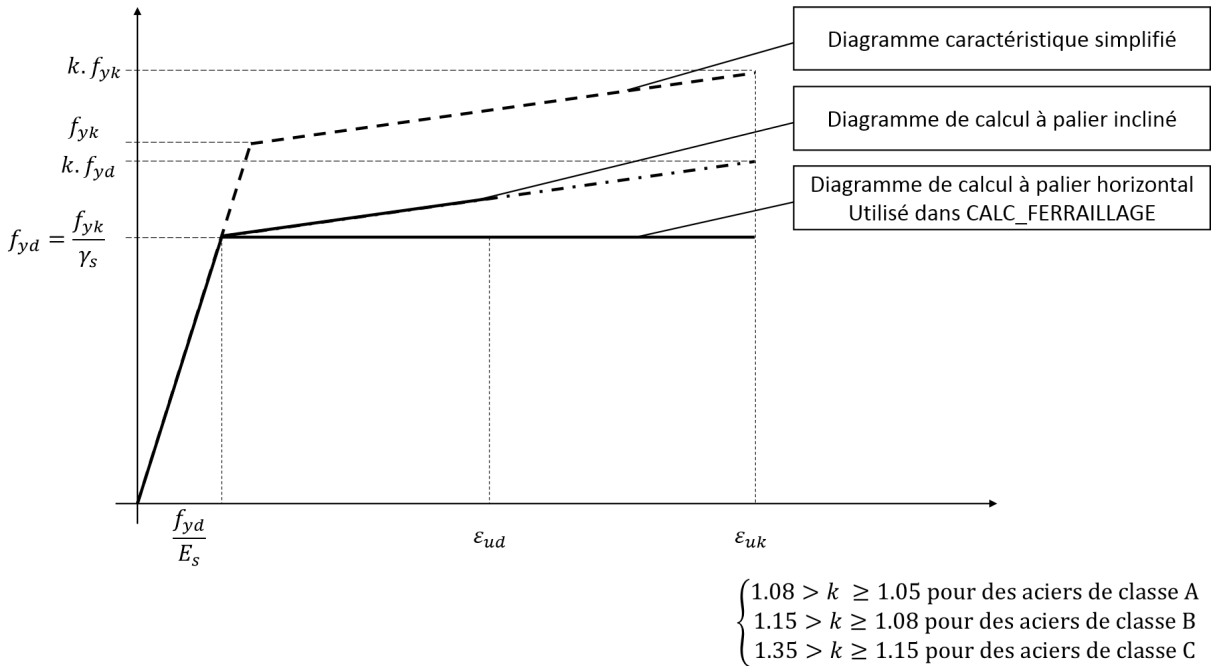


Figure 2.2-2: Diagramme contrainte-déformation pour l'acier

En fonction des différentes classes d'armature, l'Eurocode 2 distingue les valeurs à rupture minimales :

- Classe A : $\varepsilon_{uk}=2.5\%$
- Classe B : $\varepsilon_{uk}=5\%$
- Classe C : $\varepsilon_{uk}=7.5\%$

On rappelle pour ce diagramme 2.2-2 que selon l'Eurocode 2 la déformation limite de conception des aciers vaut : $\varepsilon_{ud}=0.9\,\varepsilon_{uk}$

Pour `CODIFICATION='BAEL91'`, il n'y pas de possibilité de considérer différentes classes d'acier, la valeur de ε_{ud} est fixée à 1%.

2.2.2 Détermination des aciers à l'ELU

2.2.2.1 Détermination des efforts

On cherche à déterminer les sections de ferraillage permettant d'équilibrer les sections de béton armé dans chaque direction θ à partir de $M(\theta)$ (moments de flexion) et $N(\theta)$ (efforts de membrane).

- Pour les efforts de membrane $N(\theta)$, une **valeur positive signifie un effort de traction ;**
- Pour les moments de flexion $M(\theta)$, une valeur positive traduit une contrainte de traction en fibre inférieure de l'élément.

Cette convention étant inverse de celle utilisée au sein de code_aster, une inversion de signe est réalisé en début de calcul.

Si on prend en compte l'effet favorable de la compression membranaire, dans ce cas, on évalue aussi pour chaque direction θ le besoin en ferraillage d'effort tranchant en déclinant les préconisations de l'Eurocode 2 à partir de :

$$V(\theta)=V_{xz}\cos\theta+V_{yz}\sin\theta \qquad (13)$$

La valeur enveloppe de l'ensemble des θ est retenue comme valeur de ferraillage d'effort tranchant.

Dans le cas contraire (BAEL 91-99), on évalue directement l'effort tranchant quel que soit θ tel que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$V_{ed}=\sqrt{\left(T_{ZX}^2+T_{ZY}^2\right)} \quad (14)$$

En cohérence avec la figure 2.2-1 , quand $M(\theta)>0$, le moment et le moment réduit sont calculés tels que :

$$M_{inf}(\theta)=M(\theta)+N(\theta).\left(\frac{h}{2}-c\right) \quad (15)$$

Et le moment réduit est :

$$\mu_{inf}(\theta)=\frac{M_{inf}(\theta)}{d^2.\eta.f_{cd}} \quad (16)$$

De la même façon quand $M(\theta)<0$, en inversant le diagramme de déformation et la position du digramme rectangulaire simplifié en partie inférieure de la poutre symétriquement dans la figure 2.2-1 , le moment et le moment réduit sont calculés tels que :

$$M_{\sup}(\theta)=M(\theta)+N(\theta).\left(\frac{h}{2}-c'\right) \quad (17)$$

Et le moment réduit est :

$$\mu_{\sup}(\theta)=\frac{M_{\sup}(\theta)}{d^2.\eta.f_{cd}} \quad (18)$$

2.2.2.2 Détermination des aciers de flexion à l'EC2

Il s'agit dans un premier temps de déterminer les ferraillages longitudinaux pour chaque facette θ qui sont requis pour une section rectangulaire de largeur unitaire telle qu'exposée dans la figure 2.2-1 soumise à de la flexion composée ($N(\theta)$, $M(\theta)$). Les aciers d'effort tranchant sont ensuite calculés.

Calcul des aciers longitudinaux (également appelés aciers de flexion) :

Les données d'entrée pour le calcul des aciers de flexion :

- La contrainte caractéristique de compression du béton :

$$f_{ck}$$

- La contrainte de conception de compression du béton :

$$f_{cd}=\frac{\alpha_{cc}\,f_{ck}}{\gamma_c}$$

- La contrainte de conception des aciers :

$$f_{yd}=\frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

- La déformation de conception des aciers qui conditionne le pivot A :

$$\varepsilon_{ud}=0.9\,\varepsilon_{uk}$$

A partir de ces données, des termes de calcul intermédiaires sont évalués :

- La déformation de conception en compression du béton qui conditionne le pivot B :

$\varepsilon_{cu3}=min\left[0.35\,;0.26+3.5\left(\frac{90-f_{ck}}{100}\right)^4\right]$ exprimé en %, et pour f_{ck} en MPa.

- Le bras de levier par rapport à la fibre supérieure :

$$d=h-c$$

- Le ratio de hauteur comprimée de la section au pivot A :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\alpha_{AB}=\frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3}+\varepsilon_{ud}}$$

- Le ratio de hauteur comprimée de la section au pivot C :

$$\alpha_{BC}=1$$

- Les paramètres qui définissent le diagramme de béton rectangulaire simplifié (pour f_{ck} en MPa) :

$$\eta=min[1;1-\frac{f_{ck}-50}{200}]$$

$$\lambda=min[0.8;0.8-\frac{f_{ck}-50}{400}]$$

- Le moment réduit délimitant le passage du pivot A à B :

$$\mu_{AB}=\lambda\alpha_{AB}(1-0.5\lambda\alpha_{AB})$$

- Le moment réduit limite au pivot C :

$$\mu_{BC}=\lambda(1-0.5\lambda)$$

On retient le diagramme explicitant les différents pivots considérés en figure 2.2-3. A noter que $b=1$ pour ce schéma puisque l'on effectue le calcul sur la base de torseurs d'efforts généralisés par unité de longueur.

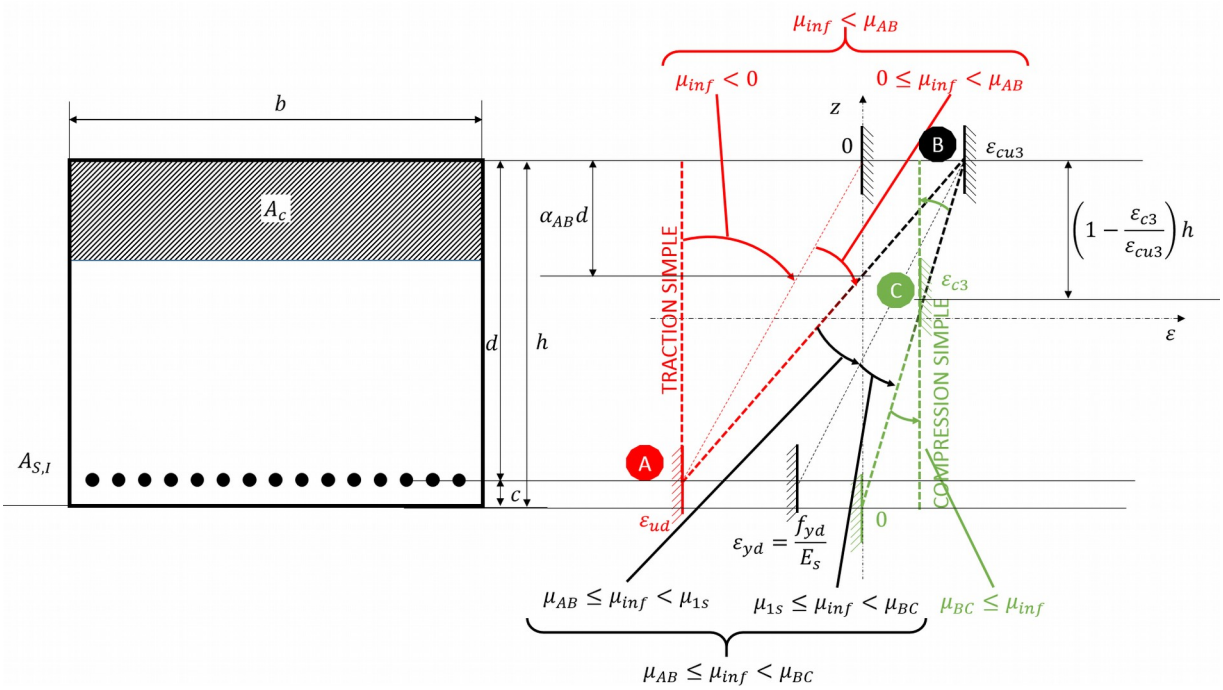


Figure 2.2-3: Principe des trois pivots pour une section de coque de hauteur de largeur

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

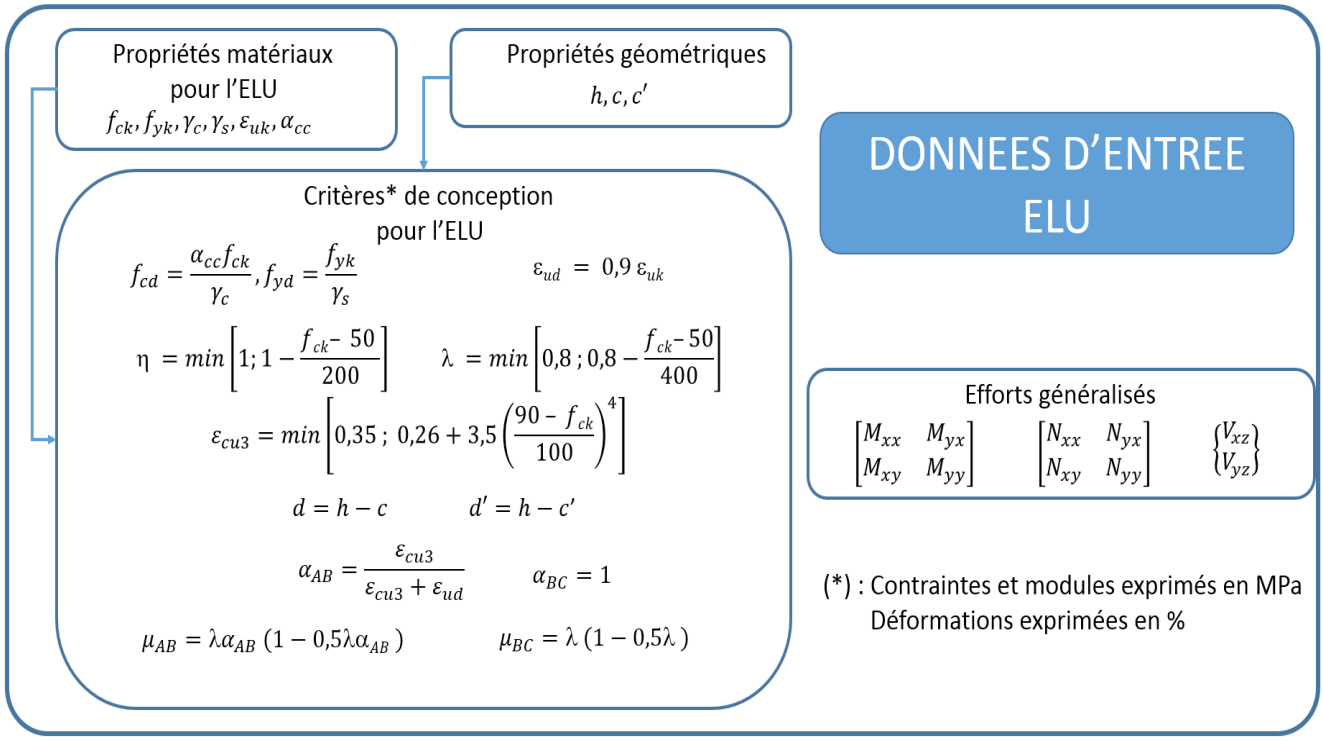


Figure 2.2-4: Données d'entrée pour le calcul d'aciers de flexion à l'ELU selon l'Eurocode 2

À l'ELU, on retient au final le logigramme de calcul exposé dans la figure 2.2-5

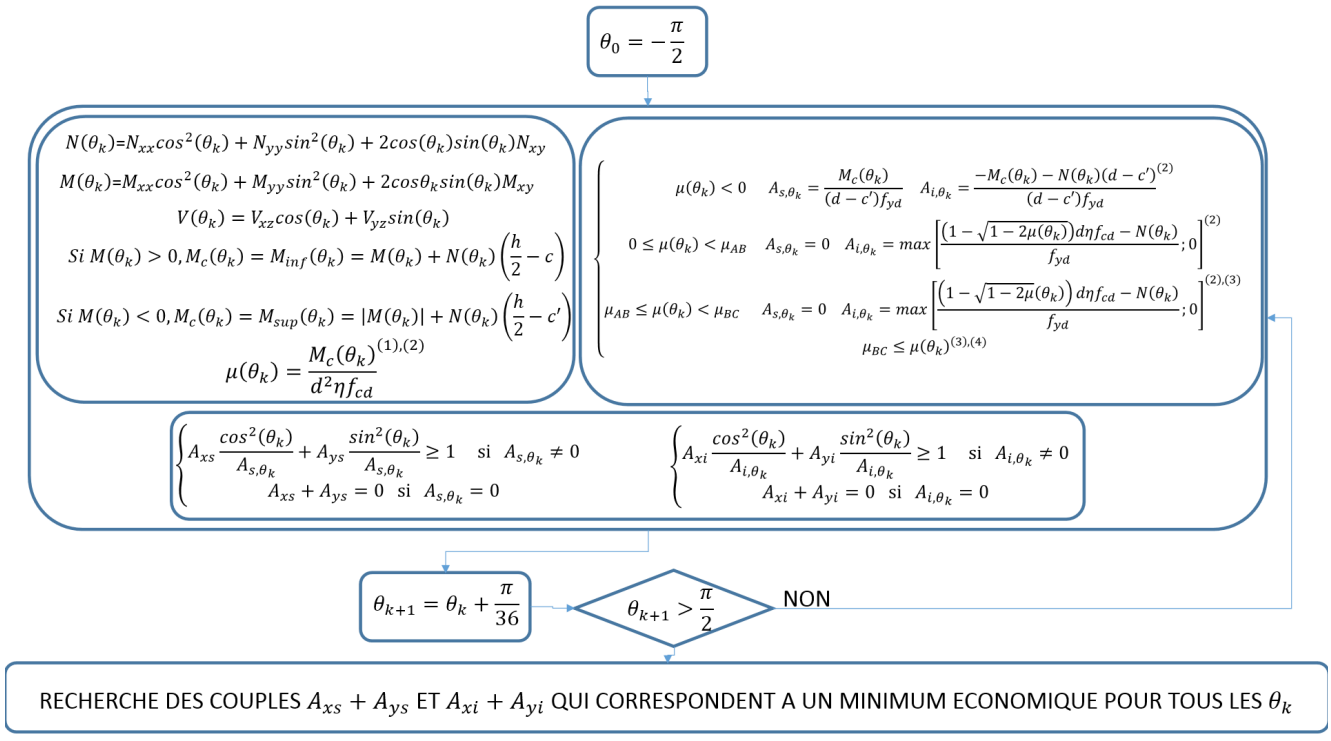


Figure 2.2-5: Algorithme de dimensionnement en flexion composée à l'ELU d'une section de coque

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En considérant les notes (1), (2), (3) et (4) ci-dessous :

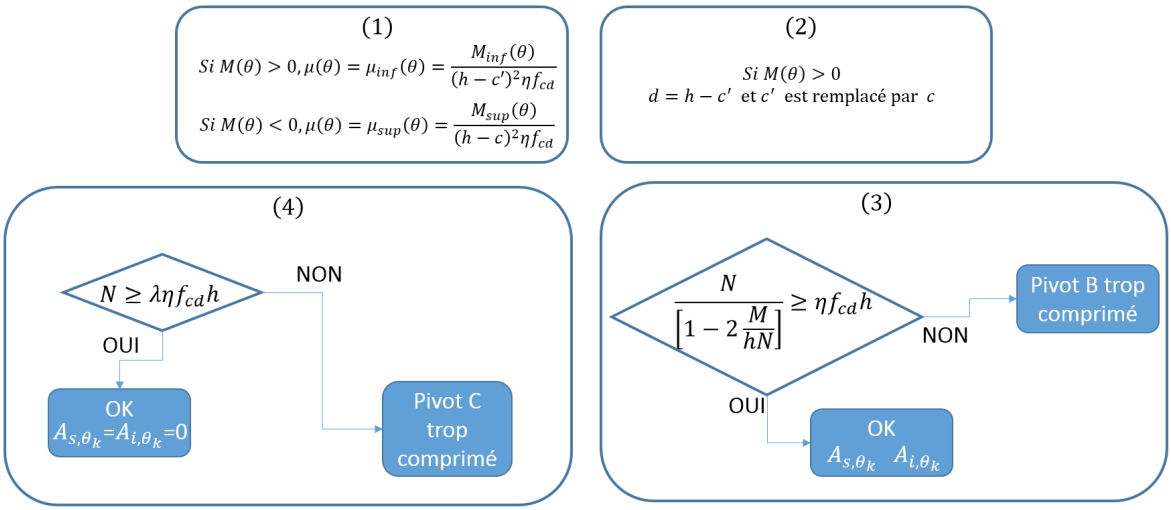


Figure 2.2-6: Vérifications et compléments associés à l'algorithme de calcul en flexion composée à l'ELU

2.2.2.3 Différence entre BAEL91 et EC2

L'algorithme de dimensionnement en flexion composée à l'ELU présenté en figure 2.2-5 est identique pour les deux codifications, seules quelques données d'entrée sont différentes. Le tableau ci-après synthétise les différences entre les trois codifications :

Codification :	BAEL91	EC2
paramètres du diagramme de béton rectangulaire simplifié	$\lambda=0,8$	$\lambda=min[0.8;0.8-\frac{f_{ck}-50}{400}]$
	$\eta=1$	$\eta=min[1;1-\frac{f_{ck}-50}{200}]$
déformation limite de conception des aciers	$\varepsilon_{ud}=1\,\%$	$\varepsilon_{ud}=0.9\,\varepsilon_{uk}$ où ε_{uk} dépend de la classe de ductilité des aciers
déformation de conception en compression du béton	$\varepsilon_{cu3}=0,35\,\%$	$\varepsilon_{cu3}=min[0.35;0.26+3.5(\frac{90-f_{ck}}{100})^4]$
contrainte de conception de compression du béton	$f_{cd}=\frac{\alpha_{cc} f_{cj}}{\gamma_c}$ où $\alpha_{cc}=0,85$	$f_{cd}=\frac{\alpha_{cc} f_{ck}}{\gamma_c}$ où $\alpha_{cc}=1$
contrainte de conception des aciers	$f_{yd}=\frac{f_e}{\gamma_s}$	$f_{yd}=\frac{f_{yk}}{\gamma_s}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2.2.4 Détermination des aciers d'effort tranchant à l'EC2

Le calcul des aciers d'effort tranchant pour le code 'EC2' est conduit en prenant en compte les mêmes données d'entrée que le calcul à la flexion composée pour chaque angle θ indiquées précédemment.

Les données d'entrée complémentaires pour le calcul des aciers d'effort tranchant sont :

- Le coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant ν_1 dont la valeur est fonction de la contrainte de calcul des aciers d'effort tranchant $f_{ywd}=f_{yd}=\frac{f_{yk}}{\gamma_s}$:
  - Si $f_{yd}\geq 0{,}8.f_{yk}$, soit si $\gamma_s\leq 1{,}25$: $\nu_1=0{,}6.\left(1-\frac{f_{ck}}{250}\right)$ où f_{ck} est exprimé en MPa.
  - Sinon, $\gamma_s>1{,}25$: $\nu_1=Min[0{,}6\,;Max[0{,}9-\frac{f_{ck}}{200}\,;0{,}5]]$ où f_{ck} est exprimé en MPa.
- Le coefficient α_{cw} tenant compte de l'état de contrainte dans la membrure comprimée :

$$\alpha_{cw}=\begin{cases}1 \;\; si \;\; \sigma_{cp}\leq 0\\ 1+\frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}} \;\; si \;\; 0<\frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}}\leq 0{,}25\\ 1{,}25 \;\; si \;\; 0{,}25<\frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}}\leq 0{,}5\\ 2{,}5.\left(1-\frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}}\right) \;\; si \;\; 0{,}5<\frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}}<1\,s\end{cases}$$

  - Où on désigne par σ_{cp} la contrainte moyennée sur toute la hauteur de section (y.c. les aciers et l'enrobage) dans le béton due à l'effort normal de calcul. Dans notre cas on considère donc que :

$$\sigma_{cp}=\frac{N(\theta)}{h}$$

- On retient dans les calculs des sections d'acier, z le bras de levier entre le centre de gravité de la section de béton comprimée et le centre de gravité des aciers tendus. Par défaut on retient la valeur forfaitaire proposée par l'Euro c ode 2 à savoir $z=0{,}9d$ avec $d=h-c \;\; si \;\; M(\theta)>0$ et $d=h-c' \;\; si \;\; M(\theta)<0$
- On note le paramètre d'inclinaison des bielles (d'angle d'inclinaison θ_{bielle}) de béton tel que :

$$\xi(\theta)=\frac{1}{\cot(\theta_{bielle})+\tan(\theta_{bielle})}=\frac{V(\theta)}{\alpha_{cw}z.\nu_1 f_{cd}}$$

  - Cette valeur est bornée par les valeurs limites de $\cot(\theta_{bielle})$ compris entre 1 et 2,5 :
    - Si $\cot(\theta_{bielle})\leq 1$ alors $\xi(\theta)\geq 0{,}5$ alors le béton est trop cisaillé,
    - Si $\cot(\theta_{bielle})\geq 2{,}5$ alors $\xi(\theta)\leq 0{,}3448$ alors le béton participe à la reprise du cisaillement ,
    - Si $1<\cot(\theta_{bielle})<2{,}5$ alors $0{,}3448<\xi(\theta)<0{,}5$ alors le béton ne participe pas.

On rappelle dans la figure (2.2-7) les données d'entrée nécessaires au calcul des aciers d'effort tranchant à l'ELU.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

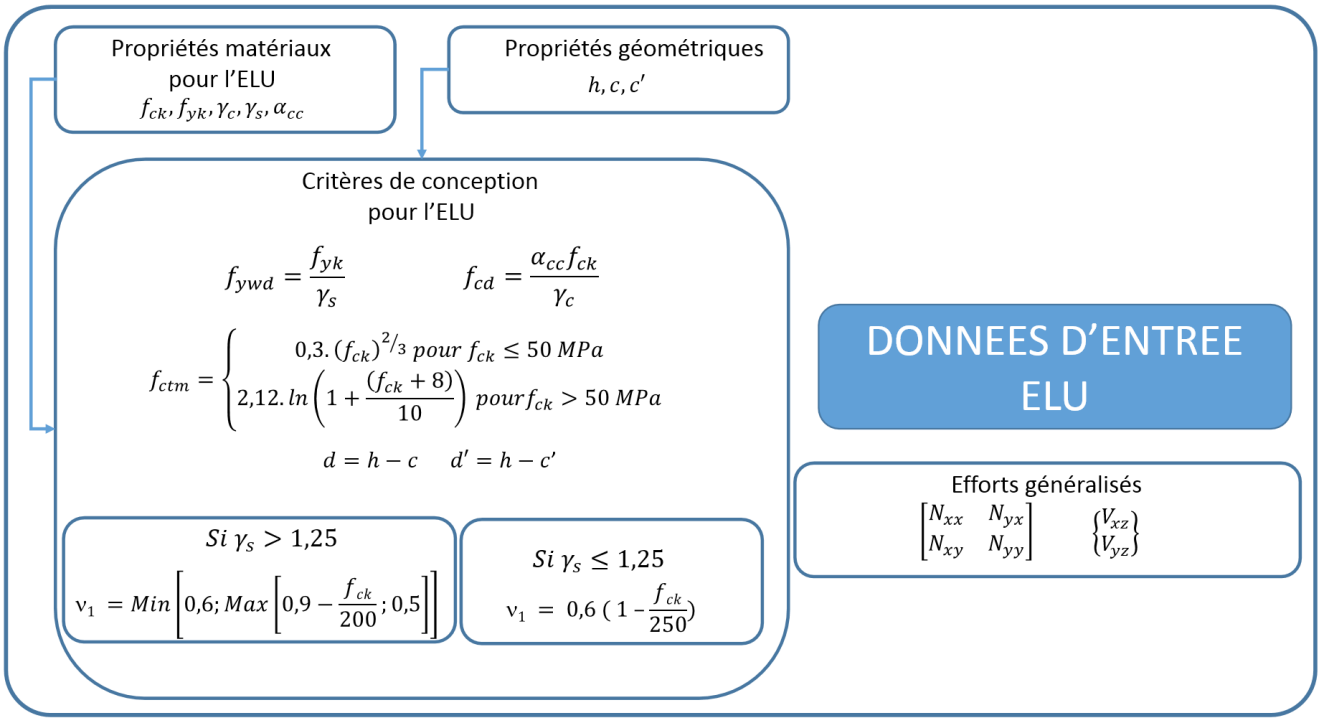


Figure 2.2-7: Données d'entrée pour un calcul d'aciers d'effort tranchant à l'ELU selon l'Eurocode 2

Le diagramme suivant donne la démarche de calcul des aciers d'effort tranchant à l'ELU.

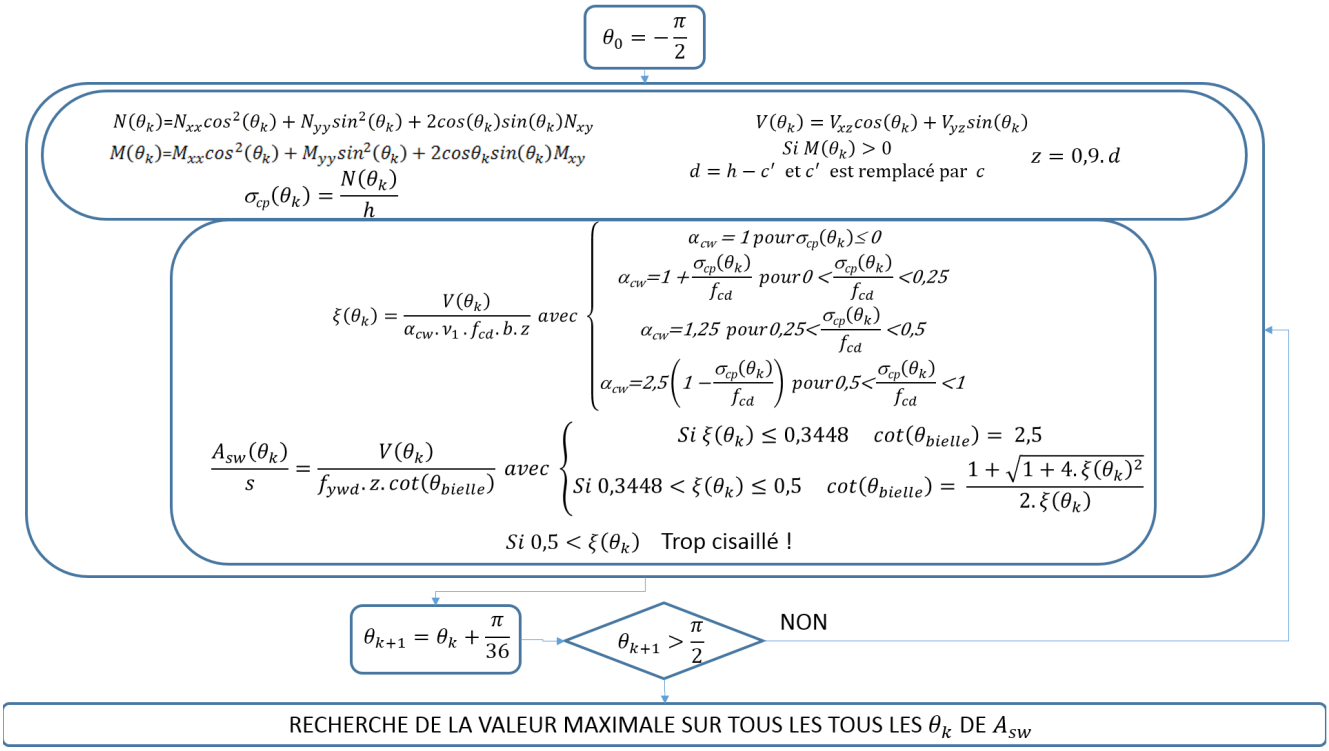


Figure 2.2-8: Algorithme de dimensionnement en flexion composée à l'ELU d'une section de coque

2.2.2.5 Détermination des aciers d'effort tranchant pour BAEL91

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour la codification BAEL91, le calcul des aciers transversaux vaut : $\frac{A_{sw}}{s}=\frac{V_{xz}^2+V_{yz}^2}{\sigma_s z}$ où

- le bras de levier z vaut : $z=0,9(h-c)$ avec h l'épaisseur de l'élément de structure et c l'enrobage (uniquement pour le BAEL91, une distinction est faite entre c et c' suivant le signe du moment de flexion) ;
- σ_s est la contrainte admissible dans les aciers : $\sigma_s=F_e/\gamma_s$

2.2.3 Détermination des aciers à l'ELS

2.2.3.1 Détermination des aciers de flexion

Le calcul du dimensionnement est une version simplifiée du calcul d'aciers de flexion d'une section rectangulaire. Seuls les aciers tendus sont calculés et un message est affiché si le béton est trop comprimé ainsi qu'une valeur numérique permettant de l'identifier . On fait appel au diagramme triangulaire pour modéliser le béton comprimé dans la figure 2.2-9. A noter que $b=1$ puisque l'on effectue le calcul sur la base de torseurs d'efforts généralisés par unité de longueur.

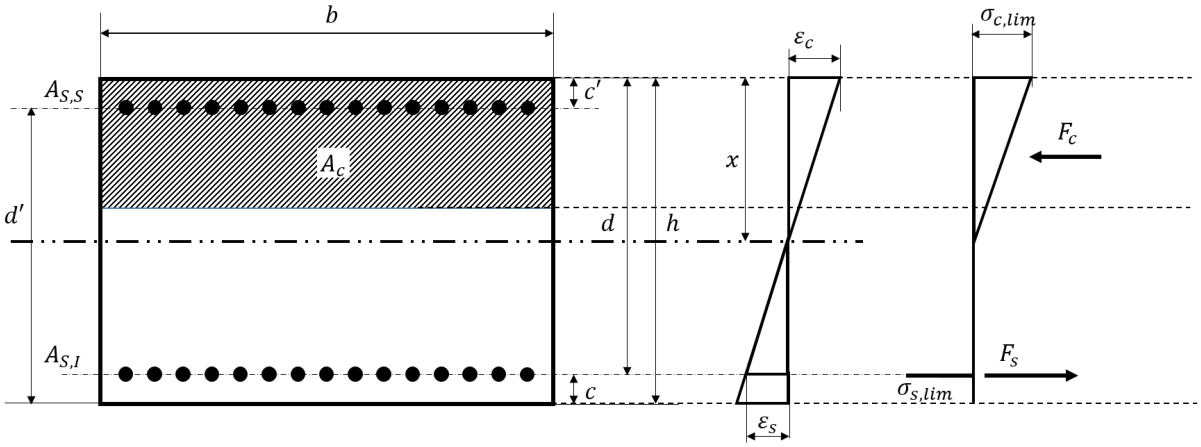


Figure 2.2-9: Équilibre d'une section en béton armé à l'ELS selon l'Eurocode 2

Les contraintes limites $\sigma_{s,\lim}$ et $\sigma_{c,\lim}$ sont définies par l'utilisateur, ainsi que le coefficient d'équivalence $\alpha_e=\frac{E_s}{E_c}$.

Le déroulement de calcul est le même quel que soit le règlement considéré.

$M_{inf}=M+N.(\frac{h}{2}-c)\,si\,M>0$, $M_{inf}=M+N.(\frac{h}{2}-c')\,si\,M<0$ et $\mu_{inf}=\frac{M_{inf}}{d^2.\sigma_{c,\lim}}$

En cohérence avec la figure 2.2-3, quand $M(\theta)>0$, le moment et le moment réduit sont calculés tels que : $M_{inf}(\theta)=M(\theta)+N(\theta).(\frac{h}{2}-c)$ et le moment réduit est : $\mu_{inf}(\theta)=\frac{M_{inf}(\theta)}{d^2.\sigma_{c,\lim}}$

De la même façon quand $M(\theta)<0$, en inversant le diagramme de déformation et la position du diagramme triangulaire en partie inférieure de la poutre symétriquement dans la figure 2.2-3, le moment et le moment réduit sont calculés tels que : $M_{\sup}(\theta)=M(\theta)+N(\theta).(\frac{h}{2}-c')$ et le moment réduit est : $\mu_{\sup}(\theta)=\frac{M_{\sup}(\theta)}{d^2.\sigma_{c,\lim}}$

A l'image de ce qui a été décrit à l'ELU, on s'attache ci-dessous à définir les valeurs limites des différents domaines.

- Le ratio de hauteur comprimée de la section au pivot A : $\alpha_{AB}=\frac{\alpha_e.\sigma_{c,\lim}}{\alpha_e.\sigma_{c,\lim}+\sigma_{s,\lim}}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Le moment réduit limite vaut alors : $\mu_{AB}=0{,}5\,\alpha_{AB.}\left(1-\frac{\alpha_{AB}}{3}\right)$
- Le ratio de hauteur comprimée de la section au pivot B : $\alpha_{BC}=1$
- Le moment réduit limite vaut alors : $\mu_{BC}=0{,}5\,\alpha_{BC.}\left(1-\frac{\alpha_{BC}}{3}\right)=\frac{1}{3}$

Les données d'entrée sont rappelées dans le schéma suivant :

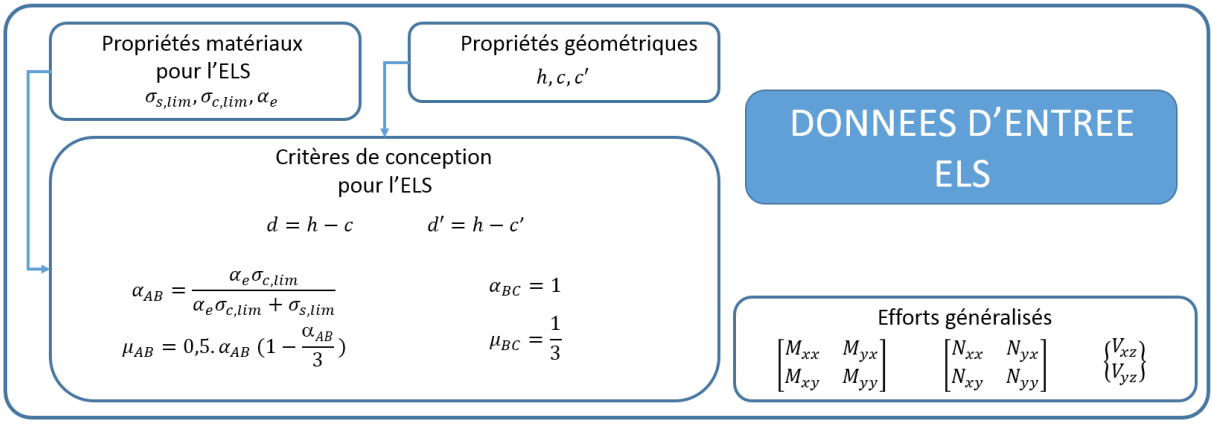


Figure 2.2-10: Données d'entrée pour le calcul des aciers de flexion à l'ELS suivant l'Eurocode 2

Le logigramme de calcul est donné ci-dessous :

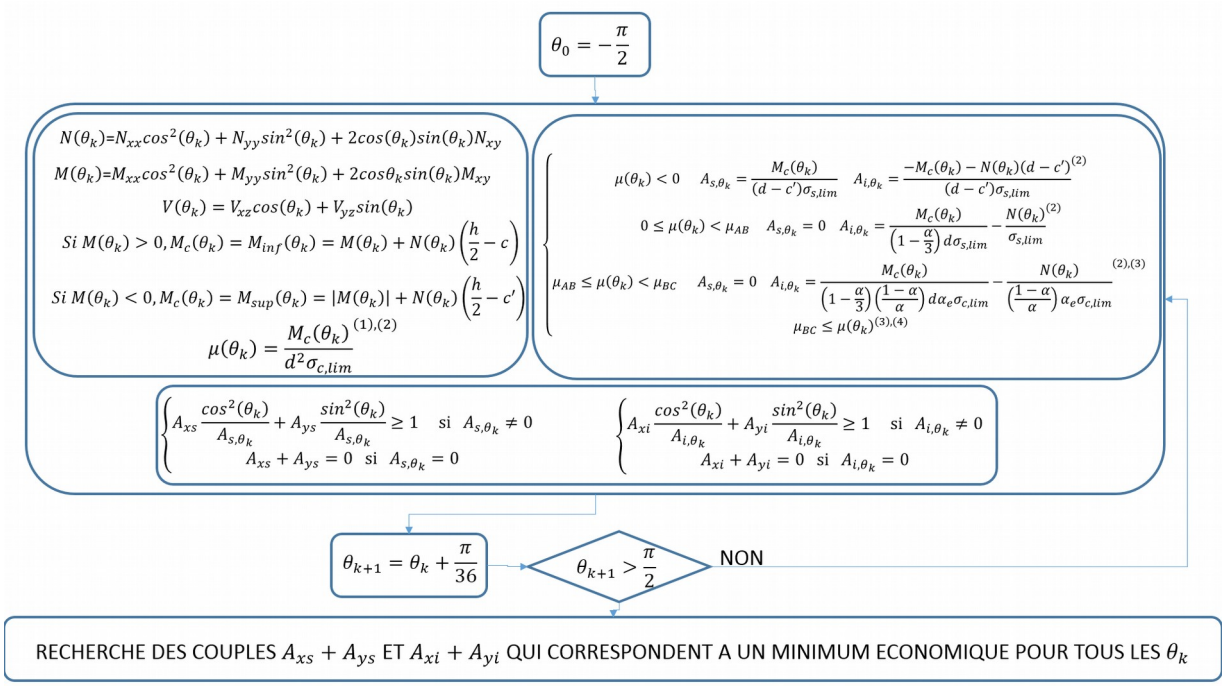


Figure 2.2-11: Algorithme des aciers de flexion à l'ELS selon l'Eurocode 2

Dans lequel le paramètre α est évalué comme suit :

$$\text{pour } 0 \le \mu(\theta_k) < \mu_{AB} \quad \alpha = 1 + 2.\cos(\pi/3 + \varphi/3)\sqrt{2\alpha_{e.}\mu_{inf.}\frac{\sigma_{c,\lim}}{\sigma_{s,\lim}} + 1}$$

Où φ est évalué à partir de la relation trigonométrique :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\cos(\varphi)=\frac{-1}{\left(2.\alpha_{e}.\mu_{inf}.\frac{\sigma_{c,\lim}}{\sigma_{s,\lim}}\right)^{3/2}}$$

Pour $\mu_{AB}\leq\mu(\theta_k)<\mu_{BC}$ $\alpha=\frac{3-\sqrt{(3(3-8\mu_{inf}))}}{2}$

Les annotations (2), (3) et (4) renvoient vers la suite du logigramme ci-dessous :

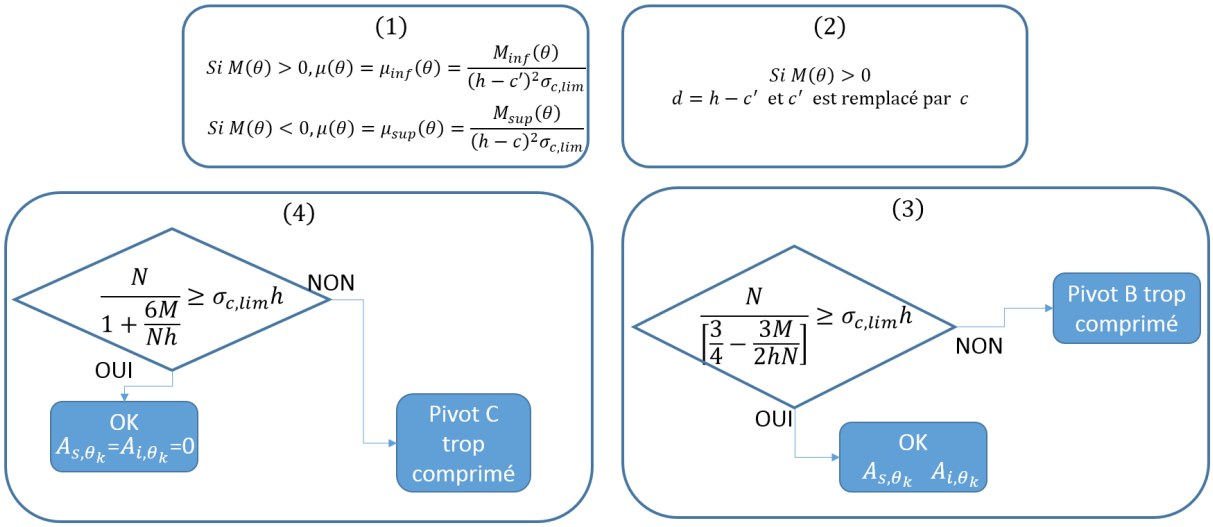


Figure 2.2-12: Vérifications et compléments associés à l'algorithme de calcul en flexion composée à l'ELU

Le calcul des aciers de flexion à l'ELS est strictement le même pour les trois codifications.

2.2.3.2 Détermination des aciers d'effort tranchant

Le calcul des aciers d'effort tranchant pour le code 'EC2' est conduit en prenant en compte les mêmes données d'entrée que le calcul à la flexion composée pour chaque angle θ indiquées précédemment pour l'ELS .

Les données d'entrée complémentaires pour le calcul des aciers d'effort tranchant sont :

- La contrainte de conception admissible pour le béton à l'effort tranchant à l'ELS : σ_{cw}
- La contrainte de conception admissible pour l'acier à l'effort tranchant à l'ELS : σ_{sw}
- Le coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant ν_1 :
  - $\nu_1=Min[0,6\,;\,0,9-\frac{f_{ck}}{200}]$
- La résistance moyenne en traction :
  - $f_{ctm}=0.30f_{ck}^{2/3}\ pour\ f_{ck}\leq 50$
  - $f_{ctm}=2.12.\ln\left(1+\frac{f_{ck}+8}{10}\right)\ pour\ f_{ck}>50$
- Le coefficient α_{cw} tenant compte de l'état de contrainte dans la membrure comprimée :
  - $\alpha_{cw}=\begin{cases}1 & si\ \ \sigma_{cp}\leq 0\\ 1+\frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{cw}} & si\ \ 0<\sigma_{cp}\leq 0{,}25\,\sigma_{cw}\\ 1{,}25 & si\ \ 0{,}25\,\sigma_{cw}<\sigma_{cp}\leq 0{,}5\,\sigma_{cw}\\ 2{,}5.\left(1-\frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{cw}}\right) & si\ \ 0{,}5\,\sigma_{cw}<\sigma_{cp}<1\,\sigma_{cw}\end{cases}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Où on désigne par σ_{cp} la contrainte moyennée sur toute la hauteur de section (y.c. les aciers et l'enrobage) dans le béton due à l'effort normal de calcul. Dans notre cas on considère donc que :

$$\sigma_{cp}=\frac{N(\theta)}{h}$$

Remarque : σ_{cp} est fixé à zéro lorsque `UTIL_COMPR = 'NON'`

- On retient dans les calculs des sections d'acier z le bras de levier entre le centre de gravité de la section de béton comprimée et le centre de gravité des aciers tendus. Par défaut on retient la valeur forfaitaire proposée par l'EuroCode 2 à savoir $z=0,9d$ avec $d=h-c \;\; si \;\; M(\theta>0)$ et $d=h-c' \;\; si \;\; M(\theta<0)$
- On note le paramètre d'inclinaison des bielles de béton pour les deux cas suivant :

$$\cot(\theta_0)=1,2+0,2\frac{\sigma_{cp}}{f_{ctm}} \;\; pour \;\; \sigma_{cp}>0$$

$$\cot(\theta_0)=max[1;1,2+0,9\frac{\sigma_{cp}}{f_{ctm}}] \;\; pour \;\; \sigma_{cp}<0$$

$$\xi=\frac{V(\theta)}{\alpha_{cw}b.z.\nu_1\sigma_{cw}}$$

$$\xi_{min}=\frac{\cot(\theta_0)}{1+\cot(\theta_0)^2}$$

- Si $\xi\leq\xi_{min}$ le béton participe au cisaillement et $\cot(\theta)=\cot(\theta_0)$
- Participation du béton au cisaillement :

$$V_{fd}=0,068.z.(1-\frac{\cot(\theta_0)}{4}).\sigma_{cw} \;\; pour \;\; \sigma_{cp}>0$$

$$V_{fd}=0,068.z.(1-\frac{0,36}{\cot(\theta_0)}).\sigma_{cw} \;\; pour \;\; \sigma_{cp}<0$$

- Si $\xi>\xi_{min}$ le béton est trop cisaillé.

Les aciers d'efforts tranchants sont enfin déterminés tels que :

$$\frac{A_{sw}}{s}=\frac{V-V_{fd}}{\sigma_{yw.z.}\cot(\theta)}$$

Le calcul des aciers d'effort tranchant à l'ELS est strictement le même pour les trois codification.

2.2.4 Algorithme d'optimisation de la section d'acier

L'algorithme utilisé vise à rechercher géométriquement l'optimum de ferraillage dans le repère orthonormé comportant A_{XS} en abscisse et A_{YS} en ordonnée.

La discrétisation de la rotation de la facette égale à $5°$, conduit à une numérotation de ces facettes de 1 à 36.

Dans le repère orthonormé utilisé, on positionne trois points, $P0$, $P1$ et $P2$. Les coordonnées du point $P1$ correspondent respectivement à la section d'acier de la facette 18 (correspondant à une valeur nulle de θ) et à la section d'acier de la facette 1 (correspondant à une valeur de θ égale à $-\pi/2$). Le point $P0$ est situé à la même abscisse que $P1$ mais avec une ordonnée très grande (définissant ainsi une verticale pratiquement infinie), et le point $P2$ est situé à la même ordonnée que $P1$ mais avec une abscisse très grande (définissant ainsi une horizontale pratiquement infinie).

On effectue alors une boucle sur toutes les facettes de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ en excluant la première ainsi que la facette correspondant à la valeur nulle de θ, facettes qui ont été implicitement traitées lors de la définition des points initiaux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On détermine alors les points d'intersection de la facette de référence avec les autres segments. Dans chaque cas, une comparaison de la position du point représentatif de la facette traitée par rapport au domaine de validité de la facette de référence permet de déterminer l'orientation du segment à prendre en compte pour la recherche des intersections.

A l'issue de ce traitement, on dispose des points représentatifs de la polyligne définissant le domaine de validité global.

En fin de traitement, on effectue un balayage sur les points retenus, afin de déterminer celui dont la somme des coordonnées est minimum (somme des armatures minimum). En cas d'identité (à 10^{-5} près en relatif), la facette de plus petit numéro est retenue.

2.2.5 Calcul de la densité volumique d'armature

A l'issue des calculs à ELS/ELU , les sections d'acier de flexion A_{XS} , A_{XS} , A_{XS} , A_{XS} et les sections d'acier d'effort tranchant A_{SW} sont exploitées pour calculer la densité volumique d'armature δ_{BA} en kg/m^3 si elles sont exprimées en m^2/m pour les aciers de flexion en m^2/m^2 pour les aciers d'effort tranchant suivant la formule suivante où ρ_{acier} est la masse volumique des aciers en kg/m^3 .

$$\delta_{BA}=\frac{(A_{XS}+A_{YS}+A_{XI}+A_{YI})+A_{SW}*h}{h}*\rho_{acier}$$

2.2.6 Calcul de l'indicateur de complexité de constructibilité

un indicateur de complexité visant à traduire la difficulté de mise en œuvre du ferraillage sur le terrain est calculé selon la formule suivante :

$$I_{c,i}=\frac{\alpha_{reinf}\cdot\frac{\rho_i}{\rho_{critic}}+\alpha_{shear}\cdot\frac{A_{sw,i}}{A_{sw,critic}}+\alpha_{stirrups}\cdot\frac{A_{sw,i}}{A_{sw,critic}}\cdot\frac{h_{eff,i}}{l_{crit}}}{\alpha_{reinf}+\alpha_{shear}+\alpha_{stirrups}}$$

Avec :

α_{reinf} est un c oefficient de pondération du ration de densité d'acier par mètre cube de béton ;
ρ_i est la densité volumique totale d'acier pour l'élément i calculée précédemment δ_{BA} ;
ρ_{critic} est la densité volumique d'acier critique pour l'élément i ;
α_{shear} est un c oefficient de pondération du ration de densité d'acier d'effort tranchant ;
$A_{sw,i}$ est la densité d'acier d'effort tranchant pour l'élément i ;
$A_{sw,critic}$ est la densité de ferraillage d'effort tranchant critique ;
$\alpha_{stirrups}$ est un c oefficient de pondération du ration de longueur des épingles d'acier d'effort tranchant ;
$h_{eff,i}=h-c-c'$ est la hauteur efficace considérée pour l'élément i ;
l_{crit} est la longueur critique des épingles d'aciers d'effort tranchant.

α_{reinf} , α_{shear} et $\alpha_{stirrups}$ ont pour valeur par défaut 1 , la densité volumique d'acier critique ρ_{critic} à pour valeur par défaut $150\,kg/m^3$, a densité de ferraillage d'effort tranchant critique $A_{sw,critic}$ a pour valeur par d »faut $60\,cm^2/m^2$ et la longueur critique des épingles d'aciers d'effort tranchant a pour valeur par défaut $1\,m$.

A vec de telles valeurs, on considère que la transition entre constructible et inconstructible est donné pour des valeurs de l_c entre 1 et $1{,}2$. Au-delà de $l_c=2$ on considère que la mise en œuvre du ferraillage est très compliqué et au-delà de $l_c=3$ on considère que la mise en œuvre du ferraillage est impossible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2.7 Commentaire relatif aux aciers comprimés

Aucun acier comprimé n'est calculé dans l'algorithme implanté, seuls les aciers tendus sont évalués.
Les sections d'acier en fonction de leur mode de travail tendu ou comprimé requiert d'être distingué car elles s'accompagnent de dispositions constructives spécifiques à celui-ci.
Un choix a donc été fait de maintenir les quantités d'intérêt produites aux 4 valeurs d'aciers de flexion et à la valeur d'acier d'effort tranchant et non de l'étendre à 8 valeurs d'aciers de flexion pour simplifier la visualisation.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Références bibliographiques

[1] Calcul automatique du ferraillage optimal des plaques et coques en béton armé. Alain CAPRA et Jean-Francis MAURY Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des travaux publics, n°367, 12/1978.

[2] Eurocode 2 part 1-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)