Estimation de la durée de vie en fatigue à grand nombre de cycles et en fatigue oligocyclique

Résumé :

La plupart des structures industrielles sont soumises à des efforts variables dans le temps qui, répétés un grand nombre de fois peuvent conduire à leur rupture par fatigue. On présente dans cette note les principales fonctionnalités des commandes POST_FATIGUE [U4.83.01] et/ou CALC_FATIGUE [U4.83.02] et/ou CALC_CHAMP [U4.81.04] qui permettent d'estimer la limite d'endurance et le cumul de dommage d'une pièce.

Les diverses méthodes disponibles sont :

- cumul linéaire : des méthodes basées sur des essais uniaxiaux (méthodes de Wöhler, Manson-Coffin et Taheri).
  Ces méthodes ont pour point commun de déterminer une valeur de dommage à partir de l'évolution au cours du temps d'une composante **scalaire** caractérisant, pour le calcul du dommage, l'amplitude de contraintes ou de déformations de la structure.
  Pour ce faire, il faut extraire par une méthode de comptage de cycles, les cycles élémentaires de chargement subis par la structure, déterminer le dommage élémentaire associé à chaque cycle et déterminer le dommage total par un règle de cumul linéaire ;
- cumul non linéaire : méthode de Lemaître et méthode de Lemaître-Sermage
  Ces méthodes permettent de calculer le dommage D à chaque instant t, à partir de la donnée du tenseur des contraintes $\sigma(t)$ et de la déformation plastique cumulée $p(t)$;
- limite d'endurance : critères de Crossland et Dang Van Papadopoulos
  Ces critères s'appliquent à des chargements uniaxiaux ou multiaxiaux en contraintes **périodiques**. Ils fournissent une valeur de critère indiquant s'il y a fatigue ou non. Les contraintes équivalentes définies pour ces critères peuvent aussi servir pour calculer le cumul de dommage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Méthodes de Wöhler, Manson-Coffin et Taheri....5
2.1 Extraction des pics....5
2.2 Méthodes de comptage de cycles....6
2.2.1 Méthode RAINFLOW....6
2.2.2 Méthode RCC_M....11
2.2.3 Méthode "naturel"....13
2.3 Calcul du dommage : méthode de Wöhler....14
2.3.1 Diagramme d'endurance....15
2.3.2 Influence des paramètres géométriques sur l'endurance....17
2.3.2.1 Coefficient de concentration de contraintes....17
2.3.2.2 Coefficient de concentration élasto-plastique....18
2.3.3 Influence de la contrainte moyenne....18
2.4 Calcul du dommage : méthode de Manson-Coffin....19
2.5 Calcul du dommage : méthode de Taheri....22
2.5.1 Méthode Taheri-Manson....22
2.5.2 Méthode Taheri-Mixte....23
2.6 Calcul du dommage total....24
2.7 Conclusion....24
3 Calcul du dommage de Lemaître généralisé....25
3.1 La loi de Lemaître généralisée....25
3.2 Identification des paramètres de la loi de Lemaître généralisée....26
4 Critères de Crossland et Dang Van Papadopoulos....28
4.1 Critère de Crossland....28
4.2 Critère de Dang Van Papadopoulos....29
4.3 Calcul d'une valeur de dommage....32
5 Conclusion....33
6 Bibliographie....34
7 Description des versions du document....34

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

L'expérience industrielle montre que les ruptures de pièces de machines ou de structures en fonctionnement normal sont le plus souvent dues à la fatigue. Son caractère progressif masqué conduit très souvent à une rupture brutale.

On entend par fatigue la modification des propriétés des matériaux consécutive à l'application de cycles d'efforts, cycles dont la répétition peut conduire à la rupture des pièces constituées avec ces matériaux [bib1].

Diverses méthodes sont disponibles pour l'évaluation du dommage. La deuxième partie de ce document est consacrée à la présentation des plus anciennes qui sont des méthodes basées sur des essais uniaxiaux : méthode de Wöhler, méthode de Manson-Coffin et plus récemment méthodes proposées par S. Taheri (EDF-R&D/AMA).

Ces méthodes ont pour point commun de déterminer une valeur de dommage à partir de l'évolution au cours du temps d'une composante scalaire caractérisant, pour le calcul du dommage, l'état de contraintes ou de déformations de la structure.

L'évaluation du dommage se fonde sur l'utilisation de courbes de fatigue du matériau (Wöhler ou Manson-Coffin), associant une variation de contrainte d'amplitude donnée à un nombre de cycles admissibles.

Pour utiliser ces courbes à partir d'un chargement uniaxial réel, il est nécessaire de traiter l'histoire des contraintes ou des déformations en identifiant des cycles élémentaires (cf. [§2.2]).

La difficulté de définir un cycle pour un signal complexe explique la profusion des méthodes de comptage apparues dans la littérature [bib2].

Deux méthodes parmi les plus couramment utilisées ont été introduites dans le *Code_Aster* :

- comptage des étendues en cascade ou méthode RAINFLOW,
- règle RCC_M.

On y ajoute une troisième méthode que nous appelerons méthode de comptage "naturel" et qui respecte l'ordre d'application des cycles de chargement.

Pour chaque cycle élémentaire, on évalue un dommage élémentaire à l'aide de méthodes fondées sur les courbes de Wöhler, de Manson-Coffin ou les deux simultanément.

Pour la méthode de Wöhler (cf. [§2.3]) l'utilisateur peut corriger la contrainte à intégrer dans la courbe de Wöhler par :

- un facteur de concentration de contraintes K_T, pour tenir compte de la géométrie de la pièce,
- un coefficient de concentration élastoplastique K_e,
- une correction de Goodman ou Gerber dans le diagramme de Haigh pour tenir compte de la contrainte moyenne du cycle.

D'autre part, on propose de définir la courbe de Wöhler sous trois formes différentes, une forme discrétisée point par point et deux formes analytiques.

La méthode de Manson-Coffin (cf. [§2.4]) s'applique à des chargements en déformations. La courbe de Manson-Coffin est définie sous une forme unique, forme discrétisée point par point.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les méthodes de Taheri (cf. [§2.5]) s'appliquent également à des chargements en déformations et nécessitent la donnée de la courbe de Manson-Coffin et éventuellement de la courbe de Wöhler. Leur particularité est de tenir compte de l'ordre d'application des cycles élémentaires de chargement à la structure, contrairement aux deux autres méthodes.

Remarque :

Trois méthodes d'extraction des cycles élémentaires sont disponibles : méthode de Rainflow, règle de RCC_M et comptage "naturel".

Les deux premières méthodes ne tiennent pas compte de l'ordre d'application des cycles ce qui est sans importance pour le calcul du dommage par les méthodes de Wöhler ou Manson-Coffin.

Pour le calcul du dommage par les méthodes de Taheri, il faut utiliser la méthode d'extraction des cycles par comptage "naturel" [§2.2.3] qui respecte l'ordre d'application des cycles.

Pour l'ensemble de ces méthodes le calcul du dommage total subi par la structure est déterminé par une méthode de cumul, la règle de Miner.

La troisième partie de ce document présente les méthodes de Lemaître et Lemaître-Sermage qui sont des méthodes "analytiques" permettant de calculer le dommage D (en chaque instant t) à partir de la donnée du tenseur de contraintes $\sigma(t)$ et de la déformation plastique cumulée $p(t)$. Ces deux méthodes s'appliquent à des chargements en contraintes quelconques (uniaxiaux ou multiaxiaux).

Une règle de cumul linéaire peut être utilisée pour déterminer le dommage total subi par la structure.

Enfin, les critères de Crossland et Dang Van Papadopoulos sont présentés en quatrième et dernière partie de ce document. Ils s'appliquent à des chargements quelconques (uniaxiaux ou multiaxiaux) en contraintes et périodiques. Ils fournissent une valeur de critère indiquant s'il y a fatigue ou non.

A partir de la valeur du critère, on peut spécifier une composante scalaire caractérisant l'état de la structure pour le calcul du dommage et déterminer une valeur de dommage en utilisant la courbe de Wöhler du matériau.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Méthodes de Wöhler, Manson-Coffin et Taheri

2.1 Extraction des pics

L'utilisateur fournit à *Code_Aster* une fonction qui définit l'histoire (scalaire) du chargement en un point donné. Pour cela, il dispose du mot clé HISTOIRE.

Sur cette histoire du chargement, qui peut être complexe, une première opération d'extraction des pics est réalisée. Cette opération consiste à réduire l'histoire de chargement aux seuls pics fondamentaux.

Remarque :

En fatigue, on dénomme chargement en un point donné la valeur de la réponse de la structure en ce point.
Dans l'utilisation des courbes de Wöhler, il s'agit de contrainte en ce point.
Dans l'utilisation des courbes de Manson-Coffin, il s'agit de déformation en ce point.
L'histoire de chargement est donc l'évolution au cours du temps d'une contrainte, ou d'une déformation.

Si la fonction reste croissante ou décroissante sur plus de deux points consécutifs, on supprime les points intermédiaires pour ne garder que les deux points extrêmes.

On supprime également de l'histoire du chargement les points pour lesquels la variation de la valeur de la contrainte ou de la déformation est inférieure à un certain niveau choisi par l'utilisateur. Cela revient à appliquer un filtre à l'histoire du chargement. La valeur du niveau du filtre est introduite par l'utilisateur sous le mot clé DELTA_OSCI.

Pour illustration considérons l'histoire de chargement suivante :

N° point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Instant	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	
Chargement	4.	7.	2.	10.	9.6	9.8	5.	9.	3.	4.	2.	2.4	2.2	12.	

N° point	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Instant	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.
Chargement	5.	11.	1.	4.	3.	10.	6.	8.	12.	4.	8.	1.	9.	4.	6.

L'extraction des pics de cette histoire de chargement, avec une valeur de delta de 0.9 conduit à détruire toutes les oscillations d'amplitude inférieure à 0.9. Ce qui conduit à l'histoire de chargement suivante :

N° point	1	2	3	4	7	8	9	10	11	14	15	16	17
Instant	0.	1.	2.	3.	6.	7.	8.	9.	10.	13.	14.	15.	16.
Chargement	4.	7.	2.	10.	5.	9.	3.	4.	2.	12.	5.	11.	1.

N° point	18	19	20	21	23	24	25	26	27	28	29
Instant	17.	18.	19.	20.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.
Chargement	4.	3.	10.	6.	12.	4.	8.	1.	9.	4.	6.

Remarque :

Notons ch la valeur du chargement ; ch peut être une contrainte ou une déformation.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On a supprimé de l'histoire de chargement :

- le point 5 car $\Delta ch = |ch(5)-ch(4)| < 0.9$,
- le point 6 car $\Delta ch = |ch(6)-ch(4)| < 0.9$,
- le point 12 car $\Delta ch = |ch(12)-ch(11)| < 0.9$,
- le point 13 car $\Delta ch = |ch(13)-ch(11)| < 0.9$.

De même on supprime le point 22 car l'histoire de chargement est croissante entre les points $21,22$ et 23 . Donc on ne garde que les points extrêmes.

2.2 Méthodes de comptage de cycles

Au cours de leur vie, les structures industrielles sont généralement soumises à des chargements complexes dont les niveaux de sollicitations sont variables.

Les méthodes de comptage de cycles permettent d'extraire de l'histoire de chargement, des cycles élémentaires en fonction de divers critères.

Code_Aster propose trois méthodes distinctes dont deux méthodes non statistiques parmi les méthodes les plus couramment utilisées.

2.2.1 Méthode RAINFLOW

La méthode de comptage des étendues en cascade plus souvent appelée méthode de RAINFLOW, définit des cycles qui physiquement correspondent à des boucles d'hystérésis dans le plan contraintes-déformations. Dans la littérature, on recense plusieurs variantes de cette méthode.

L'algorithme mis en œuvre dans *Code_Aster* est pour l'essentiel celui proposé par la recommandation AFNOR A 03-406 de novembre 1993 [bib3] (avec des particularités qui sont précisées au cours de la présentation du détail de l'algorithme) et se décompose en trois étapes :

- Une **première étape** qui consiste à réarranger l'histoire du chargement $\sigma(t)$ ou $\varepsilon(t)$ de telle sorte que le chargement débute par la valeur maximale, en valeur absolue, du chargement.

Remarque :

> *Dans la recommandation AFNOR A 03-406, il n'est pas fait état d'un réarrangement de l'histoire de chargement. Ce réarrangement est cependant effectué dans le logiciel POSTDAM [bib2] et repris dans Code_Aster.*

- La **seconde étape** consiste à extraire les cycles élémentaires de l'histoire de chargement ainsi réarrangée.

  La méthode consiste à s'appuyer sur quatre points successifs de l'histoire de chargement $\left(ch(i),\ i=1,\ \text{Nbpoint}\right)$.

  On note :

$$X = |ch(i+1)-ch(i)| \text{ et } Y = |ch(i+2)-ch(i+1)|$$
$$\text{et } Z = |ch(i+3)-ch(i+2)|.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tant que Y est strictement supérieur à X ou à Z, on parcourt l'histoire du chargement en se déplaçant d'un point vers la droite (ce qui revient à incrémenter la valeur de i).

Dès que Y est inférieur ou égal à X et inférieur ou égal à Z, on considère que l'on a rencontré un cycle élémentaire qui se définit par les deux points $(i+1)$ et $(i+2)$. L'amplitude du cycle est donnée par $\Delta ch = |ch(i+1)-ch(i+2)|$.

Lorsque le cycle est extrait on supprime les deux points de l'histoire de chargement et on poursuit l'algorithme.

- La **troisième étape** consiste à traiter le résidu, c'est-à-dire l'histoire de chargement restante après l'étape d'extraction des cycles.

  Pour ce faire, on rajoute le même résidu à sa suite moyennant éventuellement certaines précautions au niveau du raccordement suivant les valeurs des extrema considérés ainsi que de la valeur de la première et de la dernière pente du résidu.

  Au dernier point du résidu succède le premier point du cycle. De ce fait, les points considérés peuvent ne plus apparaître comme des extrema. Dans le cas où cela se produit, il convient de les éliminer. On rencontre huit cas différents. Pour les traiter explicitement, appelons R_1 et R_2 les deux premiers points du résidu et R_{n-1} et R_n ses deux derniers points.

Remarques :

La recommandation AFNOR A 03-406 fait également état d'un éventuel pré-traitement du signal, qui consisterait en un filtrage du signal (suppression des parasites) et en une quantification de l'histoire de chargement.

Le filtrage du signal est possible, à la demande de l'utilisateur (voir [§2.1]. Extraction des pics).

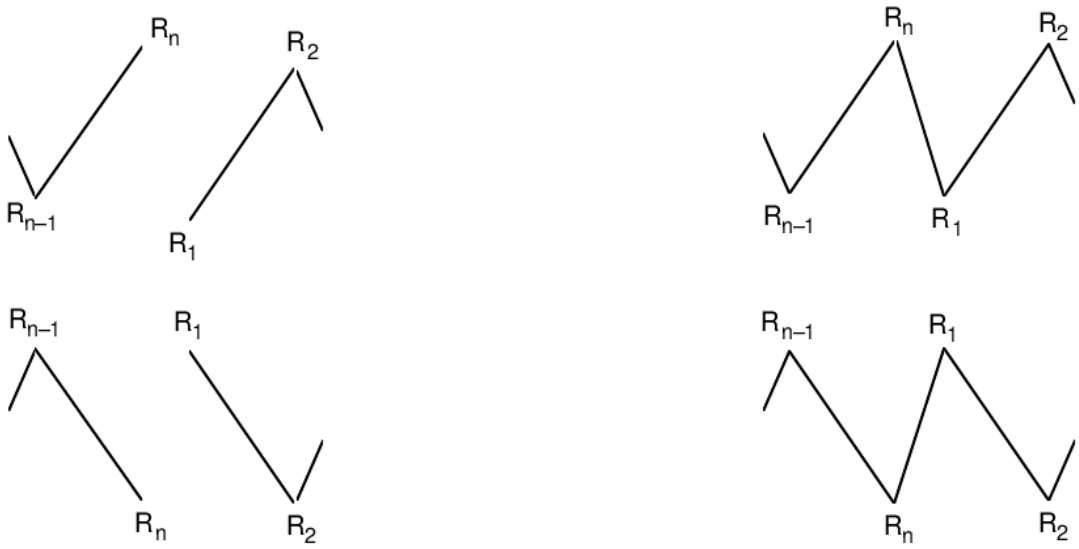
La quantification du signal peut être utile pour la rapidité de l'exploitation des résultats de l'analyse de fatigue. Pratiquement, la quantification du signal consiste à découper l'étendue maximale du signal en classes d'intervalles de largeur constante appelées pas, et ramener à une valeur représentative d'une classe donnée (sa valeur moyenne en général) toutes les valeurs situées dans cette classe. Cette possibilité de pré-traitement du signal quant à elle, n'est pas disponible dans Code_Aster.

Dans le cas spécial où l'histoire de chargement est constante (par exemple, chargement moyen appliqué), Code_Aster va compter l'histoire de chargement entière comme un cycle d'amplitude nulle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cas rencontré Raccordement

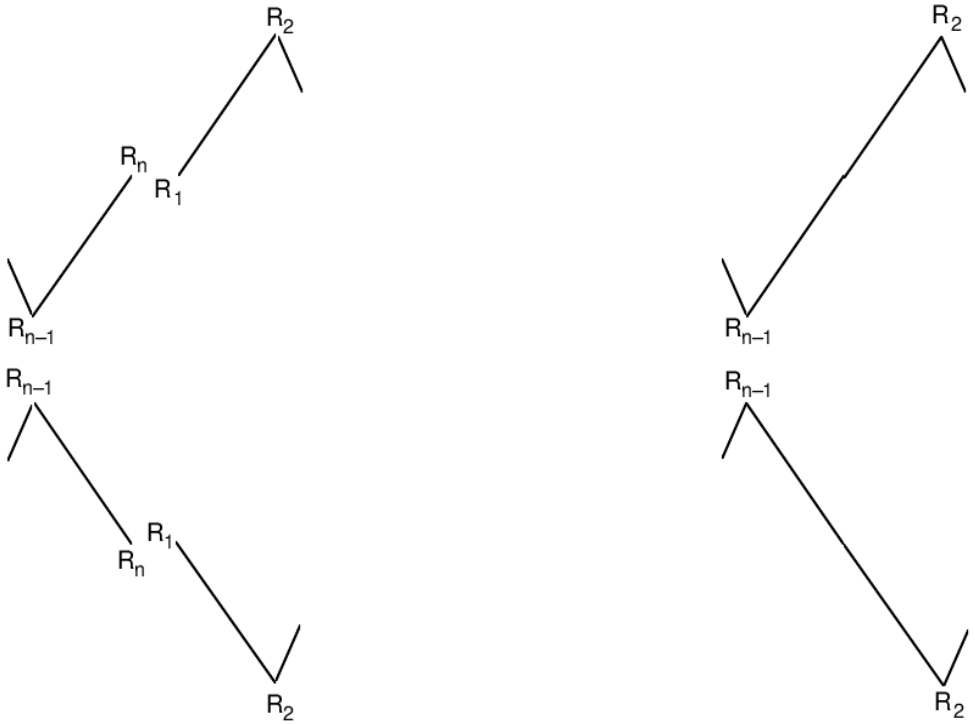
1) $(R_n - R_{n-1}).(R_2 - R_1) > 0$ et $(R_n - R_{n-1}).(R_1 - R_n) < 0$



a) Raccordement sans problème : transition (R_n, R_1)

Cas rencontré Raccordement

2) $(R_n - R_{n-1}).(R_2 - R_1) > 0$ et $(R_n - R_{n-1}).(R_1 - R_n) > 0$

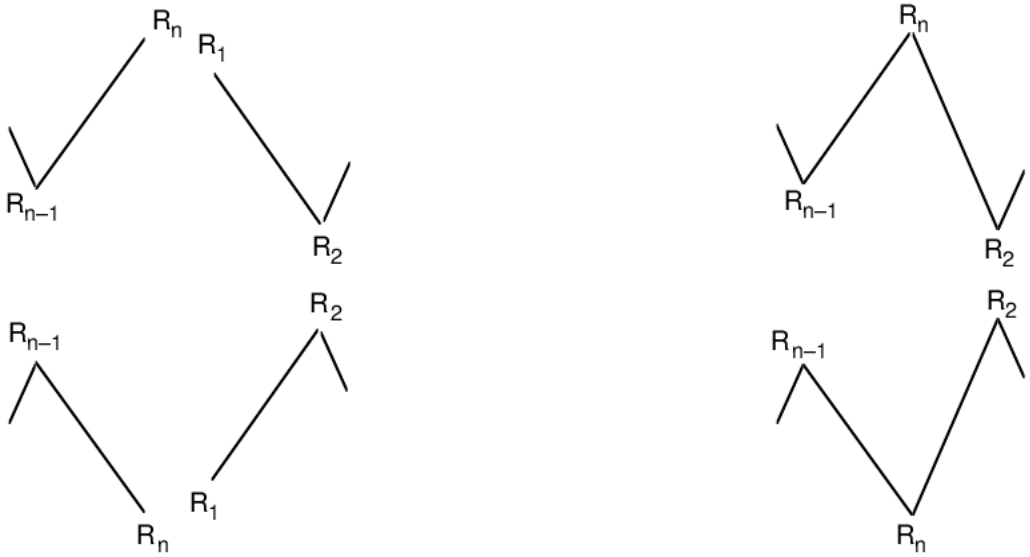


b) Raccordement transition (R_{n-1}, R_2), on élimine R_1 et R_n

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cas rencontré Raccordement

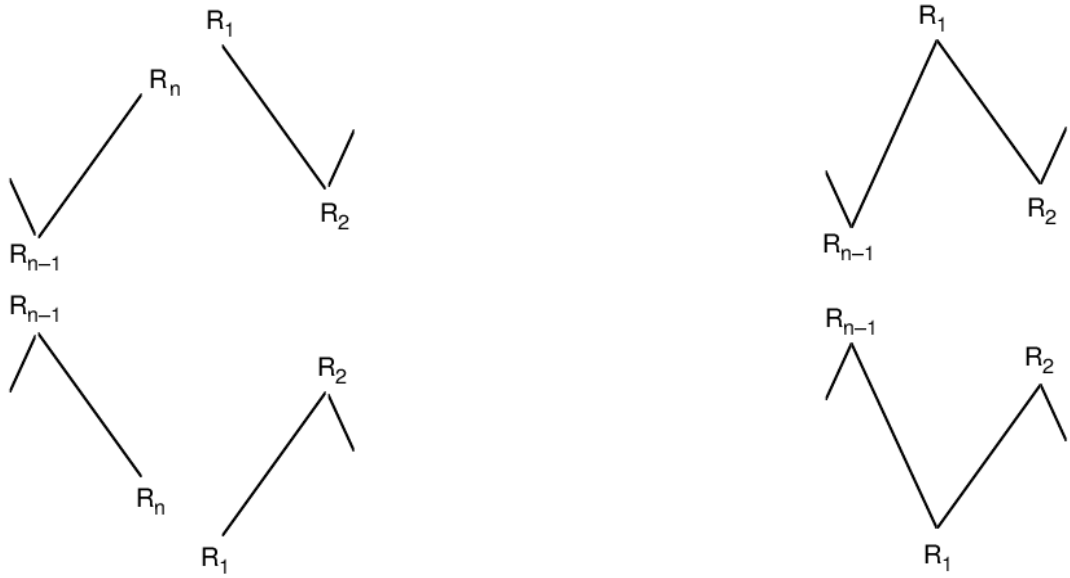
3) $(R_n - R_{n-1}).(R_2 - R_1) < 0$ et $(R_n - R_{n-1}).(R_1 - R_n) < 0$



c) Raccordement transition (R_n, R_2), on élimine R_1

Cas rencontré Raccordement

4) $(R_n - R_{n-1}).(R_2 - R_1) < 0$ et $(R_n - R_{n-1}).(R_1 - R_n) > 0$

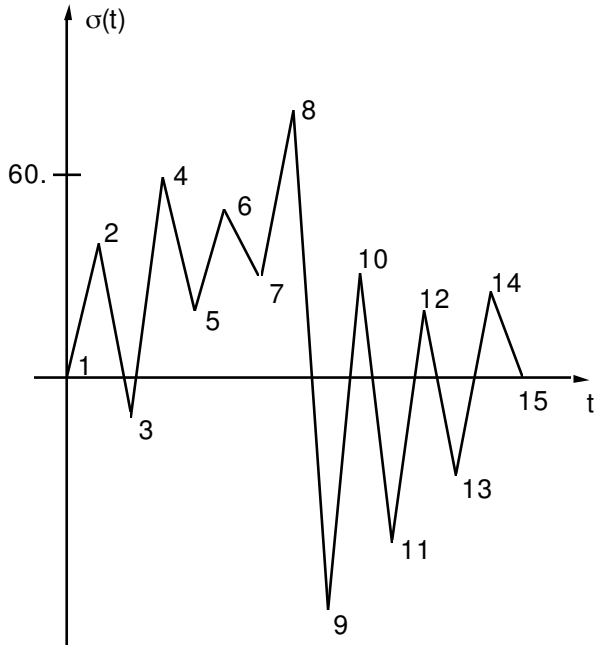


d) Raccordement transition (R_{n-1}, R_1), on élimine R_n

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Afin d'illustrer la méthode et de préciser les points qui resteraient obscurs, on considère l'histoire de chargement suivante (qui pour l'exemple est considérée de type contraintes) :

N° point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Instant	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Chargement	0.	40.	–10.	60.	20.	50.	30.	80.	–70.	30.	–50.	20.	–30.	25.	0.



La méthode de RAINFLOW conduit donc, sur cet exemple, (voir [§Annexe1], pour détail des étapes de l'algorithme) à la détermination de 7 cycles élémentaires définis par la valeur maximale et la valeur minimale du chargement, pour chaque cycle.

```
Cycle 1 :      VALMAX = 20.     VALMIN = -30.
Cycle 2 :      VALMAX = 25.     VALMIN =    0.
Cycle 3 :      VALMAX = 30.     VALMIN = -50.
Cycle 4 :      VALMAX = 40.     VALMIN = -10.
Cycle 5 :      VALMAX = 50.     VALMIN =  30.
Cycle 6 :      VALMAX = 60.     VALMIN =  20.
Cycle 7 :      VALMAX = 80.     VALMIN = -70.
```

Remarques :

- *Le calcul du dommage ne tenant pas compte de l'ordre d'apparition des cycles élémentaires de chargement, il est sans conséquence de réarranger l'histoire du chargement.*
- *Pour les méthodes de Taheri, l'ordre d'application des cycles élémentaires de chargement est pris en compte, aussi faut-il être très vigilant à l'utilisation d'une telle méthode de comptage de cycles. Il est conseillé, pour le calcul du dommage par les méthodes de Taheri, d'utiliser la méthode de comptage dite "naturel" [§2.2.3].*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2.2 Méthode RCC_M

Cette méthode consiste à former les cycles élémentaires de sollicitation en commençant par ceux qui provoquent les plus grandes variations.

Ainsi pour une histoire de chargement comportant N points, on détermine $N/2$ cycles élémentaires si N est pair et $N/2+1$ si N est impair.

L'algorithme se décompose en deux étapes. La première étape consiste à ordonner l'histoire de chargement de la plus petite à la plus grande valeur de la contrainte, ou de la déformation.

La seconde étape consiste, quant à elle, à former les cycles élémentaires avec la plus grande variation de la valeur de la contrainte, ou de la déformation.

Sur l'histoire de chargement $ch(t)$ réarrangée, les cycles élémentaires sont définis par :

$$\begin{cases} \text{VALMAX} = ch_{N+1-i} & \text{pour } i = 1,\ N/2 \\ \text{VALMIN} = ch_i \end{cases}$$

Si N est impair on détermine un cycle supplémentaire défini par :

$$\begin{cases} \text{VALMAX} = ch_{N/2+1} & \text{si } ch_{N/2+1} > ch_m \\ \text{VALMIN} = -ch_{N/2+1} + 2 * ch_m \end{cases}$$

et

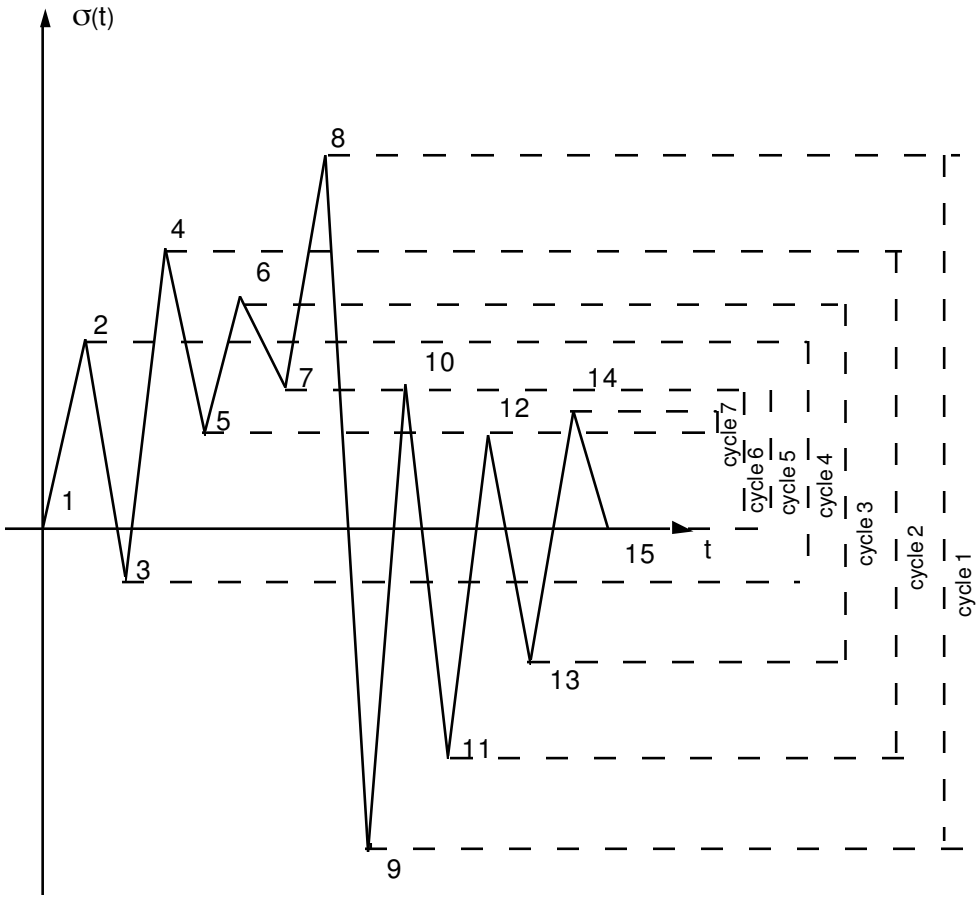
$$\begin{cases} \text{VALMAX} = ch_{N/2+1} & \text{sinon} \\ \text{VALMIN} = -ch_{N/2+1} + 2 * ch_m \end{cases}$$

où $ch_m =$ contrainte moyenne ou déformation moyenne du chargement = $\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} ch_i$.

Pour illustrer la méthode RCC_M considérons le même exemple que celui utilisé pour la méthode RAINFLOW (dont le chargement était considéré de type contraintes).

N° point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Instant	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Chargement	0.	40.	–10.	60.	20.	50.	30.	80.	–70.	30.	–50.	20.	–30.	25.	0.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



La première étape qui consiste à ordonner l'histoire du chargement, de la plus petite à la plus grande valeur du chargement, conduit au stockage suivant :

N° point	9	11	13	3	1	15	5	12	14	7	10	2	6	4	8
Chargement	–70.	–50.	–30.	–10.	0.	0.	20.	20.	25.	30.	30.	40.	50.	60.	80.

L'histoire de chargement se composant de 15 points, la méthode RCC_M détermine 8 cycles élémentaires :

Cycle 1 : VALMAX = 80. et VALMIN = -70.
Cycle 2 : VALMAX = 60. et VALMIN = -50.
Cycle 3 : VALMAX = 50. et VALMIN = -30.
Cycle 4 : VALMAX = 40. et VALMIN = -10.
Cycle 5 : VALMAX = 30. et VALMIN = 0.
Cycle 6 : VALMAX = 30. et VALMIN = 0.
Cycle 7 : VALMAX = 25. et VALMIN = 20.
Cycle 8 : VALMAX = 20. et VALMIN = 6. car $\left(\sigma_m = \frac{1}{N}\sum_1^N \sigma_i = 6.\right)$

Remarque :

Cette méthode de comptage de cycles ne tient absolument pas compte de l'ordre d'apparition des cycles, et ordonne systématiquement les cycles élémentaires par amplitude décroissante. Cette méthode doit être utilisée avec vigilance pour le calcul du dommage par les méthodes de Taheri dont la particularité est de tenir compte de l'ordre d'application des cycles de chargement. Pour le calcul du dommage par les méthodes de Taheri, il est fortement conseillé d'utiliser la méthode de comptage de cycles dite "naturel" [§2.2.3].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2.3 Méthode "naturel"

Cette méthode consiste à générer les cycles dans l'ordre de leur apparition dans l'histoire de chargement.

Ainsi pour une histoire de chargement de $N+1$ points, on détermine $N/2$ cycles élémentaires si N pair et $N/2+1$ cycles élémentaires si N impair.

La méthode consiste à s'appuyer sur trois points successifs de l'histoire de chargement.

On note $X=|ch(i+1)-ch(i)|$ et $Y=|ch(i+2)-ch(i+1)|$.

Si $X \geq Y$ on considère que l'on a rencontré un cycle élémentaire qui se définit par les deux points (i) et $(i+1)$.

L'amplitude du cycle est donnée par $\Delta ch=|ch(i+1)-ch(i)|$.

Si $X < Y$ on considère que l'on a rencontré un cycle élémentaire qui se définit par les deux points $(i+1)$ et $(i+2)$.

L'amplitude du cycle est donnée par $\Delta ch=|ch(i+2)-ch(i+1)|$.

Lorsque le cycle est extrait on supprime les deux points (i) et $(i+1)$ de l'histoire de chargement et on poursuit l'algorithme.

Si le nombre de points $(N+1)$ de l'histoire de chargement est impair, l'algorithme décrit précédemment permet de traiter tous les points.

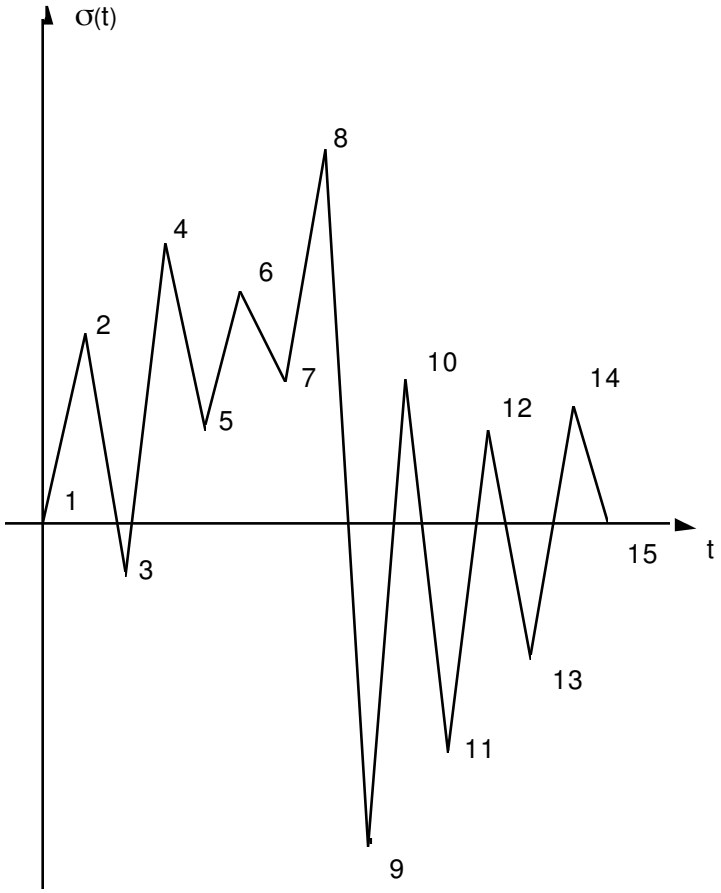
Si le nombre de points $(N+1)$ de l'histoire de chargement est pair, il reste à traiter les deux points restants.

On considère que ces deux points forment un cycle définit par les deux points N et $(N+1)$. L'amplitude du cycle est donnée par $\Delta ch=|ch(N+1)-ch(N)|$.

Pour illustrer cette méthode considérons le même exemple que celui utilisé pour les méthodes RAINFLOW et RCC_M.

N° point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Instant	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Chargement	0.	40.	–10.	60.	20.	50.	30.	80.	–70.	30.	–50.	20.	–30.	25.	0.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



L'histoire de chargement se composant de 15 points, la méthode "naturel" détermine 7 cycles élémentaires :

Cycle 1 :	VALMAX = 40.	et	VALMIN = -10.
Cycle 2 :	VALMAX = 60.	et	VALMIN = -10.
Cycle 3 :	VALMAX = 50.	et	VALMIN = 20.
Cycle 4 :	VALMAX = 80.	et	VALMIN = -70.
Cycle 5 :	VALMAX = 30.	et	VALMIN = -70.
Cycle 6 :	VALMAX = 30.	et	VALMIN = -50.
Cycle 7 :	VALMAX = 25.	et	VALMIN = -30.

Remarque :

Cette méthode est celle qu'il est fortement recommandé d'utiliser dans le cas du calcul du dommage par les méthodes de Taheri.

2.3 Calcul du dommage : méthode de Wöhler

Le nombre de cycles à la rupture est déterminé par interpolation de la courbe de Wöhler du matériau pour un niveau de contrainte alternée donnée (à chaque cycle élémentaire correspond un niveau d'amplitude de contrainte $\Delta\sigma = |\sigma_{max} - \sigma_{min}|$ et une contrainte alternée $S_{alt} = 1/2\,\Delta\sigma$).

Le dommage d'un cycle élémentaire est égal à l'inverse du nombre de cycles à la rupture $D = 1/N$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

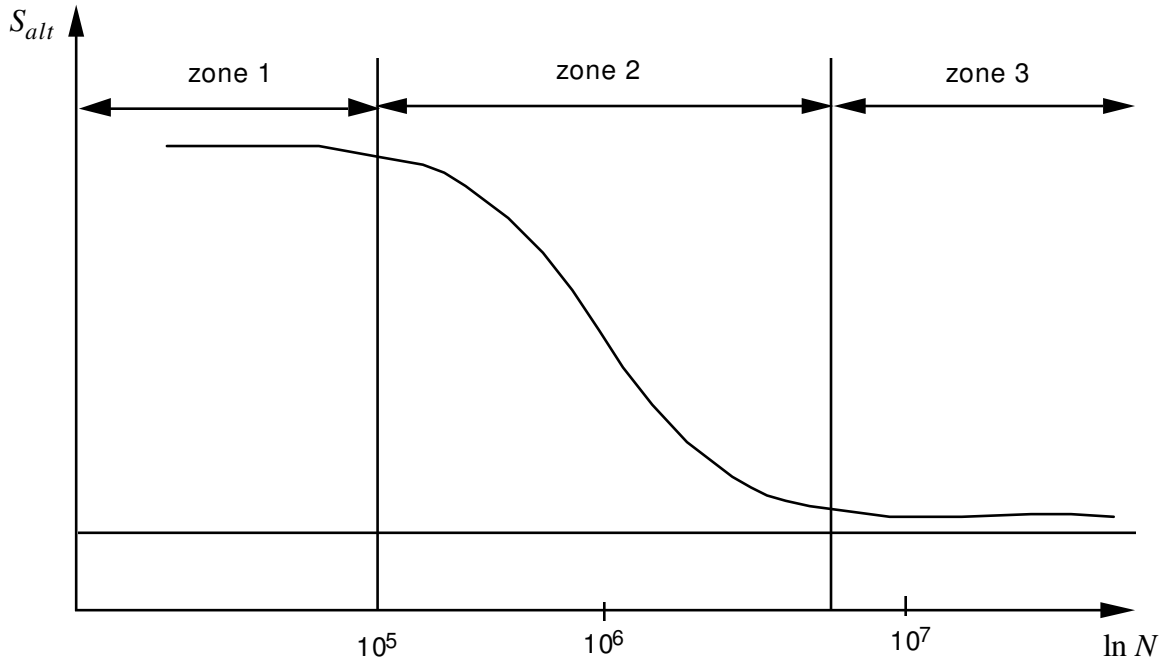
Dans le cas d'un essai homogène uniaxial avec une contrainte alternée pure (ou symétrique), le nombre de cycles à la rupture est déterminé à partir d'un diagramme d'endurance, encore appelé courbe de Wöhler ou courbe $S-N$.

Dans le cas de défauts géométriques ou de cycles élémentaires de contrainte moyenne non nulle, des corrections de la courbe de Wöhler sont nécessaires avant la détermination du nombre de cycles à la rupture et donc du dommage élémentaire.

2.3.1 Diagramme d'endurance

Le diagramme d'endurance, également appelé courbe de Wöhler ou courbe $S-N$ (courbe contraintes-nombre de cycles à la rupture) est obtenu expérimentalement en soumettant des éprouvettes à des cycles d'efforts périodiques (généralement sinusoïdaux) d'amplitude normale σ et de fréquences constantes, et en notant le nombre de cycles N au bout duquel la rupture se produit.

La courbe de Wöhler est donc définie pour un matériau donné et se présente sous la forme :



N : Nombre de cycle à la rupture

où S_{alt} = la contrainte alternée du cycle = $\frac{1}{2}|\sigma_{max}-\sigma_{min}|$

On distingue trois zones sur cette courbe :

- une zone de fatigue oligocyclique, sous forte contrainte, où la rupture survient après un très petit nombre d'alternances,
- une zone de fatigue ou d'endurance limitée, où la rupture est atteinte après un nombre de cycles qui croît quand la contrainte décroît,
- une zone d'endurance illimitée ou zone de sécurité, sous faible contrainte, pour laquelle la rupture ne se produit pas avant un nombre donné de cycles supérieur à la durée de vie envisagée pour la pièce.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il existe de nombreuses expressions du diagramme d'endurance :

- La plus ancienne est celle de Wöhler :

$$\ln(N) = a - bS_{alt} \quad \text{éq 2.3.1-1}$$

où N est le nombre de cycles à la rupture,
S_{alt} la contrainte alternée appliquée,
a et b deux caractéristiques du matériau.

Cette expression analytique ne rend pas bien compte, d'une branche horizontale ou asymptotique de la courbe S-N complète, mais elle donne une représentation souvent très bonne de partie moyenne de la courbe.

- Dès 1910, Basquin propose la formule :

$$\ln(N) = a - b\ln(S_{alt}) \quad \text{éq 2.3.1-2}$$

pour tenir compte de la courbure de la courbe de Wöhler qui raccorde la branche descendante à la branche horizontale.

D = dommage d'un cycle élémentaire = $1/N = A\,S_{alt}^{\beta}$ où $A = e^{-a}$ et $\beta = b$.

- Une autre forme analytique de la courbe de Wöhler est proposé dans POSTDAM pour tenir compte de la courbe hors de la zone singulière :

$$S_{alt} = 1/2\left(E_C/E\right)\Delta\sigma \quad \text{éq 2.3.1-3}$$

où E_C = Module d'Young associé à la courbe de fatigue du matériau,
E = Module d'Young utilisé pour déterminer les contraintes.
$X = \mathrm{LOG}_{10}(S_{alt})$
$N = 10^{a0 + a1X + a2X^2 + a3X^3}$
$D = \begin{cases} 1/N & \text{si } S_{alt} \geq S_l \text{ où } S_l \text{ est la limite d'endurance du matériau} \\ 0. & \text{sinon} \end{cases}$

Remarque :

Si l'on prend $a2 = a3 = 0$ et $E_C/E = 1$ *on retrouve la formule de Basquin.*

L'utilisateur peut introduire la courbe de Wöhler dans l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01] sous trois formes distinctes :

- **une forme discrétisée point par point** (mot clé WOHLER sous le mot clé facteur FATIGUE dans DEFI_MATERIAU).

  La courbe de Wöhler est dans ce cas une fonction qui donne le nombre de cycles à la rupture N en fonction de la contrainte alternée S_{alt} et pour laquelle l'utilisateur choisit le mode d'interpolation :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- 'LOG' ----> interpolation logarithmique sur le nombre de cycles à la rupture et sur la contrainte alternée (formule de Basquin par morceaux),
- 'LIN' ----> interpolation linéaire sur le nombre de cycles à la rupture et sur la contrainte alternée (cette interpolation est déconseillée car la courbe de Wöhler n'est absolument pas linéaire dans ce repère).
- 'LIN', 'LOG' interpolation en logarithmique sur le nombre de cycles à la rupture et en linéaire sur la contrainte alternée, ce qui conduit à l'expression donnée par Wöhler.

L'utilisateur doit également choisir le type de prolongement de la fonction à droite et à gauche (s'il est nécessaire d'interpoler la fonction en un point non autorisé par la définition de la fonction il y a arrêt du programme par erreur fatale).

- **une forme analytique de Basquin** (mots clés A_BASQUIN et BETA_BASQUIN sous le mot clé facteur FATIGUE dans DEFI_MATERIAU)

  $D = A S_{alt}^{\beta}$ Ce sont les constantes A et β utilisées dans cette formule qui sont à introduire par l'utilisateur (conformément au code POSTDAM).

- une forme analytique hors zone singulière

$$S_{alt} = \text{contrainte alternée} = 1/2 \left(E_C / E \right) \Delta\sigma$$
$$X = \text{LOG}_{10} \left(S_{alt} \right)$$
$$N = 10^{a0 + a1\,X + a2\,X^2 + a3\,X^3}$$
$$D = \begin{cases} 1/N & \text{si } S_{alt} \geq S_l \quad \text{où } S_l \text{ est la limite d'endurance du matériau} \\ 0. & \text{sinon} \end{cases}$$

L'utilisateur doit introduire :

E_C = Module d'Young associé à la courbe de fatigue du matériau (mot clé E_REFE sous le mot clé facteur FATIGUE dans DEFI_MATERIAU)

E = Module d'Young utilisé pour déterminer les contraintes (mot clé E sous le mot clé facteur ELAS dans DEFI_MATERIAU),

les constantes du matériau $a0, a1, a2 \text{ et } a3$ (mots clés A0, A1, A2 et A3 sous le mot clé facteur FATIGUE dans DEFI_MATERIAU)
et S_l la limite d'endurance du matériau (mot clé SL sous le mot clé facteur FATIGUE dans DEFI_MATERIAU).

Remarque :

Cette expression du dommage est disponible sous la même forme dans le logiciel POSTDAM.

2.3.2 Influence des paramètres géométriques sur l'endurance

2.3.2.1 Coefficient de concentration de contraintes

Suivant la géométrie de la pièce, il peut être nécessaire de pondérer la valeur de la contrainte appliquée par le coefficient de concentration de contraintes K_T. K_T est un coefficient fonction de la géométrie de la pièce, de la géométrie du défaut et du type de chargement.
Ce coefficient est donné par l'utilisateur sous le mot clé K_T du mot clé facteur COEF_MULT.

Il est utilisé pour appliquer à l'histoire du chargement, une homothétie de rapport K_T, ce qui revient à multiplier toutes les valeurs de l'histoire de chargement par le coefficient K_T.

(Le calcul du dommage se fera sur une histoire de chargement $\sigma(t) = K_T \times \sigma(t)$).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3.2.2 Coefficient de concentration élasto-plastique

Il peut également être nécessaire de pondérer la valeur de la contrainte appliquée par le coefficient de concentration élasto-plastique K_e.

Le coefficient de concentration élasto-plastique K_e (visé aux articles B3234.3 et B3234.5 du RCC_M [bib4]) est défini comme étant le rapport entre l'amplitude de déformation réelle et l'amplitude de déformation fictive déterminée par l'analyse élastique.

Une valeur acceptable du coefficient K_e peut être déterminée par [bib4] :

$$\begin{cases} K_e = 1 & \text{si} \quad \Delta\sigma < 3S_m \\ K_e = 1+(1-n)(\Delta\sigma/3S_m-1)/(n(m-1)) & \text{si} \quad 3S_m < \Delta\sigma < 3mS_m \\ K_e = 1/n & \text{si} \quad 3mS_m < \Delta\sigma \end{cases}$$

où S_m est la contrainte maximale admissible,

et n et m deux constantes dépendant du matériau.

Le facteur élasto-plastique K_e est un rapport d'homothétie du chargement. Ce facteur dépendant de l'amplitude du chargement. Il est appliqué, cycle par cycle sur les valeurs de la contrainte maximale et minimale de chaque cycle.

Les données S_m, n et m sont introduites sous les mots clés `SM_KE_RCCM`, `N_KE_RCCM` et `M_KE_RCCM` sous le mot clé facteur `FATIGUE` dans `DEFI_MATERIAU`.

L'utilisateur demande la prise en compte du facteur de concentration élasto-plastique en indiquant `CORR_KE` : '`RCCM`' dans `POST_FATIGUE` [U4.83.01].

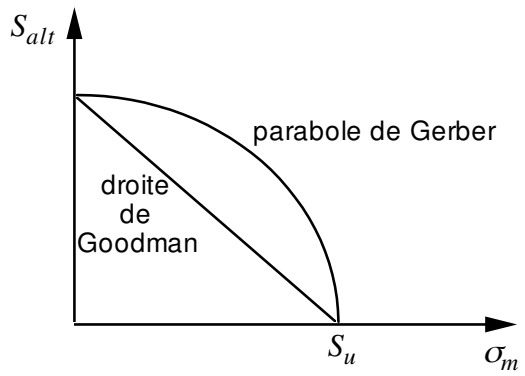
2.3.3 Influence de la contrainte moyenne

Si la pièce n'est pas soumise à des contraintes alternées pures ou symétriques, c'est-à-dire si la contrainte moyenne du cycle n'est pas nulle, la résistance aux sollicitations dynamiques du matériau (sa limite d'endurance) diminue.

On pondère donc la courbe de Wöhler pour calculer le nombre de cycles à la rupture effectifs à l'aide de différents diagrammes.

Le diagramme de Haigh permet de déterminer l'évolution de la limite d'endurance en fonction de la contrainte moyenne σ_m et de la contrainte alternée S_{alt}.

Diagramme de HAIGH



A partir d'un cycle (S_{alt}, σ_m) identifié dans le signal on calcule la valeur de la contrainte alternée corrigée S'_{alt}.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Si l'on utilise la droite de Goodman $S'_{alt} = \dfrac{S_{alt}}{1-\dfrac{\sigma_m}{S_u}}$

Si l'on utilise la parabole de Gerber $S'_{alt} = \dfrac{S_{alt}}{1-\left(\dfrac{\sigma_m}{S_u}\right)^2}$

Si on utilise la droite de Goodman : $S'_{alt} = \dfrac{S_{alt}}{1-\dfrac{\sigma_m}{S_u}}$

Si on utilise la parabole de Gerber : $S'_{alt} = \dfrac{S_{alt}}{1-\left(\dfrac{\sigma_m}{S_u}\right)^2}$

On remarque que ce dernier ne différentie pas la contrainte moyenne en traction et en compression.

où S_u est la limite à la rupture du matériau.

L'influence de la contrainte moyenne n'est prise en compte que sur demande de l'utilisateur (mot clé CORR_HAIG).

Remarque :

Si la courbe de Wöhler est définie par la forme analytique hors zone singulière [éq 2.3.1-3], des étendues de variation de contraintes se trouvant en dessous de la limite d'endurance peuvent se retrouver supérieures à celle-ci. Pour éviter cela, on corrige la limite d'endurance S_l en prenant une limite d'endurance corrigée [bib5] :

$$S'_l = \frac{S_l}{1-\dfrac{\sigma_m}{S_u}}$$ pour la droite de Goodman

$$S'_l = \frac{S_l}{1-\left(\dfrac{\sigma_m}{S_u}\right)^2}$$ pour la parabole de Gerber

2.4 Calcul du dommage : méthode de Manson-Coffin

Le domaine d'application de la méthode de Manson-Coffin [bib1] est la fatigue plastique oligocyclique, qui comme son nom l'indique présente deux caractéristiques fondamentales :

- elle est plastique, c'est-à-dire qu'une déformation plastique significative se produit à chaque cycle,
- elle est oligocyclique, c'est-à-dire que les matériaux ont une endurance finie à ce type de sollicitation.

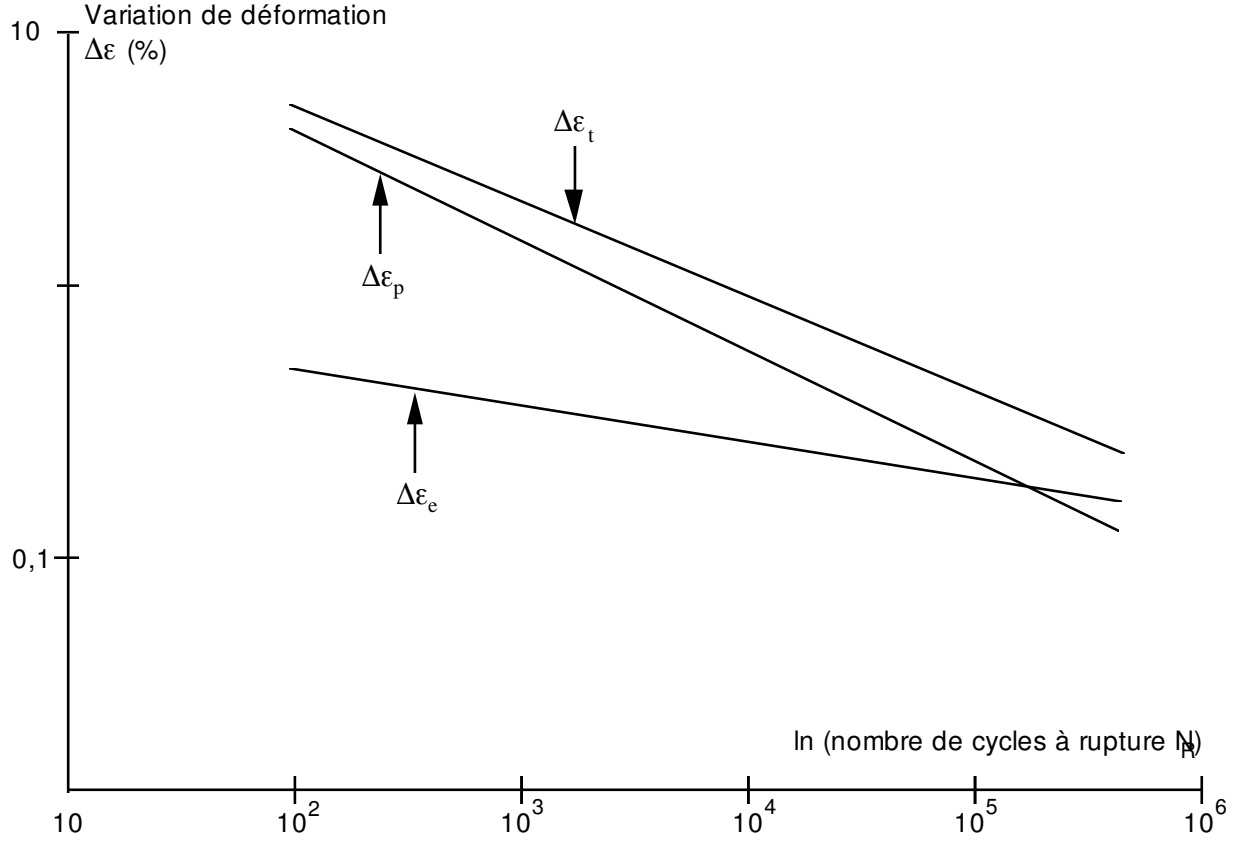
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour décrire le comportement des matériaux en fatigue plastique oligocyclique, on utilise des essais à déformation imposée alternée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas, d'un essai homogène uniaxial avec une déformation alternée, le nombre de cycles à la rupture est déterminé à partir d'un diagramme de résistance, qui relie la variation de déformation au nombre de cycles entraînant la rupture.

Dans le diagramme de résistance, on sépare les déformations totale, élastique et plastique. Ces diagrammes sont encore connus sous le nom de Coffin-Manson qui les proposèrent en 1950.



Les relations $\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} - \ln(N)$ et $\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} - \ln(N)$ sont des droites. La relation $\frac{\Delta \varepsilon_t}{2} - \ln(N)$ présente, quant à elle, une courbure vers les déformations positives.

Il a été montré qu'une relation puissance reliait la déformation plastique $(\Delta\varepsilon_p)$ et la déformation élastique $(\Delta\varepsilon_e)$ au nombre de cycles à la rupture, ce qui conduit aux relations suivantes :

$$\Delta \varepsilon_p = A\ N^{-a}$$
$$\Delta \varepsilon_e = B\ N^{-b}$$
$$\Delta \varepsilon_t = A\ N^{-a} + B\ N^{-b}$$

où a et b sont deux caractéristiques du matériau (en général a est voisin de $0,5$ et b voisin de $0,12$) ; A et B , deux constantes du matériau.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'utilisateur peut introduire la courbe de Manson-Coffin sous une forme mathématique unique : forme discrétisée point par point. C'est une fonction qui donne le nombre de cycles à la rupture N en fonction de l'amplitude de déformation $\left(\Delta \varepsilon_{t/2}\right)$.

Comme pour la courbe de Wöhler, l'utilisateur peut choisir le mode d'interpolation sur le nombre de cycles à la rupture et sur l'amplitude de déformation.

Le type de prolongement de la fonction à droite et à gauche est également au choix de l'utilisateur.

Le dommage d'un cycle élémentaire est égal à l'inverse du nombre de cycles à la rupture $D = 1/N$.

2.5 Calcul du dommage : méthode de Taheri

Les méthodes de calcul du dommage proposées par Taheri [bib12] sont au nombre de deux : on les nommera respectivement Taheri-Manson et Taheri-mixte. Ces méthodes s'appliquent à des chargements caractérisés par une composante scalaire de type déformation.

Ces méthodes ont pour particularité de tenir compte de l'ordre d'application des cycles élémentaires de chargement à la structure. Pour cette raison, il convient d'être vigilant au choix de la méthode de comptage des cycles. Il est fortement conseillé d'utiliser la méthode de comptage dite méthode "naturel" [§2.2.3].

2.5.1 Méthode Taheri-Manson

Soient n cycles élémentaires de demi-amplitude $\frac{\Delta\varepsilon_1}{2}, \cdots \frac{\Delta\varepsilon_n}{2}$.

La valeur du dommage élémentaire du premier cycle est déterminée par interpolation sur la courbe de Manson-Coffin du matériau.

Le calcul du dommage élémentaire des cycles suivants est effectué par l'algorithme :

- si $\frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{2} \geq \frac{\Delta\varepsilon_i}{2}$

  la valeur du dommage élémentaire du cycle $(i+1)$ est déterminée par interpolation sur la courbe de Manson-Coffin du matériau.

- si $\frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{2} < \frac{\Delta\varepsilon_i}{2}$

  on détermine :

$$\frac{\Delta\sigma_{i+1}}{2} = F_{NAPPE}\left(\frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{2}, \underset{j<i}{\text{Max}}\left(\frac{\Delta\varepsilon_j}{2}\right)\right)$$

  puis

$$\frac{\Delta\varepsilon^*_{i+1}}{2} = F_{FONC}\left(\frac{\Delta\sigma_{i+1}}{2}\right).$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

F_{NAPPE} est la courbe d'écrouissage cyclique avec préécrouissage cyclique du matériau.

F_{FONC} est la courbe d'écrouissage cyclique du matériau.

La valeur du dommage du cycle $(i+1)$ est déterminée par interpolation de $\frac{\Delta\varepsilon^*_{i+1}}{2}$ sur la courbe de Manson-Coffin du matériau.

Remarque :

Si tous les cycles appliqués sont rangés par valeur croissante de l'amplitude de déformation, cette méthode est identique à la méthode de Manson-Coffin.

2.5.2 Méthode Taheri-Mixte

Soient n cycles élémentaires, de demi-amplitude $\frac{\Delta\varepsilon_1}{2}, \cdots \frac{\Delta\varepsilon_n}{2}$.

La valeur du dommage élémentaire du premier cycle est déterminée par interpolation sur la courbe de Manson-Coffin du matériau.

Le calcul du dommage élémentaire des cycles suivants est effectué par l'algorithme :

- si $\frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{2} \geq \frac{\Delta\varepsilon_i}{2}$

  la valeur du dommage élémentaire du cycle $(i+1)$ est déterminée par interpolation sur la courbe de Manson-Coffin du matériau.

- si $\frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{2} < \frac{\Delta\varepsilon_i}{2}$

  on détermine :

$$\frac{\Delta\sigma_{i+1}}{2} = F_{NAPPE}\left(\frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{2}, \ \underset{j<i}{\text{Max}}\left(\frac{\Delta\varepsilon_j}{2}\right)\right)$$

  où F_{NAPPE} est la courbe d'écrouissage cyclique avec préécrouissage cyclique du matériau.

  La valeur du dommage du cycle $(i+1)$ est obtenue par interpolation de $\frac{\Delta\sigma_{i+1}}{2}$ sur la courbe de Wöhler du matériau.

Remarque :

Si tous les cycles appliqués à la structure sont rangés par valeur croissante de l'amplitude de déformation, cette méthode est identique à la méthode de Manson-Coffin.

Le dommage d'un cycle élémentaire est égal à l'inverse du nombre de cycles à la rupture $D = 1/N$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.6 Calcul du dommage total

L'approche la plus simple et la plus connue pour déterminer le dommage total d'une pièce soumise à n_i cycles de contrainte alternée S_{alt} ou de déformation alternée E_{alt} est la règle linéaire du dommage proposée par Miner :

$$Di = \frac{n_i}{N_i}$$

En fonctionnement, les structures sont soumises à divers chargements d'amplitudes différentes. La fatigue subie est due à l'accumulation des dommages élémentaires et le dommage total est calculé à l'aide de la règle de cumul de Miner [bib6] :

$$D_{total} = \sum_i \frac{n_i}{N_i}$$

Dans le cas de Wöhler et Manson-Coffin, cette loi suppose que le dommage augmente linéairement avec le nombre de cycles imposés et qu'il est indépendant du niveau de chargement et de l'ordre d'application des niveaux de chargement (alors qu'expérimentalement, on montre que l'ordre d'application du chargement est un facteur important pour la durée de vie du matériau).

Le calcul du dommage total est demandé par l'utilisateur avec le mot clé `CUMUL`.

Les méthodes proposées par Taheri tiennent compte de l'ordre d'application du chargement, dans le calcul des dommages élémentaires associés à chaque cycle.

2.7 Conclusion

Pour les méthodes basées sur des essais uniaxiaux, le calcul du dommage total subi par une pièce soumise à une histoire de chargement se décompose en plusieurs étapes :

- extraction des pics de l'histoire de chargement, pour aboutir à une histoire plus simple,
- extraction des cycles élémentaires de l'histoire de chargement par une méthode de comptage de cycles,
- calcul du dommage élémentaire associé à chaque cycle élémentaire issu de l'histoire réelle du chargement,
  - éventuellement (et pour la méthode de Wöhler), correction du chargement par un coefficient de concentration de contraintes K_T,
  - éventuellement (et pour la méthode de Wöhler), correction du chargement par un coefficient de concentration élasto-plastique K_e,
  - éventuellement (et pour la méthode de Wöhler), correction de Haigh pour tenir compte de la valeur non nulle de la contrainte moyenne,
- calcul du dommage total, par une règle de cumul linéaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Calcul du dommage de Lemaître généralisé

Cette loi de dommage concerne l'étude de l'amorçage d'une fissure macroscopique, à l'aide d'un post-processeur de mécanique d'endommagement basé sur une formulation unifiée des lois d'évolution de l'endommagement. Celui-ci utilise, d'une part, des lois d'évolution de l'endommagement spécifiques aux différents mécanismes considérés, et, d'autre part, un modèle plus général basé sur une analyse micro-mécanique du phénomène de l'amorçage.

Cette loi offre un formalisme unique qui suppose que les différents mécanismes d'endommagement sont tous gouvernés par les déformations plastiques, l'énergie de déformation élastique et par un processus d'instabilité.

3.1 La loi de Lemaître généralisée

La loi de Lemaître généralisée consiste en un enrichissement de la méthode de calcul de dommage de Lemaitre [bib7] par l'introduction d'une loi en puissance (modèle de Lemaître-Sermage). Elle s'écrit [bib14] :

$$\begin{cases} \dot{D} & = & \left[\frac{Y}{S}\right]^s \dot{p} & \text{si } p > p_D \\ D & = & 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{éq 3.1-1}$$

avec :

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2\,E(1-D)^2}\,R_\nu \quad \text{et} \quad R_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\,\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2 .$$

Y est le taux de restitution de densité d'énergie de déformation élastique.

R_v est la fonction de triaxialité.

$\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$ est le taux de triaxialité.

$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\sigma_{ij}^D\,\sigma_{ij}^D}$ est la contrainte équivalente de von Mises.

$\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,S_{ij}$ est le déviateur de la contrainte.

p_D est le seuil d'endommagement.

S et s sont des caractéristiques matériau.

$p(t)$ est la déformation plastique cumulée.

Cette loi permet donc de calculer le dommage $D(t)$ à partir de la donnée du tenseur des contraintes $\sigma(t)$ et de la déformation plastique cumulée $p(t)$.

L'équation [éq 3.1-1] peut s'écrire:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} (1-D)^{2s}dD = \left[\frac{C}{S}\right]^s dp & \text{si } p > p_D \\ D = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{éq 3.1-2}$$

avec :

$$C = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E} R_v$$

L'intégration des équations [éq 3.1-2] entre t_i et t_{i+1} conduit à :

$$\begin{cases} \int_{D(t_i)}^{D(t_{i+1})} (1-D)^{2s} dD = \int_{p(t_i)}^{p(t_{i+1})} \left[\frac{C}{S}\right]^s dp & \text{si } p > p_D \\ D = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{éq 3.1-3}$$

On remarque qu'il existe une primitive pour le terme à gauche de l'équation [éq 3.1-3] mais pas pour celui à droite. Un schéma d'intégration numérique est donc utilisé pour en calculer l'intégrale. L'équation [éq 3.1-3] peut s'écrire:

$$\begin{cases} \frac{[1-D(t_i)]^{2s+1} - [1-D(t_{i+1})]^{2s+1}}{2s+1} = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{C(t_i)}{S(t_i)}\right]^s + \left[\frac{C(t_{i+1})}{S(t_{i+1})}\right]^s\right)[p(t_{i+1}) - p(t_i)] & \text{si } p > p_D \\ D(t_{i+1}) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{éq 3.1-4}$$

On suppose que $D(t_o) = 0$. La valeur du dommage $D(t_i),\ i = 0, n$ pour chaque instant t_i peut être déterminée à partir de l'équation [éq 3.1-4]. Dans le *Code_Aster*, cette grandeur est nommée DOM_LEM.

L'endommagement final à la rupture $D_r = D(t_r)$ est donc associé au temps à la rupture t_r .

Remarques :

- *On considère que les caractéristiques matériau E (module d'Young), v (coefficient de poisson) et S (paramètre matériau) dépendent de la température T .*
- *La valeur du module d'Young et la valeur du coefficient de Poisson sont définies dans DEFI_MATERIAU [U4.43.01] sous le mot clé facteur ELAS_FO .*
- *Les valeurs de S , p_D et de s sont définies dans DEFI_MATERIAU sous le mot clé facteur DOMMA_LEMAITRE et les opérandes S , ESPS_SEUIL et EXP_S . Les paramètres S et p_D peuvent dépendre de la température TEMP .*
- *La loi de Lemaître est obtenue en assignant la valeur $s = 1$*

3.2 Identification des paramètres de la loi de Lemaître généralisée

On remarque que l'équation [éq 3.1-4] est valide pour la fatigue et le fluage. Pour la fatigue, p est la déformation plastique cumulée. Pour le fluage, p est la déformation plastique instantanée si on néglige la déformation élastique.

On note que les paramètres matériaux S et s dépendent fortement non seulement de la température T mais également de la contrainte σ (via l'expression de C). Le processus de détermination de S et s à partir des essais de la fatigue a été présenté dans [bib14].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette partie vise à présenter une méthode simple pour identifier les paramètres matériaux S et s à partir des essais du fluage uni-axiaux.

Dans un premier temps, on fixe la température T. On va conduire deux essais de fluage à deux niveaux de contrainte σ_1 et σ_2 suffisamment proches pour que les paramètres S et s puissent être considérés comme constants entre ces deux niveaux de contrainte. On désigne p_{r1} et p_{r1} les déformations plastiques à la rupture, mesurées à partir des essais du fluage associés à σ_1 et σ_2, respectivement.

Comme la contrainte σ est maintenue constante pendant l'essai de fluage et que $D(t_o)=0$, $D_r = D(t_r)=1$, l'équation [éq 3.1-4] peut s'écrire pour les niveaux de contrainte σ_1 et σ_2 comme:

$$\frac{S^s}{2s+1}=[C(\sigma_1)]^s.p_{r1} \quad \text{éq 3.2-1}$$

$$\frac{S^s}{2s+1}=[C(\sigma_2)]^s.p_{r2} \quad \text{éq 3.2-2}$$

Les paramètres S et s sont la solution du système d 'équations [éq 3.2-1] et [éq 3.2-2]. A partir de ces équations, le paramètre s est déterminé comme:

$$s=\frac{\log\frac{p_{r2}}{p_{r1}}}{\log\frac{C(\sigma_1)}{C(\sigma_2)}} \quad \text{éq 3.2-3}$$

Puis, S peut être déterminé soit à partir de l'équation [éq 3.2-1], soit à partir de l'équation [éq 3.2-2] .

Pour $\sigma_1<\sigma_2$, à partir de l'équation [éq 3.1-7], la valeur de s est positive (physiquement acceptable) si et seulement si $p_{r1}>p_{r2}$. Dans le cas contraire, il n'existe pas de solution positive pour le système d 'équations [éq 3.2-1] et [éq 3.2-2], i.e., le modèle d'endommagement de Lemaitre n'est pas applicable dans ce cas.

On note que cette méthode simple permet d'identifier les paramètres S et s à différentes températures et à différents niveaux de contrainte appliqués à partir des courbes expérimentales/numériques du fluage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Critères de Crossland et Dang Van Papadopoulos

Les critères [bib9] et [bib13] permettent pour des structures métalliques soumises à des contraintes imposées à la suite d'un grand nombre de cycles de distinguer les chargements endommageant des autres.

On peut classer les critères en deux catégories selon la nature de leur approche :

- approche macroscopique : critère de Crossland,
- approche microscopique : critère de Dang Van Papadopoulos.

Les critères de Crossland et Dang Van Papadopoulos s'appliquent à des chargements uniaxiaux ou multiaxiaux périodiques.

Le but de ces critères n'est pas de déterminer une valeur de dommage, mais une valeur de critère R_{crit} telle que :

$$\begin{cases} R_{crit} \leq 0 \quad \text{pas de dommage} \\ R_{crit} > 0 \quad \text{dommage possible (fatigue).} \end{cases}$$

4.1 Critère de Crossland

Le critère de Crossland a un caractère empirique et s'écrit uniquement à partir de variables macroscopiques.

En fait, à partir de campagnes d'essais, on a pu noter que l'amplitude de cission ainsi que la pression hydrostatique jouaient un rôle fondamental dans les mécanismes de fatigue des structures.

C'est pourquoi, Crossland a postulé le critère :

$$R_{crit} = \tau_a + a\, P_{\max} - b$$

où

$$\tau_a = \frac{1}{2} \underset{0 \leq t_0 \leq T}{\text{Max}} \underset{0 \leq t_1 \leq T}{\text{Max}} \|\sigma^D_{(t_1)} - \sigma^D_{(t_0)}\| = \text{amplitude de cission}$$

avec σ^D déviateur du tenseur des contraintes.

$$P_{\max} = \underset{0 \leq t \leq T}{\text{Max}} \left(\frac{1}{3}\, trace\ \sigma \right) = \text{pression hydrostatique maximale.}$$

$$a = \left(\tau_0 - \frac{d_0}{\sqrt{3}} \right) / \left(\frac{d_0}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{et} \quad b = \tau_0$$

avec :

$\tau_0 =$ limite d'endurance en cisaillement pur alterné,

$d_0 =$ limite d'endurance en traction-compression pure alternée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2 Critère de Dang Van Papadopoulos

Il est apparu que l'amorçage des fissures de fatigue est un phénomène microscopique se produisant à une échelle de l'ordre du grain. C'est pourquoi, des critères de fatigue, à partir de variables microscopiques locales ont été postulés.

Le critère implémenté [bib8], [bib9] et [bib10] dans *Code_Aster* est le critère de Dang Van Papadopoulos, qui s'écrit sous la forme :

$$R_{crit} = k^* + a\, P_{max} - b$$

où :

$k^* = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ si $R = \underset{0 \le t \le T}{Max} \sqrt{\left(\sigma^D(t) - C^*\right) : \left(\sigma^D(t) - C^*\right)}$

$k^* = R$ si $R = \underset{0 \le t \le T}{Max} \sqrt{J_2(t)} = \underset{0 \le t \le T}{Max} \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sigma^D(t) - C^*\right) : \left(\sigma^D(t) - C^*\right)}$

avec :

1) R, le rayon de la plus petite sphère circonscrite au trajet de chargement dans l'espace des déviateurs des contraintes ;
2) $J_2(t)$, le second invariant des déviateurs des contraintes ;
3) $C^* = \underset{C}{Min}\ \underset{t}{Max} \sqrt{\left(\sigma^D(t) - C\right) : \left(\sigma^D(t) - C\right)}$, le centre de l'hypersphère.

Remarque :

C'est la définition de R qui utilise $J_2(t)$ qui est programmée.

P_{max} = pression hydrostatique maximale $= \underset{0 \le t \le T}{\mathrm{Max}} \left(\dfrac{1}{3}\ trace\ \sigma \right)$

$$a = \left(\tau_0 - \frac{d_0}{\sqrt{3}} \right) / \left(\frac{d_0}{3} \right) \text{ et } b = \tau_0$$

avec :

τ_0 = limite d'endurance en cisaillement pur alterné,

d_0 = limite d'endurance en traction-compression pure alternée.

L'idée de base de Papadopoulos est d'écrire que le grain obéit à un critère de plasticité du type von Mises au lieu du critère de plasticité de type Tresca utilisé par Dang Van.

Papadopoulos a mené une campagne de comparaisons entre les résultats fournis par son critère et des résultats expérimentaux, qui montre que les prédictions du critère de Papadopoulos sont excellentes pour les chargements affines ; elles sont un peu moins précises pour les trajets non affines.

Dans sa thèse [bib10] Papadopoulos montre que le critère de Crossland et le critère de Dang Van Papadopoulos donnent les mêmes résultats pour des chargements radiaux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'algorithme employé pour le calcul du rayon de la plus petite sphère circonscrite au trajet de chargement dans l'espace des déviateurs de contraintes, est celui proposé dans [bib11]. Il s'agit d'un algorithme récurrent qui repose sur le second invariant des déviateurs des contraintes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Notons S_i la valeur du déviateur des contraintes à l'instant t_i, O_n le centre de l'hypersphère à l'itération n, R_n le rayon de l'hypersphère à l'itération n et x le "paramètre d'écrouissage isotrope" de l'algorithme.

- Phase d'initialisation de l'algorithme :

$$O_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i$$
$$R_1 = 0.$$

- Itération de l'étape n à l'étape $n+1$:

  on suppose O_n et R_n connus. On calcule alors :

$$D = \|S_{i+1} - O_n\|$$
$$P = D - R_n$$

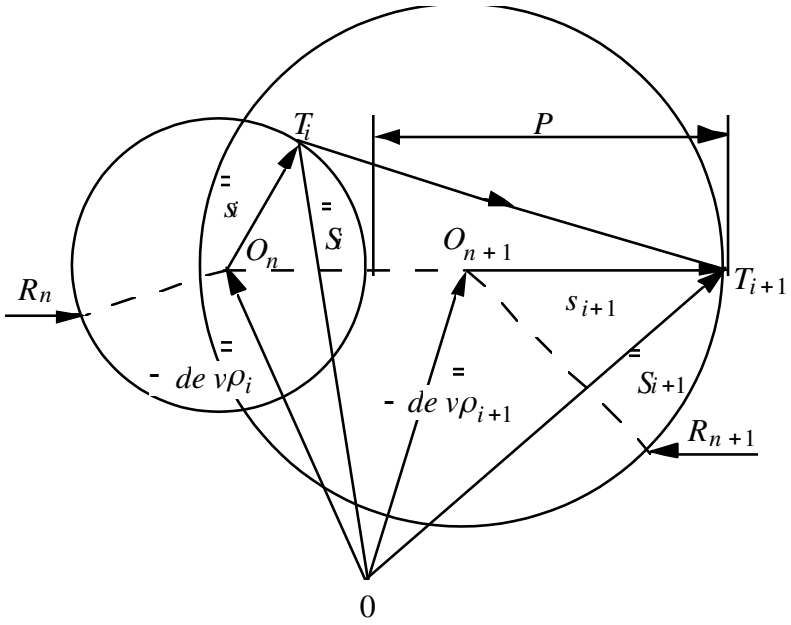
  - Si $P > 0$

$$R_{n+1} = R_n + x \ . \ P$$
$$O_{n+1} = S_{i+1} + R_{n+1}\frac{O_n - S_i}{\|O_n - S_{i+1}\|}$$

  - Si $P < 0$

$$R_{n+1} = R_n$$
$$O_{n+1} = O_n$$

L'algorithme prend fin lorsque tous les points S_i sont dans l'hypersphère de centre O_n et de rayon R_n.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Calcul d'une valeur de dommage

Ces deux critères applicables à des chargements périodiques multiaxiaux permettent de dire s'il y a dommage ou non :

$$\begin{cases} R_{crit} \leq 0 & \text{pas de dommage} \\ R_{crit} > 0 & \text{dommage possible (fatigue).} \end{cases}$$

Ces critères ne fournissent pas de valeur de dommage. Il peut cependant être intéressant de calculer une valeur de dommage en utilisant les courbes de Wöhler du matériau. Pour ce faire, il faut définir une contrainte équivalente σ^*, valeur à interpoler sur la courbe de Wöhler.

Les courbes de Wöhler peuvent être construites à partir d'essais de cisaillement dans quel cas la limite d'endurance est τ_0, mais sont plus généralement construites à partir d'essais de traction-compression pour lesquels la limite d'endurance est $d_0 (d_0 < \tau_0)$.

Pour qu'il y ait cohérence entre le critère et la courbe de Wöhler il faut que :

$$\begin{cases} \sigma^* \leq \tau_0 & \text{pas de dommage} \\ \sigma^* > \tau_0 & \text{dommage} \end{cases} \text{ pour une courbe de Wöhler définie en cisaillement,}$$

$$\begin{cases} \sigma^* \leq d_0 & \text{pas de dommage} \\ \sigma^* > d_0 & \text{dommage} \end{cases} \text{ pour une courbe de Wöhler définie en traction-compression.}$$

Il nous semble donc possible de prendre :

$\sigma^* = R_{crit} + \tau_0$ pour une courbe de Wöhler en cisaillement (ce qui est assez rare),
$\sigma^* = (R_{crit} + \tau_0) * (d_0 / \tau_0)$ pour une courbe de Wöhler en traction-compression.

De façon générale, l'utilisateur peut prendre $\sigma^* = (R_{crit} + \tau_0) * corr$ où $corr$ est un coefficient de correction introduit par l'utilisateur.

Par défaut, ce coefficient $corr$ est pris égal à (d_0 / τ_0) (cas de la courbe de Wöhler introduite en traction-compression).

Remarque :

Dans la littérature, on ne trouve pas de présentation d'une démarche d'utilisation d'un critère pour calculer une valeur de dommage. On sait cependant que certains industriels utilisent une telle démarche, mais sans en connaître la forme adoptée.

La démarche implémentée dans Code_Aster est proposée par le département AMA.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Conclusion

Dans cette note sont exposées les différentes méthodes de calcul du dommage disponibles soit dans l'opérateur POST_FATIGUE soit dans l'opérateur CALC_FATIGUE, soit dans les deux commandes simultanément.

On peut classer ces méthodes en deux grandes classes :

- estimation du dommage à grands nombres de cycles,
- estimation du dommage en fatigue plastique oligocyclique.

Dans la première classe de problèmes, on trouve la méthode de Wöhler, basée sur des essais uniaxiaux, et qui s'applique à des chargements en contrainte. On trouve également dans cette classe, le critère de Crossland, qui est un critère empirique s'appuyant sur des grandeurs macroscopiques et le critère de Dang Van Papadopoulos qui se fonde sur des phénomènes microscopiques.
Les deux critères s'adressent à des chargements en contraintes qui peuvent être uniaxiaux ou multiaxiaux mais périodiques.

Dans la seconde classe de problèmes, on trouve la méthode de Manson-Coffin et les méthodes de Taheri, qui s'appliquent à des chargement en déformations.

L'ensemble des méthodes basées sur des essais uniaxiaux (méthode de Wöhler, méthode de Manson-Coffin et méthodes de Taheri) sont disponibles dans les deux opérateurs POST_FATIGUE et CALC_FATIGUE.

Les critères, quant à eux, sont uniquement disponibles dans POST_FATIGUE.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Bibliographie

1) C. BATHIAS, J.P. BAILON : La fatigue des matériaux et des structures. Collection Université de Compiègne - PUM les Presses de l'Université de Montréal MALOINE S.A. Editeur Paris.

2) I. FOURNIER : Algorithme de fatigue : comparaison de différentes méthodes de comptage de cycles de contraintes - Note HP/169/88/44.

3) Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable : Méthode Rainflow de comptage des cycles. Norme AFNOR A 03-406 novembre 1993.

4) RCC_M. Edition janvier 1983.

5) E. VATIN : Cahier des charges de la version 2 du logiciel POSTDAM - Note HP/14/94/017/A.

6) F. WAECKEL : Estimation de la fatigue à grands nombres de cycles - Note HP/62/94/128/A.

7) J. LEMAITRE : Formulation unifiée des lois d'évolution d'endommagement. CR Académie des Sciences, Paris, T.305, série II, 1987.

8) P. BALLARD, DANG VAN KY, H. MAITOURNAM : Calcul des pièces métalliques à la fatigue. Support de cours Collège Polytechnique (5, 6 et 7 février 1996).

9) E. LORENTZ : Mise en œuvre des critères de fatigue. Création d'un post-processeur pour Systus (GDF).

10) V. PAPADOPOULOS : Fatigue polycyclique des métaux. Une nouvelle approche. Thèse de Ioannis V. PAPADOPOULOS 1987.

11) K. DANG VAN, B. GRIVEAU, O. MENAGE : On a new Multiaxial Fatigue Limit Criterior theory and applications. Mechanical Engineering Publications, London 1989.

12) S. TAHERI : A low cycle fatigue dammage cumulation rule for non proportional loading. Note HI-74/94/082/0.

13) S. TAHERI : Bibliographie sur la fatigue multiaxiale à grand nombre de cycles, HI-74/94/086/0.

14) Ph. SERMAGE : Fatigue thermique multiaxiale à température variable, thèse de doctorat ENS-Cachan, Déc. 1998.

15) C. PETRY, G. LINDET: Modelling creep behaviour and failure of 9Cr-0.5Mo-1.8W-VNb steel (P92), H-T24-2009-01869-EN.

7 Description des versions du document

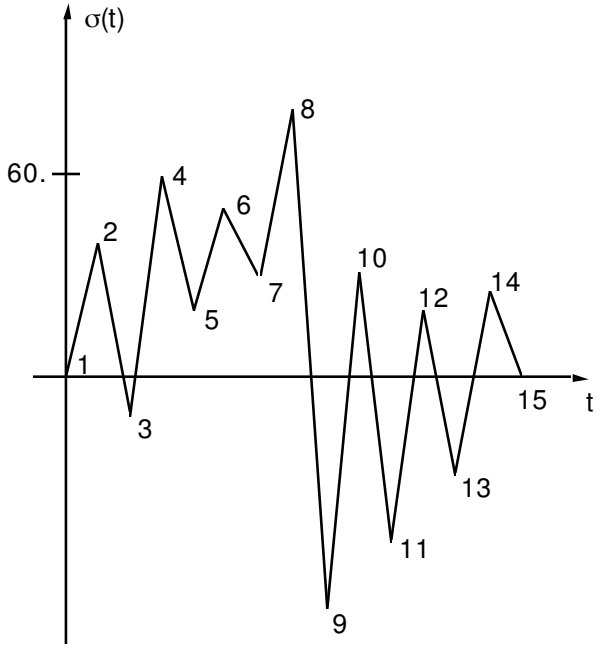
Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	*A.M DONORE, F. MEISSONNIER EDF-R&D/AMA*	texte initial
7,4	*A.M DONORE, F. MEISSONNIER EDF-R&D/AMA*	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1

On considère l'histoire de chargement suivante (qui pour l'exemple est considérée de type contraintes) :

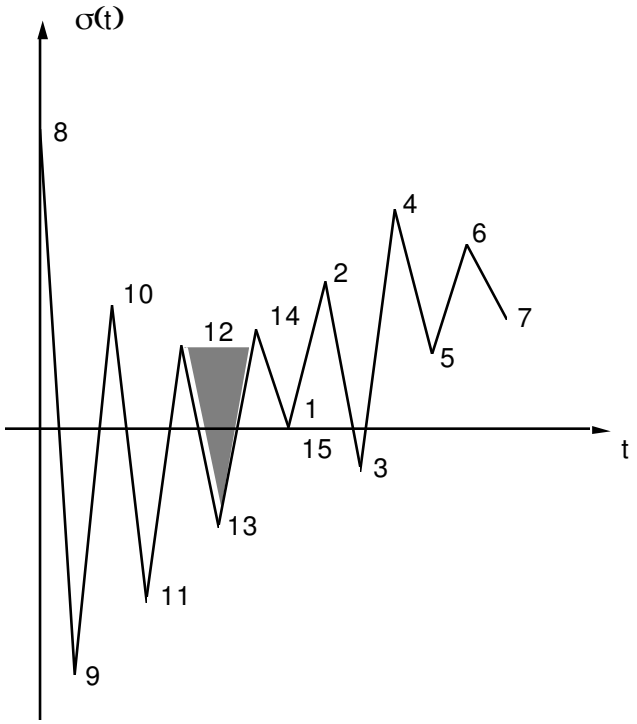
N° point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Instant	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Chargement	0.	40.	–10.	60.	20.	50.	30.	80.	–70.	30.	–50.	20.	–30.	25.	0.



L'étape de réarrangement de l'histoire de chargement conduit au chargement suivant :

N° point	8	9	10	11	12	13	14	15	2	3	4	5	6	7
Chargement	80.	–70.	30.	–50.	20.	–30.	25.	0.	40.	–10.	60.	20.	50.	30.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



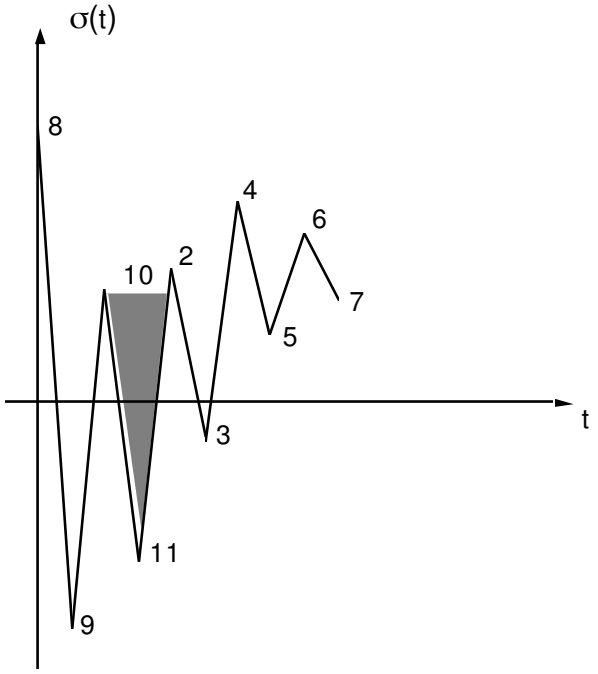
La seconde étape consiste à extraire les cycles élémentaires. Le premier cycle extrait est le cycle défini par les points 12 et 13 puisque $|\sigma(12)-\sigma(13)|$ est inférieur à $|\sigma(14)-\sigma(13)|$ et $|\sigma(12)-\sigma(13)|$ est inférieur à $|\sigma(12)-\sigma(11)|$.

Cycle 1 : $\mathrm{VALMAX}=20$ et $\mathrm{VALMIN}=-30$.

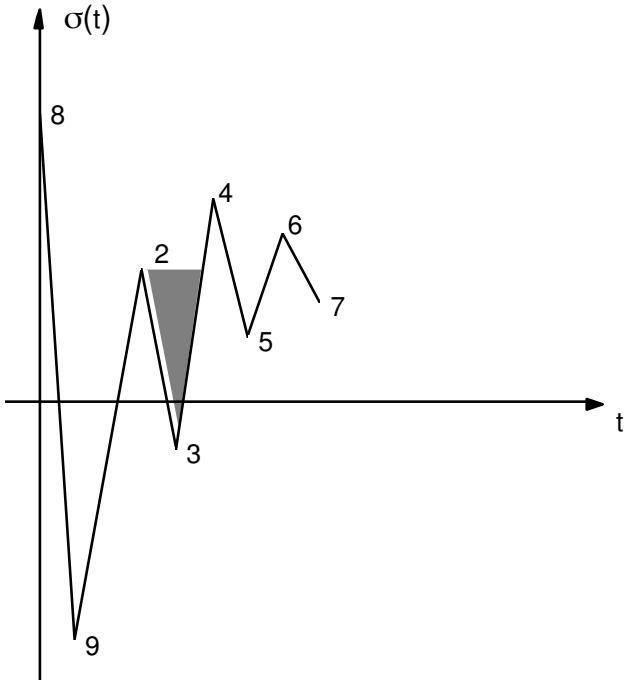
Le cycle ayant été extrait on supprime ces deux points de l'histoire du chargement, et on recommence sur l'histoire restante.

Le cycle suivant extrait est le cycle défini par les points 14 et 15.
Cycle 2 : $\mathrm{VALMAX}=25$ et $\mathrm{VALMIN}=0$.
L'histoire restante, après suppression de ces deux points est :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

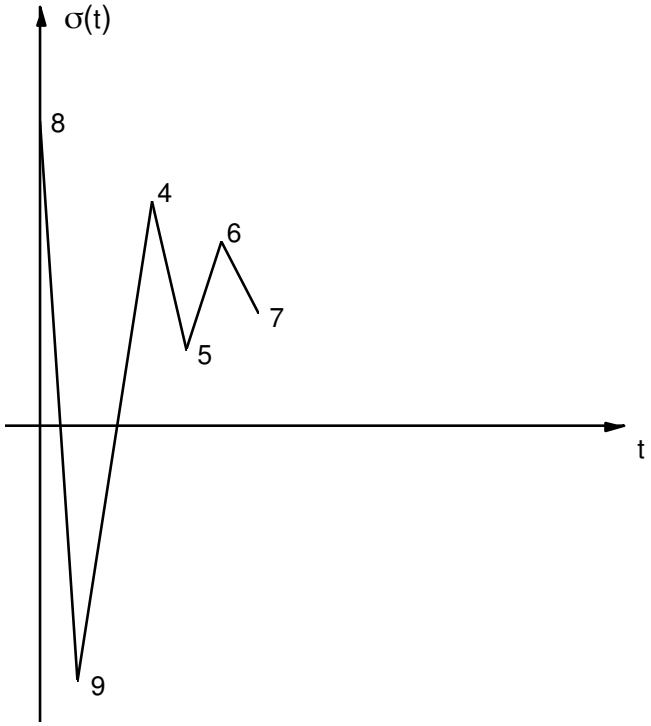


On extrait ensuite le cycle défini par les points 10 et 11.
Cycle 3 : $\mathrm{VALMAX}=30$ et $\mathrm{VALMIN}=-50$.
On repart sur l'histoire de chargement suivante :



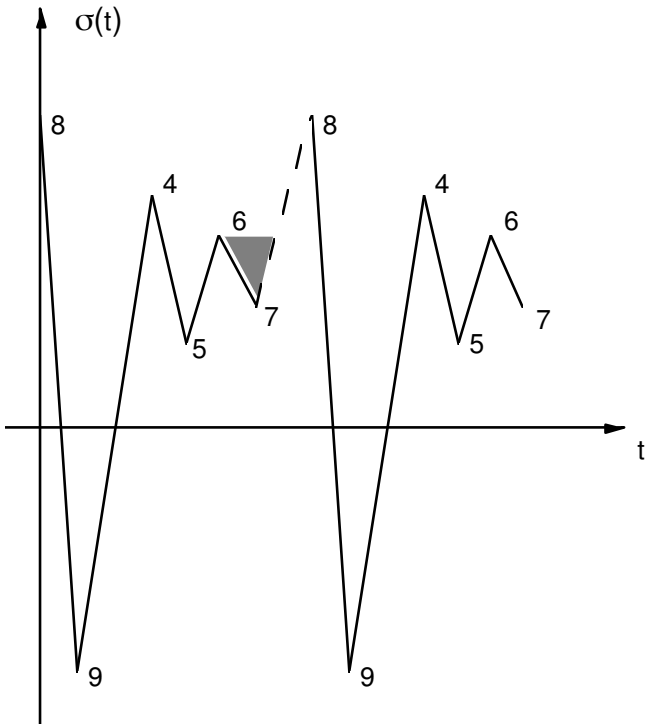
Le cycle suivant extrait est défini par les points 2 et 3.
Cycle 4 : $\mathrm{VALMAX}=40$ et $\mathrm{VALMIN}=-10$.
L'histoire de chargement restante est (c'est le résidu de l'histoire du chargement) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



On ne peut plus extraire de cycles, car on a parcouru toute l'histoire du chargement.

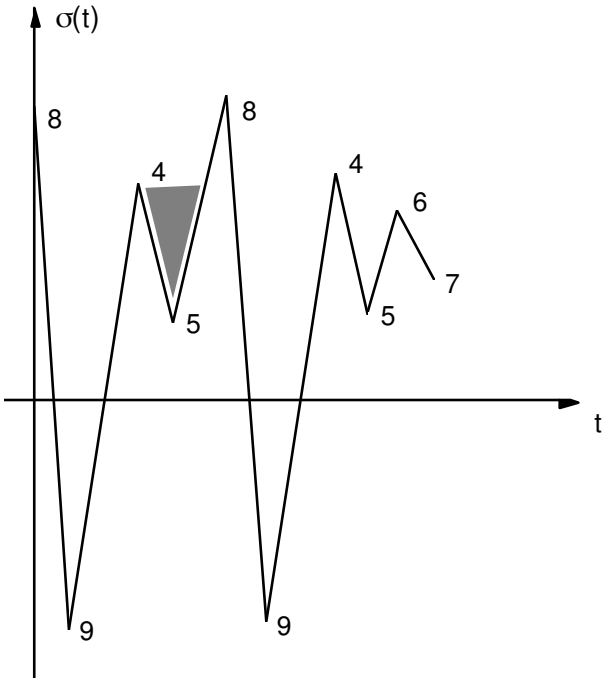
On passe donc à la troisième étape, qui consiste à traiter le résidu :



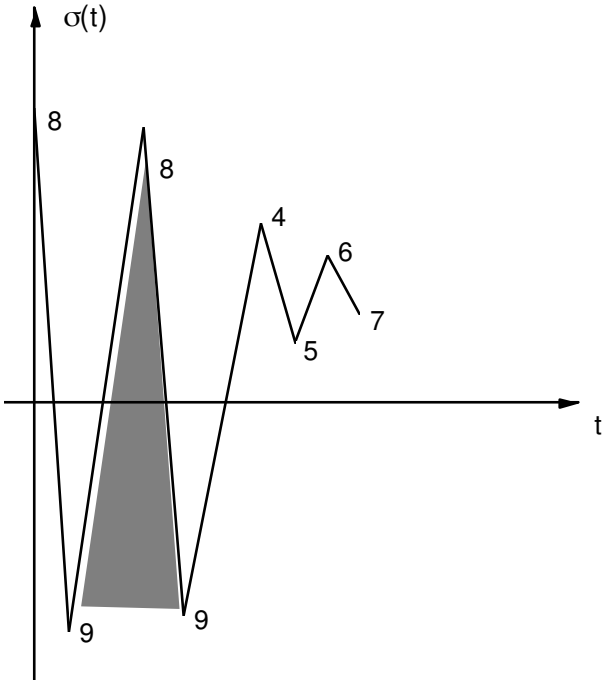
On rajoute le même résidu à sa suite, et on recommence la deuxième étape sur ce chargement.

Le cycle suivant extrait est défini par les points 6 et 7.
Cycle 5 : $\mathrm{VALMAX}=50$ et $\mathrm{VALMIN}=30$.
L'histoire de chargement restante est :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

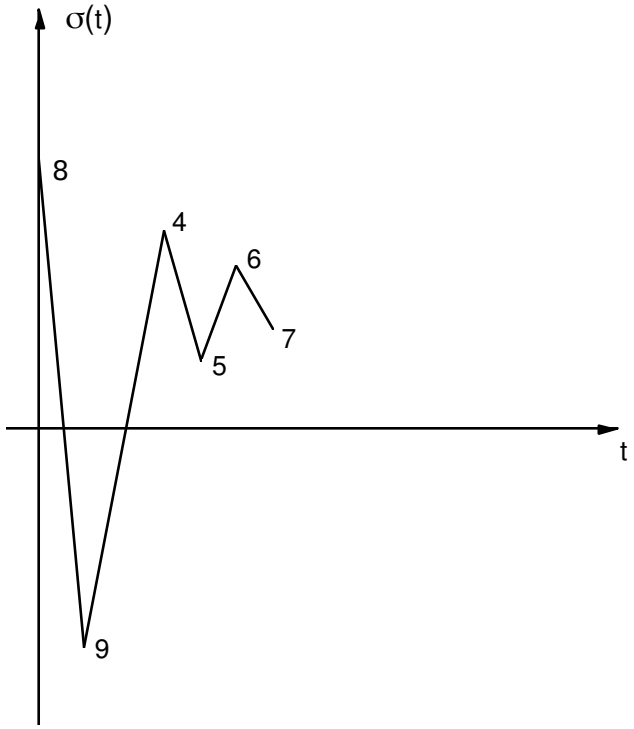


Le cycle suivant extrait est défini par les points 4 et 5.
Cycle 6 : VALMAX = 60. et VALMIN = 20.
L'histoire de chargement restante est :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le dernier cycle extrait est un cycle défini par les points 8 et 9.
Cycle 7 : $\mathrm{VALMAX}=80$ et $\mathrm{VALMIN}=-70$.



On remarque bien que lorsqu'on applique le comptage RAINFLOW à l'ensemble constitué des deux résidus, on obtient en fin de comptage à nouveau le résidu initial.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)