Identification du modèle de Weibull

Résumé

On aborde ici le problème de l'identification des paramètres du modèle de WEIBULL sur un échantillon d'essais représentatif du comportement à rupture d'un matériau fragile (typiquement, acier ferritique à basse température). La méthode de régression linéaire et la méthode du maximum de vraisemblance sont les deux méthodes retenues. On en détaille le principe ainsi que les méthodes de résolution associées, s'appuyant dans les deux cas sur un procédé itératif. Enfin, on montre leur extension au cas où l'un des deux paramètres de ce modèle (la contrainte de clivage) dépend de la température.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction....3
2 Rappels....3
2.1 Le modèle de WEIBULL....3
2.2 Identification des paramètres....3
3 Méthode de la régression linéaire....4
3.1.1 Principe....4
3.1.2 Résolution....5
4 Méthode du maximum de vraisemblance....6
4.1 Principe....6
4.2 Résolution....6
5 Dépendance des paramètres avec la température....7
5.1 Régression linéaire....7
5.2 Maximum de vraisemblance....8
6 Conclusion....8
7 Bibliographie....8
Description des versions du document....8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Lorsqu'elles font appel au modèle de WEIBULL (cf. POST_ELEM [U4.81.22]), les étude de modélisation de la rupture fragile des aciers nécessitent en général une identification préalable des paramètres de ce modèle. Afin d'éviter une laborieuse identification « à la main » de ces paramètres qui nécessiterait de relancer itérativement l'opération POST_ELEM avec l'option WEIBULL, une procédure de recalage automatique a été implantée dans *Code_Aster*.

Dans ce document, on rappelle brièvement les équations du modèle de WEIBULL puis on définit le problème d'identification posé. On décrit alors le principe des deux méthodes de résolution retenues (régression linéaire et maximum de vraisemblance) en incluant le cas où l'un des deux paramètres du modèle dépend de la température.

2 Rappels

2.1 Le modèle de WEIBULL

On considère une structure de comportement élastoplastique soumise à une sollicitation thermomécanique. On suppose que la probabilité de rupture cumulée de cette structure suit la loi de WEIBULL [bib1] à deux paramètres suivante :

$$P_f(\sigma_w)=1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right] \qquad \text{éq 2.1-1}$$

expression dans laquelle le module de WEIBULL $m>1$ décrit la queue de la distribution statistique des tailles des défauts à l'origine du clivage, σ_u est la contrainte de clivage et σ_w est la contrainte de WEIBULL qui dépend de l'histoire du champ de contrainte principale dans la zone plastifiée de la structure. Par exemple, dans le cas d'un trajet de chargement monotone, elle s'écrit :

$$\sigma_w=\sqrt[m]{\sum_p \left(\sigma_I^p\right)^m \frac{V_p}{V_0}}\ . \qquad \text{éq 2.1-2}$$

La sommation porte sur les volumes de matière V_p plastifiés, σ_I^p désignant la contrainte principale maximale dans chacun de ces volumes (V_0 est un volume caractéristique du matériau).

2.2 Identification des paramètres

De façon très générale, on considère une base expérimentale constituée d'essais de différentes natures (type 1, 2, ..., n), chaque type d'essai étant réalisé n_j fois de sorte que le nombre total d'essais s'élève à :

$$N=\sum_{j=1}^{j=n} n_j\ .$$

Cette base expérimentale pourrait par exemple être constituée d'essais sur éprouvettes axisymétriques entaillées de rayons d'entaille différents menés à différentes températures. Compte - tenu de la nature aléatoire des propriétés à rupture du matériau considéré, cette base ne constitue qu'un échantillon. Plus le nombre de ces échantillons sera important, plus il sera représentatif du comportement du matériau considéré.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Parmi les différentes méthodes d'identification proposées dans la littérature (voir par exemple [bib2]), nous en retenons deux : la méthode de régression linéaire, souvent utilisée, ainsi que celle du maximum de vraisemblance préconisée par l' « European Structural Integrity Society (ESIS) » [bib3].

Remarque :

Une étude systématique comparative des résultats donnés par ces deux méthodes [bib2] en fonction du nombre d'échantillon prélevé aléatoirement sur une distribution théorique a montré que la méthode du maximum de vraisemblance conduit à une meilleure estimation des paramètres du modèle de WEIBULL. La méthode de régression linéaire demeurant néanmoins très utilisée, nous l'avons intégrée à nos développements.

Dans les deux méthodes de recalage retenues, on effectue un premier calcul des contraintes de WEIBULL avec un jeu de paramètre donné (typiquement, $m=20$, $s_u=3000\,\mathrm{MPa}$). On classe ces N essais à l'aide de leur contrainte de WEIBULL atteinte au moment de la rupture. On dispose donc d'une liste croissante de contraintes de WEIBULL $(\sigma_w^1,...,\sigma_w^i,...,\sigma_w^N)$, telle que pour chaque (i) , le nombre d'éprouvettes rompues avec une contrainte de WEIBULL inférieure ou égale à σ_w^i est n_w^i (en général $n_w^i=i$). Parmi les différents estimateurs possibles de la probabilité de rupture cumulée P_f^i correspondant à σ_w^i [bib2], nous choisissons celui généralement recommandé : $P_f^i=\frac{i}{N+1}$.

Remarque :

Dans le cas particulier où la contrainte de WEIBULL dépend de la température, le classement précédent doit se faire température par température, chaque température correspondant à une loi statistique différente. L'estimateur de la probabilité de rupture précédent devient donc : $P_f^i=\frac{i}{N_T+1}$ *, si l'éprouvette* (i) *a été cassée à la température* T *, pour laquelle il y a eu* N_T *essais.*

Les deux méthodes de recalage retenues sont valables tant que [éq 2.1-1] reste vraie. Si l'identification est menée sur des résultats d'essais anisothermes alors que la contrainte de clivage est supposée dépendre de la température, cette condition n'est plus vérifiée (cf. POST_ELEM [U4.81.22]). Dans ce cas particulier, on ne pourra donc pas appliquer les développements qui suivent.

3 Méthode de la régression linéaire

3.1.1 Principe

L'écart théorie-expérience est mesuré par l'expression :

$$\sum_i \left(LogLog\left(\frac{1}{1-P_f^i}\right) - LogLog\left(\frac{1}{1-P_f(\sigma_W^i)}\right)\right)^2 \qquad \text{éq 3.1.1-1}$$

(« Log » désigne le logarithme népérien). On veut minimiser cet écart par rapport à (m, σ_u).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1.2 Résolution

La méthode de recalage habituellement utilisée s'appuie sur des régressions linéaires successives : à l'itération (k) , les valeurs ($m_k, \sigma_{u(k)}$) du module et de la contrainte de clivage sont connus. Il est donc possible, avec ces valeurs, de calculer les contraintes de WEIBULL $\sigma^i_{W(k)}$ aux différents instants de rupture grâce à [éq 2.1-1]. On classe alors ces nouvelles contraintes de WEIBULL par amplitude croissante et on en déduit les nouvelles estimations des probabilité de rupture $P^i_{f(k)}$ à l'itération (k) . Pour ces valeurs de contraintes de WEIBULL fixées, la minimisation de [éq 3.1.1-1] se ramène à une simple régression linéaire sur le nuage de points ($Log(\sigma^i_{W(k)})$, $LogLog(\frac{1}{1-P^i_{f(k)}})$) puisque si on reporte $LogLog(\frac{1}{1-P_f})$ en fonction de $Log(\sigma_W)$, on obtient une droite de pente m qui coupe l'axe des abscisses en ($Log(\sigma_u)$). Les nouvelles valeurs ($m_{k+1}, \sigma_{u(k+1)}$) de ces paramètres sont donc données par (annulation des dérivées partielles de [éq 3.1.1-1] par rapport à chaque paramètre) :

$$m_{k+1}=\frac{\frac{1}{N}\sum_{i,j} X_{i(k)}Y_{j(k)}-\sum_i Y_{i(k)}X_{i(k)}}{\frac{1}{N}\sum_{i,j} X_{i(k)}X_{j(k)}-\sum_i X_{i(k)^2}} \qquad \text{éq 3.1.2-1}$$

$$\sigma_{u(k+1)}=\exp\left(\frac{1}{N}\left(\sum_i X_{i(k)}-\frac{1}{m}\sum_i Y_{i(k)}\right)\right), \qquad \text{éq 3.1.2-2}$$

avec $X_{i(k)}=Log(\sigma^i_{W(k)})$ et $Y_{i(k)}=LogLog(\frac{1}{1-P^i_{f(k)}})$.

On répète ces itérations tant que la différence entre les jeux de paramètre obtenus aux itérations (k) et (k+1) est significative (typiquement, cinq itérations). La mesure de cet écart est donnée par : $Max\left[\left|\frac{m_{k+1}-m_k}{m_k}\right|, \left|\frac{\sigma_{u(k+1)}-\sigma_{u(k)}}{\sigma_{u(k)}}\right|\right]$.

Remarque :

Si m est fixé, $\sigma_{u(k+1)}$ est toujours donnée par [éq 3.1.2-2]. En revanche, si σ_u est fixé, m_{k+1} n'est plus donné par [eq 3.1.2-1] mais : $m_{k+1}=\frac{\sum_i X_{i(k)}Y_{i(k)}}{\sum_i X_{i(k)^2}-\log(\sigma_u)\sum_i X_{i(k)}}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Méthode du maximum de vraisemblance

4.1 Principe

Notons $p_f(\sigma_w)$ la densité de probabilité associée à la probabilité de rupture cumulée $P_f(\sigma_w)$:

$$p_f(\sigma_w)=\frac{m}{\sigma_u}\left(\frac{s_w}{\sigma_u}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right]$$

La quantité $p_f(\sigma_w)\,d\sigma_W$ est égale à la probabilité de casser une éprouvette soumise à une sollicitation correspondant à une contrainte de WEIBULL comprise dans l'intervalle $\left[\sigma_W, \sigma_W+d\sigma_W\right]$. La probabilité pour que toutes les éprouvettes de la base aient cassé s'élève donc à :

$$p(m,\sigma_u)\,d\sigma_w=\prod_i p_f(\sigma_W^i)\,d\sigma_w, \qquad \text{éq 4.1-1}$$

p étant la fonction de vraisemblance. La méthode du maximum de vraisemblance consiste alors à choisir les paramètres du modèle de WEIBULL de façon à ce que la fonction de vraisemblance définie par [éq 4.1-1] (en pratique plutôt son logarithme népérien) soit maximale.

4.2 Résolution

On utilise à nouveau un procédé itératif. Là encore, à l'itération (k) , ($m_k, \sigma_{u(k)}$) ainsi que les $\sigma^i_{W(k)}$ sont connus. Pour ces valeurs de contraintes de WEIBULL fixées, la maximisation de $Log(p)$ conduit à un nouveau couple ($m_{k+1}, \sigma_{u(k+1)}$) donné par :

$$m_{k+1})=\frac{N}{m_{k+1}}+\sum_{i=1}^{i=N} Log(\sigma^i_{W(k)})-N\frac{\sum_{i=1}^{i=N}(\sigma^i_{W(k)})^{m_{k+1}}\,Log(\sigma^i_{W(k)})}{\sum_{i=1}^{i=N}(\sigma^i_{W(k)})^{m_{k+1}}}=0 \qquad \text{éq 4.2-1}$$

f ¿

$$\sigma_{(k+1)}=\sqrt[m_{k+1}]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N}(\sigma^i_{W(k)})^{m_{k+1}}}. \qquad \text{éq 4.2-2}$$

A chaque pas, la résolution de [éq 4.2-1] peut être réalisée à l'aide de la méthode de Newton, le gradient de $f(m)$ étant donné par :

$$\frac{df}{dm}(m)=-N\left(\frac{1}{m^2}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{i=N}(\sigma^i_W)^m\,Log^2(\sigma^i_W)\right)\left(\sum_{i=1}^{i=N}(\sigma^i_W)^m\right)-\left(\sum_{i=1}^{i=N}(^i_W)^m\,Log(\sigma^i_W)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{i=N}(\sigma^i_W)^m\right)^2}\right).$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque :

Si m est fixé, $\sigma_{u(k+1)}$ est donné par [4.2-2]. En revanche, si σ_u est fixé, m_{k+1} n'est plus solution de [4.2-1] mais de :

$$f(m_{k+1})=\frac{N}{m_{k+1}}+\sum_{i=1}^{i=N} Log\left(\frac{\sigma^i_{W(k)}}{\sigma_u}\right)\left(1-\left(\frac{\sigma^i_{W(k)}}{\sigma_u}\right)^{m_{k+1}}\right)=0 \ .$$

Cette équation peut être à nouveau résolue à l'aide de la méthode de Newton, le gradient étant à présent donné par :

$$\frac{df}{dm}(m)=-\frac{N}{m^2}-\sum_{i=1}^{i=N}\left(\frac{\sigma^i_W}{\sigma_u}\right)^m Log^2\left(\frac{\sigma^i_W}{\sigma_u}\right) \ .$$

5 Dépendance des paramètres avec la température

Si on souhaite caler indépendamment les deux paramètres température par température, il suffit de décomposer la base d'essais en autant de sous - bases par température et d'appliquer à chacune de ces sous-bases les méthodes précédentes. Si, en revanche, on souhaite seulement faire varier la contrainte de clivage σ_u avec la température, on procède de la façon suivante.

5.1 Régression linéaire

L'estimation des probabilités de rupture étant à présent effectuée température par température (cf. remarque du [§2.2]), il suffit de caler la contrainte de clivage sur chaque nuage de points associé aux différentes températures (T). L'équation [éq 3.1.2-2] devient donc :

$$\sigma_{u(k+1)}=\exp\left(\frac{1}{N_T}\left(\sum_{i\in T} X_{i(k)}-\frac{1}{m}\sum_{i\in T} Y_{i(k)}\right)\right)$$

(N_T désignant le nombre d'essais pour la sous - base correspondant à la température (T)), le module de WEIBULL étant donné par :

$$m_{k+1}=\frac{\sum_T\left(\frac{1}{N_T}\sum_{i\in T,\, j\in T} X_{i(k)}Y_{j(k)}\right)-\sum_i Y_{i(k)}X_{i(k)}}{\sum_T\left(\frac{1}{N_T}\sum_{i\in T,\, j\in T} X_{i(k)}X_{j(k)}\right)-\sum_i X_{i(k)^2}} \ .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Maximum de vraisemblance

La contrainte de clivage est donnée pour chaque température (T) considérée par :

$$\sigma_{u(k+1)}(T)=\sqrt[m_{k+1}]{\frac{1}{N_T}\sum_{i\in T}(\sigma^i_{W(k)}(T))^{m_{k+1}}},$$

m_{k+1} étant solution de :

$$f(m_{k+1})=\frac{N}{m_{k+1}}+\sum_{i=1}^{i=N}Log(\sigma^i_{W(k)})-\sum_T N_T\frac{\sum_{i\in T}(\sigma^i_{W(k)})^{m_{k+1}}Log(\sigma^i_{W(k)})}{\sum_{i\in T}(\sigma^i_{W(k)})^{m_{k+1}}}=0.$$

6 Conclusion

La commande RECA_WEIBULL du *Code_Aster* permet d'effectuer le calage des paramètres du modèle de WEIBULL [U4.82.06].

L'utilisateur donne en entrée de cette commande les concepts résultats associés aux différents calculs non linéaires effectués. L'éventuelle dépendance de la contrainte de clivage avec la température est implicitement spécifiée lorsque des températures différentes sont associées à chacun de ces concepts résultats (si toutes ces températures sont identiques ou si elles ne sont pas spécifiées, il n'y a pas de dépendance avec la température de ce paramètre).

L'utilisateur peut effectuer ce recalage par la méthode du maximum de vraisemblance (METHODE : 'MAXI_VRAI') ou celle de la régression linéaire (METHODE : 'REGR_LIN').

Les grandeurs déterminées par la commande RECA_WEIBULL sont reportées dans une table dans laquelle on trouve la valeur des paramètres identifiés, les probabilités de rupture estimées à partir des résultats expérimentaux ainsi que les probabilités de rupture théorique calculées avec les paramètres identifiés.

7 Bibliographie

[1] F. BEREMIN, « A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel », Metall. Trans. 14A, pp 2277-2287, 1981.

[2] A. KHALILI, K. KROMP, « Statistical properties of weibull estimators », Journal of Material Science, 26, pp 6741-6752, 1991.

[3] ESIS, TC 1.1 on « Local Approach », Procedure to measure and calculate local approach criteria using notched tensile specimens », P6, 1998.

Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
01/05/00	*R. MASSON, W. LEFEVRE (EDF/RNE/MTC)*	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)