Estimation de la fatigue sous sollicitation aléatoire

Résumé :

Cette note présente deux méthodes de comptage de cycles de contraintes qui conduisent à une expression analytique du dommage mécanique engendré par un chargement aléatoire :

- méthode de comptage des pics de contraintes,
- méthode de comptage des dépassements d'un niveau donné.

La première méthode fait appel au signal, à sa dérivée première et à sa dérivée seconde. La seconde nécessite seulement la connaissance du signal et de sa dérivée première.

Les cycles de contraintes étant connus par ces méthodes, on détermine le dommage moyen sur la durée du signal, à l'aide de la méthode de Wöhler.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Évaluation du dommage....4
2.1 Diagramme d'endurance....4
2.2 Coefficient de concentration élasto-plastique....4
3 Nombre de cycles de contraintes....5
3.1 Rappels : moments spectraux et facteur d'irrégularité....5
3.2 Méthode de comptage des pics de contraintes....5
3.3 Méthode de comptage des dépassements de niveau....7
4 Estimation statistique du dommage....7
4.1 Dommage moyen....7
5 Conclusion....8
6 Bibliographie....8
7 Description des versions du document....8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

L'évaluation du dommage se fonde sur l'utilisation de courbes d'endurance du matériau, associant une variation de contraintes d'amplitude donnée à un nombre de cycles admissibles défini par une courbe de fatigue.

Les courbes de fatigue du matériau sont établies en soumettant des éprouvettes à des sollicitations sinusoïdales d'amplitude constante depuis le début de l'essai jusqu'à la rupture.

Pour utiliser ces courbes à partir d'un chargement réel, il est nécessaire d'identifier des cycles dans l'historique des contraintes, ce qui se fait par des méthodes de comptage de cycles. De nombreuses méthodes existent : le document [R7.04.01] présente deux méthodes de comptage de cycles dans le cas d'un chargement réel déterministe.

Cependant, de nombreux chargements mécaniques réels affectant les composants nucléaires présentent un caractère aléatoire qui conduit à privilégier l'emploi de méthodes statistiques pour évaluer le dommage subi par ces structures.

Certaines méthodes de comptage de cycles de contraintes ont fait l'objet d'une interprétation statistique :

- méthode de comptage des pics de contraintes
- méthode de comptage de dépassements d'un niveau donné.

Le champ d'application de ces deux méthodes [bib1][bib2] est limité à des chargements aléatoires ergodiques (l'analyse d'un seul échantillon suffit à caractériser les paramètres du processus) et gaussiens (les valeurs du signal mesuré sont distribuées selon une loi normale).

D'autre part, l'évolution du signal est assimilée à un processus aléatoire caractérisé par ses paramètres statistiques (moments spectraux d'ordre 0, 2 et 4) [R7.10.01].

Dans les deux cas, l'événement statistique à prendre en compte est simple à définir :

- un pic de contraintes est défini par une pente nulle et une accélération négative pour un pic positif, une accélération positive pour un pic négatif,
- un dépassement de niveau de contraintes S_0 est caractérisé par une valeur du signal égale à S_0 et par une pente positive.

Les cycles de contraintes étant connus par ces méthodes, on passe alors au calcul du nombre de cycles à la rupture à partir d'une courbe de fatigue. Les courbes de Wöhler qui sont établies expérimentalement ont été approchées par des expressions mathématiques diverses caractérisant plus ou moins correctement les différentes zones de ces courbes.
Trois expressions mathématiques sont disponibles dans *Code_Aster* : une forme discrétisée et deux formes analytiques.

Connaissant le nombre de cycles de contraintes (donné par une de ces deux méthodes de comptage de cycles) et le dommage élémentaire associé (déterminé par interpolation sur la courbe de Wöhler du matériau), on peut calculer un dommage moyen sur la durée du signal.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Évaluation du dommage

Pour une structure sans défaut géométrique et soumise à une contrainte alternée pure, le nombre de cycles à la rupture est déterminé à partir d'un diagramme d'endurance, encore appelé courbe de Wöhler ou courbe $S-N$.

Le nombre de cycles à la rupture est déterminé par interpolation de la courbe de Wöhler du matériau pour un niveau de contrainte alternée (unidimensionnel) donnée (à chaque cycle élémentaire correspond un niveau d'amplitude de contrainte $Ds=|s_{max}-s_{min}|$ et une contrainte alternée $S_{alt}=1/2\mathrm{Ds}$).

Le dommage d'un cycle élémentaire est égal à l'inverse du nombre de cycles à la rupture :

$$D=\frac{1}{N_{r(S_{alt})}}$$

2.1 Diagramme d'endurance

Le diagramme d'endurance, également appelé courbe de Wöhler ou courbe $S-N$ (courbe contraintes-nombre de cycles à la rupture) est obtenu expérimentalement en soumettant des éprouvettes à des cycles d'efforts périodiques (généralement sinusoïdaux) d'amplitude normale σ et de fréquences constantes, et en notant le nombre de cycles N_r au bout duquel la rupture se produit [R7.04.01].

Les différentes formes mathématiques de la courbe de Wöhler sont décrites dans le document "Estimation de la fatigue à grands nombres de cycles", [R7.04.01] ainsi que la façon de les introduire dans *Code_Aster*.

2.2 Coefficient de concentration élasto-plastique

Il peut également être nécessaire de pondérer la valeur de la contrainte déterminée par la méthode de comptage par le coefficient de concentration élasto-plastique K_e.

Le coefficient de concentration élasto-plastique K_e (visé aux articles B3234.3 et B3234.5 du RCC_M [bib4]) est défini comme étant le rapport entre l'amplitude de déformation réelle et l'amplitude de déformation déterminée par l'analyse élastique.

La valeur du coefficient K_e est donnée dans le document [R7.04.01].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Nombre de cycles de contraintes

3.1 Rappels : moments spectraux et facteur d'irrégularité

On appelle moment spectral d'ordre i la quantité suivante [R7.10.01] :

$$\lambda_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i G_{SS}(\omega)\, d\omega$$

où ω est la pulsation et G_{SS} la densité spectrale de puissance ou DSP.

On a en particulier : $\lambda_0 = s_S^2 \lambda_2 = s_{S'}^2 \lambda_4 = s_{S''}^2$ qui sont les écarts type de S et de ses premières dérivées.

Le **facteur d'irrégularité** traduit l'allure fréquentielle du signal. Compris entre 0 et 1, il tend vers 1 lorsque le processus est à bande étroite, en revanche il tend vers 0 pour un processus large bande.

Son expression est :

$$I = \frac{s_{S'}^2}{s_S s_{S''}} = \sqrt{\frac{\lambda_2^2}{\lambda_0 \lambda_4}}$$

Nous rappelons ces définitions car l'évolution du signal est assimilée à un processus aléatoire caractérisé par ses paramètres statistiques (moments spectraux d'ordre 0, 2 et 4).

Pour la méthode de comptage des pics de contraintes, le signal aléatoire est entièrement caractérisé par les trois moments spectraux d'ordre 0, 2 et 4.

Dans le cas de la méthode de comptage des dépassements de niveau, les moments spectraux d'ordre 0 et 2 suffisent à caractériser le signal aléatoire.

De façon pratique, ces valeurs sont déterminées par la commande POST_DYNA_ALEA [U4.76.02] qui opère des traitements statistiques sur un chargement aléatoire. La définition des différents paramètres est donnée dans le document [R7.10.01].

L'opérateur de calcul de la fatigue dans le domaine aléatoire POST_FATI_ALEA [U4.67.05] utilise les valeurs des trois moments spectraux calculés par POST_DYNA_ALEA et calcule le dommage moyen et l'écart-type du dommage par les méthodes décrites dans ce document.

3.2 Méthode de comptage des pics de contraintes

Le principe de cette méthode consiste à compter les maximums locaux (en valeur absolue) situés de part et d'autre de la valeur moyenne des contraintes.

Le signal étant gaussien stationnaire, centré par rapport à sa valeur moyenne, la distribution des pics est symétrique par rapport à cette moyenne. On s'intéresse donc à la **répartition des pics positifs**. Dans le cas général, la distribution des pics d'amplitude S positive s'écrit sous la forme :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$P_{pic}^{+}(S)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,s_S(1+I)}\left[\sqrt{1-I^2}\,e^{\frac{S^2}{2s_S^2(1-I^2)}}+\frac{IS}{s_S}e^{\frac{S^2}{2s_S^2}}\int_{-\infty}^{\alpha}e^{\frac{-t^2}{2}}dt\right]$$

$$\text{avec}\begin{cases} I=\dfrac{\sigma_{S'}^2}{\sigma_S\sigma_{S''}} \\ \alpha=\dfrac{S}{\sigma_S}\dfrac{I}{\sqrt{1-I^2}} \end{cases}$$

Cette distribution des pics positifs se simplifie dans le cas des signaux pour lesquels le facteur d'irrégularité vaut $I=0$ ou $I=1$. :

- Signal à large bande : loi de Gauss ou loi normale $(I=0)$

$$P_{pic}^{+}(S)=\frac{2}{\sqrt{2\pi\,\sigma_{S^2}}}e^{-\frac{S^2}{2\sigma_{S^2}}}$$

- Signal à bande étroite : loi de Rayleigh $(I=1)$

$$P_{pic}^{+}(S)=\frac{S}{\sigma_{S^2}}e^{-\frac{S^2}{2\sigma_{S^2}}}$$

La méthode de comptage de pics de contraintes associe à chaque pic d'amplitude positive S un cycle d'amplitude $\Delta S=2S$ (on a donc directement $S=Salt$).

Le nombre de pics d'amplitude positive s'écrit : $n_{pic}^{+}(S)=P_{pic}^{+}(S)\times N_{pic}^{+}$

où $N_{pic}^{+}=\frac{1}{4}(1+I)\times\frac{1}{\pi}\frac{\sigma S''}{\sigma_{S'}}$ = nombre moyen de pics positifs par unité de temps.

D'où le nombre N de cycles à prendre en compte est : $N(S)=\frac{1+I}{4\pi}\frac{\sigma_{S''}}{\sigma_{S'}}P_{pic}^{+}(S)$

Remarque :

On remarque bien que l'expression du nombre N de cycles à prendre en compte ne dépend que de s_S (pour le calcul du facteur d'irrégularité I), $\sigma_{S'}$ et $\sigma_{S''}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Méthode de comptage des dépassements de niveau

Cette méthode nécessite le découpage des variations de contrainte en classes d'amplitude.

Le nombre de cycles $N(S)$ est obtenu à partir de la différence des nombres de dépassements de niveau avec une pente positive entre deux classes successives, en partant de la classe d'amplitude maximale.

Pour un processus gaussien centré l'expression de $N(S)$ est : $N(S)=\frac{1}{\pi}\frac{\sigma_{S'}}{\sigma_S}e^{-\frac{S^2}{2\sigma_S^2}}$

Remarques :

L'expression du nombre N de cycles à prendre en compte ne nécessite que la connaissance de σ_S et $\sigma_{S'}$ (indépendance vis à vis de $\sigma_{S''}$).

Dans cette méthode n'intervient pas le coefficient d'irrégularité I .

4 Estimation statistique du dommage

Le dommage mécanique est calculé en utilisant la règle de cumul linéaire de Miner.

Le dommage D engendré par N cycles de demi amplitude S s'exprime par $D=\frac{N}{Nr(S)}$

où $Nr(S)$ est le nombre admissible de cycles déterminé par la courbe d'endurance du matériau.

Le dommage mécanique est une variable aléatoire dont on détermine la moyenne.

4.1 Dommage moyen

Le dommage moyen s'écrit sous la forme de l'espérance mathématique :

$E(D)=T\int_{S_{\min}}^{S_{\max}}\frac{N(S)}{N_r(S)}dS$ où T est la durée du signal

Les deux méthodes de comptage proposées calculent le nombre de cycles $N(S)$ à partir de contraintes d'amplitude positive d'où $S_{\min}=0$ (sauf lorsque la courbe de Wöhler est donné sous la forme "zone courante", dans quel cas $S_{\min}=S_l$ avec S_l limite d'endurance du matériau).

Par ailleurs, les lois de distributions utilisées étant continues, $S_{\max}=\infty$. Cependant, l'expérience montre que l'expression à intégrer s'atténue rapidement et on prend donc $S_{\max}=10\,\sigma_S$. où σ_S est l'écart-type du signal.

Le calcul de $E(D)$ est réalisé par intégration numérique, par la méthode des trapèzes en prenant pour pas d'intégration $\frac{S_{\max}-S_{\min}}{300.}$.

Remarque :

Dans le cas de la méthode de comptage de dépassements de niveau et pour une courbe de Wöhler exprimée sous la forme mathématique proposée par Basquin, le dommage moyen par unité de temps à une expression analytique (cette expression n'est pas utilisée dans la commande `POST_FATI_ALEA`).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Conclusion

Dans le cas d'un chargement gaussien, ergodique et stationnaire, deux méthodes de comptage de cycles trouvent une interprétation statistique et fournissent une expression analytique du dommage moyen, ne faisant intervenir que la formulation de la courbe d'endurance du matériau et les écart-types du signal et de ses dérivées premières et secondes.

Dans *Code_Aster*, le calcul du dommage sous sollicitation aléatoire est effectué par la commande POST_FATI_ALEA [U4.67.05].

L'utilisateur peut déterminer le dommage par la méthode de comptage des pics de contraintes (COMPTAGE = 'PIC') ou par la méthode de comptage de dépassements d'un niveau donné (COMPTAGE = 'NIVEAU').

Selon la méthode adoptée, le signal aléatoire devra être introduit par la donnée des moments spectraux d'ordre 0 et 2 ou par la donnée des moments spectraux d'ordre 0, 2 et 4 (mots clé MOMENT_SPEC_0, MOMENT_SPEC_2 et MOMENT_SPEC_4). Les valeurs des moments spectraux peuvent également être récupérées dans une table créée par POST_DYNA_ALEA [U4.76.02] (mot clé TABLE).

La courbe de Wöhler du matériau peut être introduite sous trois formes distinctes (conformément à la commande POST_FATIGUE [U4.67.01] (calcul du dommage à grands nombres de cycles) et le logiciel POSTDAM).

La grandeur déterminée est le dommage moyen sur la durée du signal qui est stocké dans une table de type POST_FATI_ALEA.

6 Bibliographie

1) P. MORILHAT : Faiençage thermique : Estimation du dommage mécanique. Note HP-14/90.07

2) P. MORILHAT : Mécanique aléatoire : Estimation statistique du dommage mécanique engendré par des chargements non stationnaires. Note HP-14/91.19A

3) A. DUMOND : Opérateur POST_DYNA_ALEA [R7.10.01]

4) RCC_M Edition 1983

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	A.M.DONORE, P.MORILHAT EDF-R&D/MMN - EDF-R&D/AMV	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)