# Calcul des facteurs d'intensité de contraintes en thermo-élasticité linéaire

**Résumé :**

On présente la méthode de calcul des facteurs d'intensité de contraintes $K_I$, $K_{II}$ et $K_{III}$ en thermoélasticité linéaire. La formulation considère le taux de restitution d'énergie comme une forme bilinéaire symétrique du champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ et utilise les expressions explicites des champs de déplacements singuliers connues en élasticité linéaire plane.

Cette méthode est utilisable à l'aide de l'option CALC_K_G de la commande CALC_G, aussi bien pour une fissure maillée (éléments finis classiques) que pour une fissure non maillée (éléments finis enrichis : méthode X-FEM).

Cette méthode est aussi utilisable pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes associés aux modes propres de vibration d'une structure.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des Matières

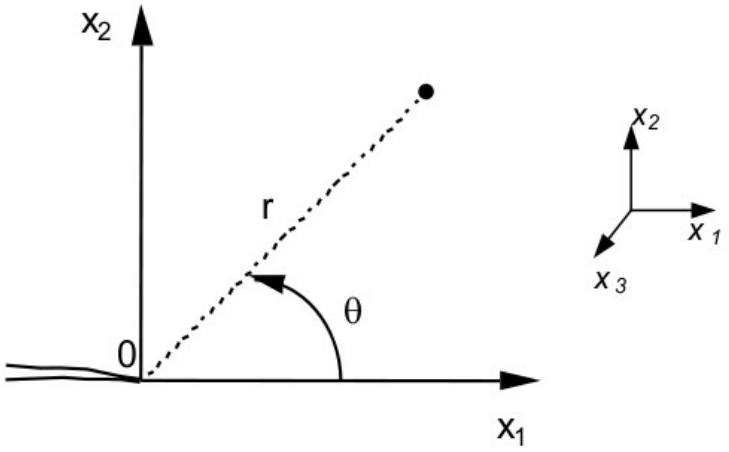
1 Expressions des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire....3
1.1 Présentation en thermoélasticité linéaire plane....3
1.2 Extension au cas 3D....5
1.3 Formule d'IRWIN et taux de restitution d'énergie G....6
1.4 Découplage des modes de rupture....8
2 Implantation de KI, KII et KIII en thermoélasticité linéaire dans Code_Aster....10
2.1 Types d'éléments et de chargements....10
2.2 Environnement nécessaire pour le calcul de KI, KII et KIII....10
2.3 Forme bilinéaire symétrique g(. , .)....11
2.3.1 Terme classique élémentaire....11
2.3.2 Terme thermique....12
2.3.3 Terme force volumique....13
2.3.4 Terme de contrainte initiale....14
2.3.5 Terme force surfacique....15
2.3.6 Terme de dynamique modale....15
2.4 Champs de déplacements singuliers et leurs dérivées....16
2.5 Post-traitement des résultats de KI et KII....16
2.5.1 Pour les problèmes 2D....16
2.5.2 Pour les problèmes 3D....17
3 Bibliographie....17
4 Description des versions du document....18



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Expressions des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire

## 1.1 Présentation en thermoélasticité linéaire plane




Soient les axes de coordonnées cartésiennes $Ox_1$ dans le prolongement de la fissure et $Ox_2$ perpendiculaire à la fissure. Le problème est plan. Nous exprimerons les composantes cartésiennes des déplacements et des contraintes en fonction des coordonnées polaires $r$ et $\theta$.

En élasticité linéaire, le système des équations de l'équilibre, sans force volumique, et les conditions aux limites homogènes sur la fissure, les contraintes nulles à l'infini, admettent une solution non triviale de la forme $\boldsymbol{u}_i = \sqrt{(r)}\, g_i(\theta)$. Les contraintes sont infinies au fond de la fissure comme $r^{-1/2}$ [bib3].

Pour un problème quelconque en élasticité linéaire plane (déformations planes ou contraintes planes), le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ peut se décomposer en une partie singulière et une partie régulière. La partie singulière, appelée également singularité, est celle explicitée ci-dessus. Elle est associée aux facteurs d'intensité des contraintes $K$. En élasticité linéaire, les modes de rupture $I$ (ouverture) et $II$ (glissement plan) sont séparés :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_R} + K_I \boldsymbol{u_S^I} + K_{II} \boldsymbol{u_S^{II}}$$

avec :

$$\begin{cases} u_{S1}^I = \dfrac{1+\nu}{E}\left(\dfrac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)(k - \cos\theta) \\ u_{S2}^I = \dfrac{1+\nu}{E}\left(\dfrac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)(k - \cos\theta) \end{cases}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} u_{S1}^{II} = \frac{1+\nu}{E}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(k+\cos\theta-2) \\ u_{S2}^{II} = -\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(k+\cos\theta-2) \end{cases}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où :

$k = 3 - 4\nu$ en déformations planes D_PLAN
$k = (3-\nu)/(1+\nu)$ en contraintes planes C_PLAN

et :

$E$ module d'YOUNG
$\nu$ coefficient de POISSON

La répartition des contraintes singulières au voisinage de la fissure est donnée par les formules :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{S} = K_I \sigma_{11}^{I} + K_{II} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{12}^{S} = K_I \sigma_{12}^{I} + K_{II} \sigma_{12}^{II} \\ \sigma_{22}^{S} = K_I \sigma_{22}^{I} + K_{II} \sigma_{22}^{II} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{I} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\frac{\theta}{2})(1 - \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{3\theta}{2})) \\ \sigma_{12}^{I} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{3\theta}{2}) \\ \sigma_{22}^{I} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\frac{\theta}{2})(1 + \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{3\theta}{2})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{II} = -\frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \sin(\frac{\theta}{2})(2 + \cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{3\theta}{2})) \\ \sigma_{12}^{II} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\frac{\theta}{2})(1 - \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{3\theta}{2})) \\ \sigma_{22}^{II} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{3\theta}{2}) \end{cases}$$

**Remarque :** l'expression des champs de déplacement et de contraintes singulières établie en 2D – déformations planes peut d'étendre au cas 2D – axisymétrique [bib12]. Les fonctions singulières ne sont cependant valables qu'asymptotiquement, autrement dit la distance *r* au fond de fissure doit rester petite par rapport au rayon du fond de fissure.

## 1.2 Extension au cas 3D

Outre les modes plans d'ouverture et de glissement plan, un troisième mode de glissement antiplan (caractérisé par $K_{III}$ ) peut être défini. Les champs singuliers associés au mode $III$ sont identifiés en résolvant les équations de l'équilibre d'un milieu plan fissuré infini pour des déplacements uniquement selon l'axe $x_3$ :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} u_{S1}^m = 0 \\ u_{S2}^m = 0 \\ u_{S3}^m = \dfrac{4(1+\nu)}{E}\left(\dfrac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_{31}^m = -\dfrac{1}{(2\pi r)^{1/2}}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{32}^m = \dfrac{1}{(2\pi r)^{1/2}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Dans le cas tridimensionnel, on peut montrer que le comportement asymptotique des déplacements et des contraintes est la somme des solutions correspondants aux modes $I$ et $II$ (en déformations planes) et au mode $III$ (antiplan), et de quatre autres solutions particulières, mais qui sont plus régulières que les précédentes [bib9]. Le terme principal des champs singuliers reste donc inchangé, et le champ de déplacement en 3D s'exprime alors de la façon suivante :

$$u(s) = u_R + K_I(s)\,u_S^I + K_{II}(s)\,u_S^{II} + K_{III}(s)\,u_S^{III}$$

où $s$ est l'abscisse curviligne le long du fond de fissure et $u_S^I$, $u_S^{II}$ et $u_S^{III}$ sont les déplacements singuliers définis dans le paragraphe précédent (exprimés, pour chaque point du fond de fissure, dans un repère local adapté).

## 1.3 Formule d'IRWIN et taux de restitution d'énergie G

En élasticité linéaire, les facteurs d'intensité de contraintes sont reliés au taux de restitution d'énergie $G$ par la formule d'IRWIN :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) \text{ en déformations planes}$$

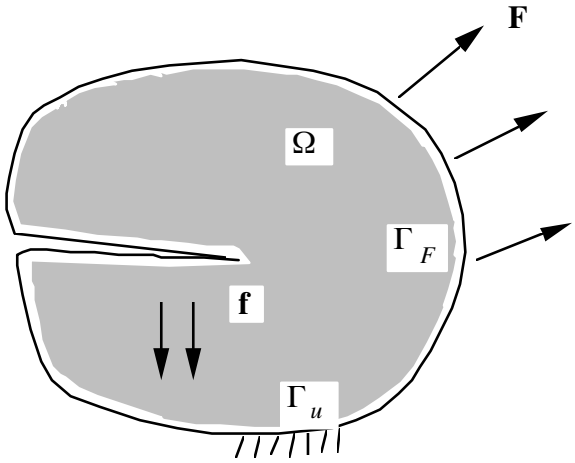
$$G = \frac{1}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) \text{ en contraintes planes}$$

$$G(s) = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2(s) + K_{II}^2(s)\right) + \frac{K_{III}^2(s)}{2\mu} \text{ , avec } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ , en 3D}$$

On peut montrer que cette relation reste valable en présence de contraintes initiales (donc en élasticité affine).
Le taux de restitution d'énergie $G$ est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la propagation du fond de fissure. Dans *Code_Aster*, $G$ est calculé par la méthode thêta [bib5 et documentation R7.02.01] qui est une méthode Lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)




Ainsi, on considère des transformations $M \to M + \eta\theta(M)$ du domaine de référence $\Omega_0$ en un domaine $\Omega_\eta$ qui correspondent à des propagations de la fissure. A ces familles de configuration de référence ainsi définies $\Omega_\eta$ correspondent des familles de configurations déformées dont la fissure s'est propagée. L'énergie potentielle définie sur $\Omega_\eta$ est ramenée sur $\Omega_0$.

On considère les forces surfaciques $\boldsymbol{F}$ et volumiques $\boldsymbol{f}$ appliquées respectivement à $\Gamma_F$ et $\Omega_0$. On note $\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}))$ la densité d'énergie libre, $\boldsymbol{u}$ le champ de déplacement, $T$ le champ de température et $\theta$ le champ de vecteurs décrivant la direction du transport en $\eta = 0$, $\Lambda$ le tenseur d'élasticité et $\sigma^0$ le champ de contrainte initiale, alors l'expression générale du taux de restitution d'énergie $G$ [bib5] est :

$$
\begin{aligned}
G \fint_\Omega & \left[\sigma(\boldsymbol{u}) : (\nabla \boldsymbol{u} \,.\, \nabla\theta) - \Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{div}\,\theta\right] d\Omega && \leftarrow \textit{terme classique} \\
& - \int_\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial T}(\nabla T \,.\, \theta)\, d\Omega && \leftarrow \textit{terme dû à la thermique} \\
+ \int_\Omega & \left[(\nabla \boldsymbol{f} \,.\, \theta)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}.\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\theta\right] d\Omega && \leftarrow \textit{terme dû aux forces volumiques } \boldsymbol{f} \textit{ sur } \Omega \\
- \int_\Omega & \left[(\Lambda^{-1} : \sigma(\boldsymbol{u})) : (\nabla \sigma^0 \,.\, \theta)\right] d\Omega && \leftarrow \textit{terme dû à la contrainte initiale} \\
+ \int_{\Gamma_F} & \left[(\nabla \boldsymbol{F} \,.\, \theta)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}\,.\,\boldsymbol{u}\left(\mathrm{div}\,\theta - \boldsymbol{n} \,.\, \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\right] d\Gamma && \leftarrow \textit{terme dû aux forces surfaciques } \boldsymbol{F} \textit{ sur } \Gamma_F \\
- \int_{\Gamma_u} & \left[(\sigma \,.\, \boldsymbol{n}) \,.\, (\nabla \boldsymbol{u} \,.\, \theta)\right] d\Gamma && \leftarrow \textit{terme dû aux déplacements imposés sur } \Gamma_u
\end{aligned}
$$

En élasticité linéaire, $G$ peut être considéré comme une forme bilinéaire symétrique du champ de déplacement $\boldsymbol{u}$. La densité d'énergie élastique $\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}))$ s'écrit :

$$\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u})) = \frac{1}{2}\varepsilon(\boldsymbol{u}) : \Lambda : \varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$$

en notant :

$B$ la forme bilinéaire symétrique définie par : $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varepsilon(\boldsymbol{u}) : \Lambda : \varepsilon(\boldsymbol{u})$

et la forme bilinéaire $g_{cla}(.,.)$ associée au terme classique de $G$ est définie par :

$$g_{cla}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{\partial B}{\partial \nabla \boldsymbol{u}} \,.\, (\nabla \boldsymbol{v} \,.\, \nabla\theta) + \frac{\partial B}{\partial \nabla \boldsymbol{v}} \,.\, (\nabla \boldsymbol{u} \,.\, \nabla\theta) - B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{div}\,\theta\right] d\Omega$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La construction des autres termes (forces volumiques et surfaciques, thermiques, contraintes initiales et déplacements imposés) est définie dans chaque sous-partie.

On a $G=g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ si $\boldsymbol{u}$ est solution du problème élastique.

## 1.4 Découplage des modes de rupture

Pour découpler les trois modes de rupture et calculer les trois facteurs d'intensité des contraintes associés, on utilise la forme bilinéaire symétrique $g(.,.)$ et la décomposition du champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ en parties régulière et singulière [bib7]. Pour simplifier la présentation, on se place dans un premier temps dans le cas plan, mais les propriétés se généralisent sans difficulté au cas 3D.

$$\begin{cases} g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^I)=g(\boldsymbol{u}_R+K_I\boldsymbol{u}_S^I+K_{II}\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^I)=g(\boldsymbol{u}_R,\boldsymbol{u}_S^I)+K_I g(\boldsymbol{u}_S^I,\boldsymbol{u}_S^I)+K_{II}\,g(\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^I) \\ g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^I)=g(\boldsymbol{u}_R+K_I\boldsymbol{u}_S^I+K_{II}\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^{II})=g(\boldsymbol{u}_R,\boldsymbol{u}_S^{II})+K_I g(\boldsymbol{u}_S^I,\boldsymbol{u}_S^{II})+K_{II}\,g(\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^{II}) \end{cases}$$

On démontre en thermoélasticité linéaire plane que $\boldsymbol{u}_S^I$ et $\boldsymbol{u}_S^{II}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire défini par la forme bilinéaire $g(.,.)$ et que les termes faisant intervenir la partie régulière s'annulent :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{u}_S^I,\boldsymbol{u}_S^{II}) &= g(\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^I) = 0 \\ g(\boldsymbol{u}^R,\boldsymbol{u}_S^I) &= g(\boldsymbol{u}^R,\boldsymbol{u}_S^{II}) = 0 \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^I) &= K_I g(\boldsymbol{u}_S^I,\boldsymbol{u}_S^I) \\ g(\boldsymbol{u}^R,\boldsymbol{u}_S^{II}) &= K_{II}\,g(\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^{II}) \end{aligned}$$

De plus, en écrivant le taux de restitution d'énergie sous la forme :

$$G=g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{u}_R+K_I\boldsymbol{u}_S^I+K_{II}\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_R+K_I\boldsymbol{u}_S^I+K_{II}\boldsymbol{u}_S^{II})$$

on retrouve la formule d'IRWIN en réutilisant les propriétés d'orthogonalité :

$$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=K_I^2 g(\boldsymbol{u}_S^I,\boldsymbol{u}_S^I)+K_{II}^2\,g(\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^{II})$$

avec :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{u}_S^I,\boldsymbol{u}_S^I) &= g(\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^{II}) = \frac{1-\nu^2}{E} \text{ en C_PLAN} \\ g(\boldsymbol{u}_S^I,\boldsymbol{u}_S^I) &= g(\boldsymbol{u}_S^{II},\boldsymbol{u}_S^{II}) = \frac{1}{E} \text{ en D_PLAN} \end{aligned}$$

Finalement, de manière générale :

$$\begin{cases} K_I=E\,g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^I) \\ K_{II}=E\,g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^{II}) \end{cases} \quad \text{en C_PLAN}$$

$$\begin{cases} K_I=\dfrac{E}{1-\nu^2}g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^I) \\ K_{II}=\dfrac{E}{1-\nu^2}g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^{II}) \end{cases} \quad \text{en D_PLAN et en 3D}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et $K_{III}=2\mu.g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^{III})$ en 3D

L'implantation du calcul des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire dans *Code_Aster* est réalisée à partir de l'expression du taux de restitution d'énergie $G$ en élasticité linéaire, écrite sous forme bilinéaire symétrique, en introduisant les expressions connues des déplacements singuliers, et en utilisant la méthode thêta.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Implantation de $K_I$, $K_{II}$ et $K_{III}$ en thermoélasticité linéaire dans *Code_Aster*

## 2.1 Types d'éléments et de chargements

Pour calculer les facteurs d'intensité de contraintes $K_I$ et $K_{II}$ (et éventuellement $K_{III}$) en élasticité linéaire, il faut utiliser l'option CALC_K_G de la commande CALC_G.

Cette option est valable aussi bien pour une fissure maillée (éléments finis classiques) que pour une fissure non maillée (éléments finis enrichis : méthode X-FEM). Elle est disponible en 2D (modélisations 'C_PLAN' et 'D_PLAN' pour une fissure maillée ou non ; modélisation 'AXIS' pour une fissure maillée uniquement) et en 3D, pour des éléments finis linéaires ou quadratiques.

Tous les chargements thermomécaniques classiques sont pris en compte : chargements thermiques, chargements volumiques (pesanteur, rotation, …), chargements surfaciques (y compris sur les lèvres de la fissure).

**Remarque :**

> *On ne tient pas compte du terme dû aux déplacements imposés sur $\Gamma_u$ , il ne faut donc pas imposer de conditions de DIRICHLET sur les lèvres de la fissure.*

## 2.2 Environnement nécessaire pour le calcul de $K_I$, $K_{II}$ et $K_{III}$

La commande CALC_G permet de récupérer le modèle du problème, les caractéristiques du matériau, le champ de déplacement. Le champ thêta est récupéré ou calculé par la commande CALC_G.

***Fissure maillée :***

- En 2D, il est nécessaire de définir le mot-clé FOND_FISS, qui permet de récupérer un concept de type fond_fiss (produit par la commande DEFI_FOND_FISS) où sont définis le noeud de fond de fissure et la normale à la fissure.
- En 3D, il est nécessaire de définir le mot-clé FISSURE, qui permet de récupérer un concept de type fiss_xfem (produit par la commande DEFI_FISS_XFEM) où sont définis les noeuds de fond de fissure et les bases locales le long du fond de fissure.
- Lorsque que la fissure est disposée le long d'un axe de symétrie, on peut se contenter de ne représenter que la moitié du modèle, et préciser la symétrie du chargement par le mot-clé SYME (ou si FOND_FISS est indiquée la présence de symétrie est automatiquement détectée). Par défaut, on suppose qu'il n'y a pas de symétrie . Si on affecte la valeur 'OUI' au mot clé SYME, cela signifie que seul le mode I de rupture agit (ouverture des lèvres de la fissure) et on affecte automatiquement la valeur nulle à $K_{II}$ (et éventuellement $K_{III}$).

***Fissure non maillée (méthode X-FEM) :***

- En 2D comme en 3D, la fissure doit être définie, pour le calcul mécanique et pour le post-traitement, à l'aide de la commande DEFI_FISS_XFEM. Le mot-clé FISSURE doit être renseigné dans CALC_G.
- Si la fissure n'est pas maillée, il n'est pas possible de prendre en compte les éventuelles symétries du modèle par rapport aux lèvres de la fissure.

Insistons sur la nécessité d'affecter à tous les éléments (y compris ceux des lèvres) les valeurs du modules d'YOUNG $E$ et du coefficient de POISSON $\nu$, car elles sont utilisées dans le calcul des déplacements singuliers. Ces valeurs doivent être homogènes sur tout le support du champ thêta. Par ailleurs, si un chargement est affecté sur les mailles surfaciques (en 3D) ou linéiques (en 2D) des lèvres de la fissure, les mailles de celles-ci doivent être correctement orientées.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 2.3 Forme bilinéaire symétrique g(. , .)

### 2.3.1 Terme classique élémentaire

$$TCLA = \sigma(\boldsymbol{u}) : (\nabla \boldsymbol{u} \nabla \theta) - \Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u})) \operatorname{div} \theta$$

La densité d'énergie élastique $\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}))$ peut s'écrire en thermo-élasticité linéaire sous la forme suivante :

en D_PLAN et en C_PLAN :

$$2\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u})) = C_1(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + 2C_2 \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 4C_3 \varepsilon_{xy}^2 - 2\Psi_{th}$$

en 3D :

$$2\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u})) = C_1(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + 2C_2(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}) + 4C_3(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) - 2\Psi_{th}$$

avec $\Psi_{th}$ = Densité d'énergie due à la thermique :

$$\Psi_{th} = 3K\alpha(T - T_{réf}) tr\,\varepsilon - \frac{9}{2} K \alpha^2 (T - T_{réf})^2$$

où :

$$\begin{aligned} 3K &= \frac{E}{1-2\nu} \\ \alpha &= \textit{dilation thermique} \\ \varepsilon &= \textit{tenseur de déformations} \\ T_{réf} &= \textit{température de référence} \end{aligned}$$

et avec :

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu \\ C_2 = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \\ C_3 = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = \mu \end{cases} \text{ en D_PLAN et en 3D ; } \begin{cases} C_1 = \dfrac{E}{(1-\nu^2)} \\ C_2 = \dfrac{\nu E}{(1-\nu^2)} \\ C_3 = \dfrac{E}{(1+\nu)} \end{cases} \text{ en C_PLAN}$$

En notant $\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u})) = \Psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$, on a $2\Psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = S1 - S1TH$ avec :

$$S1 = C1\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + C2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}(1-\delta_{ij})\right) + C3\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(1-\delta_{ij}) + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}(1-\delta_{kl})\right)$$

$$S1TH = 3K\alpha\left((T_u - T_{réf}) tr\,\varepsilon(\boldsymbol{v}) + (T_v - T_{réf}) tr\,\varepsilon(\boldsymbol{u})\right) - 9\mathrm{K}\,\alpha^2 (T_u - T_{réf})(T_v - T_{réf})$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où les indices *i*, *j*, *k* et *l* correspondent à une sommation sur les 2 coordonnées de l'espace (resp. 3 coordonnées) en 2D (resp. 3D) ; $T_{\mathbf{u}}$ est la température associée au champ de déplacement $\mathbf{u}$ par la relation :

$$\sigma=\Lambda\left(\varepsilon(\boldsymbol{u})-\varepsilon^{th}\right)$$

où $\varepsilon_{ij}^{th}=\alpha\left(T-T_{réf}\right)\delta_{ij}$ et $\sigma$ vérifient les équations d'équilibre. $T_v$ est la température associée au champ de déplacement $v=\boldsymbol{u}_s$ (fonctions singulières). Pour le calcul du taux de restitution d'énergie, $T_v=T_u, v=u$ , pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes, on a pris $T_v=T_f$ , i.e., on a pris les solutions singulières d'un problème purement mécanique.

**Remarque :**

*L'utilisation des solutions singulières purement thermiques dans la méthode G-théta pour déterminer les facteurs d'intensité des contraintes d'un problème thermo-mécanique comme programmé dans Code_Aster entraîne implicitement l'approximation dans le calcul des K.*

*La comparaison entre G calculé par* `CALC_K_G` *et* `G_IRWIN` *va fournir une indicateur d'erreur. Si la différence est très grande, le calcul de K n'est pas juste. Cependant, les valeurs de G sont justes.*

De la même façon, le terme $\sigma(\boldsymbol{u}):(\nabla\boldsymbol{u}\nabla\theta)$ peut s'écrire :

$$\sigma(\boldsymbol{u}):(\nabla\boldsymbol{u}\nabla\theta)=S2-S2TH$$

avec :

$$S2=C1\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial\theta_k}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(1-\delta_{ij}\right)\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\right]$$
$$+C2\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(1-\delta_{jk}\right)\right]$$
$$+C3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right)\left(1-\delta_{jk}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\right]$$

et :

$$S2TH=\frac{TH1}{2}3K\alpha\left(T_u-T_{réf}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\right)+\frac{THA}{2}3K\alpha\left(T_v-T_{réf}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\right)$$

où $\mathrm{TH1}=1$ en `D_PLAN` et en `3D` et $\mathrm{TH1}=\frac{1-2\nu}{1-\nu}$ en `C_PLAN`.

Finalement le terme classique s'écrit :

$$TCLA=\left(S2-S2TH\right)-\frac{1}{2}\left(S1-S1TH\right)\operatorname{div}\theta$$

### 2.3.2 Terme thermique

On fait l'hypothèse que les caractéristiques du matériau $(E,\nu,\alpha)$ ne dépendent pas de la température.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

en D_PLAN et en C_PLAN : $TTHE=\frac{-\partial\Psi}{\partial T}(\nabla T.\theta)=\frac{1}{2}3K\alpha tr\varepsilon(\frac{\partial T}{\partial x}\theta_x+\frac{\partial T}{\partial y}\theta_y)$

en 3D :

$TTHE=TTHE1+TTHE2$ avec

$$TTHE1=\frac{1}{2}3K\alpha(tr\varepsilon(\boldsymbol{u})(\frac{\partial T_v}{\partial x}\theta_x+\frac{\partial T_v}{\partial y}\theta_y+\frac{\partial T_v}{\partial z}\theta_z)+tr\varepsilon(\boldsymbol{v})(\frac{\partial T_u}{\partial x}\theta_x+\frac{\partial T_u}{\partial y}\theta_y+\frac{\partial T_u}{\partial z}\theta_z))$$

et

$$TTHE2=-9K\alpha^2((T_u-T_{réf})(\frac{\partial T_v}{\partial x}\theta_x+\frac{\partial T_v}{\partial y}\theta_y+\frac{\partial T_v}{\partial z}\theta_z)+(T_v-T_{réf})(\frac{\partial T_u}{\partial x}\theta_x+\frac{\partial T_u}{\partial y}\theta_y+\frac{\partial T_u}{\partial z}\theta_z))$$

Pour le calcul du taux de restitution d'énergie, $T_v=T_u, v=u$ , pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes, on a pris $T_v=T_f$ , i.e., on a pris les solutions singulières d'un problème purement mécanique.

**Remarque :**

*L'utilisation des solutions singulières purement thermiques dans la méthode G-théta pour déterminer les facteurs d'intensité des contraintes d'un problème thermo-mécanique comme programmé dans Code_Aster entraîne implicitement l'approximation dans le calcul des K.*

*La comparaison entre G calculé par CALC_K_G et G_IRWIN va fournir une indicateur d'erreur. Si la différence est très grande, le calcul de K n'est pas juste. Cependant, les valeurs de G sont justes.*

### 2.3.3 Terme force volumique

$$TFOR=(\nabla f.\theta)\boldsymbol{u}+f.\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\theta$$

En toute rigueur, ce terme est linéaire et non quadratique en déplacement. La construction de la forme bilinéaire symétrique associée n'est donc pas triviale. On considère alors qu'il existe une dépendance de la force au champ de déplacement ; on note $f_u$ les forces volumiques associées au champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ pour le problème élastique et $f_v$ les forces volumiques associées au champ admissible fictif $\boldsymbol{v}$ . On peut alors construire une expression bilinéaire symétrique de $TFOR$ $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ comme suit :

$$TFOR(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}[(\nabla f_u.\theta)\boldsymbol{v}+(\nabla f_v.\theta)\boldsymbol{u}+(f_u.\boldsymbol{v}+f_v.\boldsymbol{u})\,\mathrm{div}\,\theta]$$

On notera bien que $TFOR(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=TFOR$ .

Comme les expressions que nous sommes amenés à calculer sont du type $TFOR(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ et $TFOR(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u_S})$ , où $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u_S}$ sont respectivement le champ de déplacement et le champ singulier, et que :

$$f_{u^s}=\mathrm{div}(\sigma(\boldsymbol{u_S}))=0 \text{ sur } \Omega$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On se limite à écrire :

$$TFOR(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = CS[(\nabla F_u.\theta)\,\boldsymbol{v} + F_u.\boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\theta] \text{ avec } \begin{cases} CS=0.5 & v=u_S \\ CS=1 & v=u \end{cases}$$

La même remarque est valable pour le terme classique thermique, le terme supplémentaire dû à la thermique et les termes dus aux forces surfaciques.

Les termes de forces volumiques et de contrainte initiale engendrent des termes linéaires et non quadratiques en $\boldsymbol{u}$ et donc dont la forme bilinéaire associée est plus délicate à construire,
Pour le faire, considérons que les contraintes initiales et les forces volumiques dépendent également du champ de déplacement ; on introduit alors

### 2.3.4 Terme de contrainte initiale

$$TINI_1 = -\int_\Omega \left[(\Lambda^{-1}:\sigma(\boldsymbol{u})):(\nabla\sigma^0.\theta)\right] d\,\Omega$$

En toute rigueur, ce terme est linéaire et non quadratique en déplacement. La construction de la forme bilinéaire symétrique associée n'est donc pas triviale. On réalise le même raisonnement que pour le terme de force volumique, en considèrant qu'il existe une dépendance de la force au champ de déplacement ; on note $\sigma_u^0$ les forces volumiques associées au champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ pour le problème élastique et $\sigma_v^0$ les forces volumiques associées au champ admissible fictif $\boldsymbol{v}$. On peut alors construire une expression bilinéaire symétrique de $TINI_1$ comme suit :

$$TINI_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left[(\Lambda^{-1}:\sigma_u):(\nabla\sigma_v^0.\theta) + (\Lambda^{-1}:\sigma_v):(\nabla\sigma_u^0.\theta)\right] d\,\Omega$$

avec $\sigma_u = \Lambda : sym(\nabla\boldsymbol{u}) + \sigma_u^0$ et $\sigma_v = \Lambda : sym(\nabla\boldsymbol{v}) + \sigma_v^0$

En présence de contraintes initiales, la formulation de l'énergie libre et la relation contrainte/déformation sont également modifiées.

$$\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\sigma^0}) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon(\boldsymbol{u}) + \Lambda^{-1}:\sigma^0\right):\Lambda:\left(\varepsilon(\boldsymbol{u}) + \Lambda^{-1}:\sigma^0\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon_{ref}\right):\Lambda:\left(\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon_{ref}\right)$$

$$\sigma = \Lambda:\varepsilon(\boldsymbol{u}) + \sigma^0$$

avec $\varepsilon_{ref} = -\Lambda^{-1}:\sigma^0$

Cela ajoute deux termes liés au terme classique $\sigma(\boldsymbol{u}):(\nabla\boldsymbol{u}\nabla\theta) - \Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}))\mathrm{div}\,\theta$ :

- un terme lié à l'ajout de la contrainte initiale dans la contrainte : $TINI_2 = \sigma^0:(\nabla\boldsymbol{u}\nabla\theta)$
- un terme lié à la modification de l'énergie libre : $TINI_3 = -\frac{1}{2}\left(2\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon_{ref}\right):\sigma^0\,\mathrm{div}\,\theta$

On réalise le même raisonnement et on construit les termes de forme bilinéaire associée :

- $TINI_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\sigma_v^0:\nabla\boldsymbol{u} + \sigma_u^0:\nabla\boldsymbol{v}\right).\nabla\theta$
- $TINI_3(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{4}\left((2\varepsilon(\boldsymbol{u})):\sigma_v^0 + (2\varepsilon(\boldsymbol{v})):\sigma_u^0 + 2\sigma_u^0:\Lambda^{-1}:\sigma_v^0\right)\mathrm{div}\,\theta$

Deux cas de figure se présentent : soit $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ (détermination de G), soit $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u_S}$ (détermination des facteurs d'intensité des contraintes). Dans ce deuxième cas, il faut se souvenir que le champ de contraintes initiales est déterminé avant l'apparition de fissure, et donc n'est a priori pas compatible



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec un champ singulier. Sa contribution aux déplacements intervient en réalité à travers la contrainte totale en équilibre avec le champ de déplacement.
On écrit donc :

$$\begin{cases}\sigma_v^0=\sigma^0 & si\ v=u\\ \sigma_v^0=0 & si\ v=u_S\end{cases}$$

Au final, pour le calcul du taux de restitution d'énergie :

- $TINI_1(u,u)=-\int_\Omega\left[(\varepsilon(u)+\Lambda^{-1}:\sigma^0):(\nabla\sigma^0.\theta)\right]d\Omega$
- $TINI_2(u,u)=\int_\Omega(\sigma^0:\nabla u).\nabla\theta\,d\Omega$
- $TINI_3(u,u)=-\frac{1}{2}\int_\Omega\left((2\varepsilon(u)):\sigma^0+\sigma^0:\Lambda^{-1}:\sigma^0\right)\mathrm{div}\,\theta\,d\Omega$

Et pour les facteurs d'intensité des contraintes :

- $TINI_1(u,u_S)=-\frac{1}{2}\int_\Omega\left[(\varepsilon(u_S)):(\nabla\sigma^0.\theta)\right]d\Omega$
- $TINI_2(u,u_S)=\frac{1}{2}\int_\Omega(\sigma^0:\nabla u_S).\nabla\theta\,d\Omega$
- $TINI_3(u,u_S)=-\frac{1}{2}\int_\Omega\left((\varepsilon(u_S)):\sigma^0\right)\mathrm{div}\,\theta\,d\Omega$

### 2.3.5 Terme force surfacique

Le terme force surfacique s'écrit :

$$TSUR=(\nabla F.\theta)\,u+F.u(\mathrm{div}\,\theta-n.\frac{\partial\theta}{\partial n})$$

Le terme en $n.\frac{\partial\theta}{\partial n}$ est nul car le gradient de $\theta$ est orthogonal à $n$. Comme pour le terme force volumique, l'expression bilinéaire $TSUR(u,v)$ s'obtient en considérant que $v$ est soit égal au déplacement $u$ (et donc $F_v=F_u$), soit à un champ singulier $u_S$ (et donc $F_v=0$). On a alors :

$$TSUR(u,v)=CS[(\nabla F_u.\theta)v+F_u.v\,\mathrm{div}\,\theta]\ \text{avec}\ \begin{cases}CS=0.5 & v=u_S\\ CS=1 & v=u\end{cases}$$

### 2.3.6 Terme de dynamique modale

Dans le cas des problèmes dynamiques, un terme supplémentaire $TDYN$ apparaît dans la décomposition de taux de restitution d'énergie exprimée dans le paragraphe 1.3 :

$$TDYN=-\int_\Omega\frac{1}{2}\rho\,\dot{u}\ddot{u}.div\,\sigma.d\Omega-\int_\Omega\frac{1}{2}\rho\,\dot{u}\nabla\dot{u}.\theta.d\Omega+\int_\Omega\frac{1}{2}\rho\,\ddot{u}\nabla u.\theta.d\Omega$$

où $\dot{u}$ et $\ddot{u}$ sont respectivement la dérivée première et seconde du champ de déplacement $u$ par rapport au temps. Pour les problèmes harmoniques, ce terme peut se simplifier [bib 10]. En notant $\omega$ la pulsation du mode propre étudié et $\rho$ la masse volumique, la forme bilinéaire du terme dynamique s'écrit ainsi :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$TDYN(u,v)=-\frac{1}{2}(\rho\omega^2 u_k v_{k,j}\theta_j+\rho\omega^2 v_k u_{k,j}\theta_j)\ .$$

## 2.4 Champs de déplacements singuliers et leurs dérivées

Les champs singuliers $u_S^I$, $u_S^{II}$ et $u_S^{III}$, associés respectivement aux modes $I$, $II$ et $III$, sont connus explicitement ainsi que leurs dérivées. Ils sont écrits en fonction des coordonnées polaires dans le repère lié à la fissure.
L'introduction successive de ces champs singuliers permet, comme indiqué dans le §1, le calcul élémentaire des facteurs d'intensité de contraintes $K_I$, $K_{II}$ et $K_{III}$.

## 2.5 Post-traitement des résultats de $K_I$ et $K_{II}$

### 2.5.1 Pour les problèmes 2D

Connaissant les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes $K_I$ et $K_{II}$ pour une fissure donnée, les formules de AMESTOY - BUI et DANG-VAN, permettent le calcul de l'angle de propagation de la fissure selon 3 critères ( $K_I$ maximal, $K_{II}$ et $G$ maximal) [bib6].

Soit $\Omega_m^\eta$ un domaine identique à $\Omega$ sauf que la fissure est prolongée dans la direction d'angle $m$ d'un segment de droite de longueur $\eta$.

$$\Omega_m^0 \equiv \Omega$$

Soient $K_I(\eta,m)$, $K_{II}(\eta,m)$ , $G(\eta,m)$ les facteurs d'intensité de contraintes et le taux de restitution d'énergie de $\Omega_m^\eta$ soumis au même chargement que $\Omega$.

On pose :

$$\begin{aligned} K_I^*(m) &= \lim_{\eta\to 0} K_I(\eta,m) \\ K_{II}^*(m) &= \lim_{\eta\to 0} K_{II}(\eta,m) \\ G^*(m) &= \lim_{\eta\to 0} G(\eta,m) \end{aligned}$$

Les critères cités par AMESTOY - BUI et DANG-VAN [bib6] sont :

- choisir $m_0$ tel que $K_I^*(m_0)$ soit maximum,
- choisir $m_0$ tel que $K_{II}^*(m_0)$ soit nul,
- choisir $m_0$ tel que $G^*(m_0)$ soit maximum.

Ces critères donnent des résultats très voisins [bib8].

Les résultats sont donnés sous forme d'un tableau de 4 coefficients $K_{11}$, $K_{21}$, $K_{12}$ , $K_{22}$ permettant de calculer $K_I^*$ et $K_{II}^*$ dans tous les cas de chargement :

$$\begin{pmatrix} K_I^* \\ K_{II}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| **Angle** $m$ (°) | $K_{11}$ | $K_{21}$ | $K_{12}$ | $K_{22}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0,9886 | 0,0864 | — 0,2597 | 0,9764 |
| 20 | 0,9552 | 0,1680 | — 0,5068 | 0,9071 |
| 30 | 0,9018 | 0,2403 | — 0,7298 | 0,7972 |
| 40 | 0,8314 | 0,2995 | — 0,9189 | 0,6540 |
| 50 | 0,7479 | 0,3431 | — 1,0665 | 0,4872 |
| 60 | 0,6559 | 0,3696 | — 1,1681 | 0,3077 |
| 70 | 0,5598 | 0,3788 | — 1,2220 | 0,1266 |
| 80 | 0,4640 | 0,3718 | — 1,2293 | — 0,0453 |
| 90 | 0,3722 | 0,3507 | — 1,1936 | — 0,1988 |

$$K_{11}(-m)=K_{11}(m),\ K_{21}(-m)=-K_{21}(m),\ K_{12}(-m)=-K_{12}(m),\ K_{22}(-m)=K_{22}(m)$$

La recherche de l'angle $m_0$ dans CALC_G est faite de 10 degrés en 10 degrés. L'angle $\beta$ de propagation n'est calculé et imprimé (dans le fichier MESSAGE) que si INFO vaut 2.

### 2.5.2 Pour les problèmes 3D

La direction de propagation d'une fissure en 3D peut être déterminée par le principe du *Maximum Hoop Stress Criterion* (maximisation de la contrainte circonférentielle) [bib11]. L'angle de propagation s'exprime alors de la façon suivante :

$$\beta=2\arctan\left[\frac{1}{4}.\left(\frac{K_I}{K_{II}}-sign(K_{II}).\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2+8}\right)\right]$$

L'angle $\beta$, calculé systématiquement, est indiqué dans le tableau résultat produit par la commande CALC_G (colonne BETA).

# 3 Bibliographie

1 H.D. BUI, J.M. PROIX : "Loi de conservation en thermo-élasticité linéaire" - C.R. Acad.Sc.Paris, t.298, Série II, n° 8, 1984.

2 H.D. BUI : "Associated path independent J-Integrals for separating mixed modes" - J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, N° 6, pp. 439-448, 1983.

3 H.D. BUI : "Mécanique de la rupture fragile" - Masson, 1977.

4 P;. DESTUYNDER, M. DJAOUA : "Sur une interprétation de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, Mathematics Methods in the Applied Sciences" - Vol. 3, pp. 70-87, 1981.

5 P. MIALON : "Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode théta" - E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n° 3, 1988, pp. 1-28.

6 M. AMESTOY, H.D. BUI, K. DANG-VAN : "Déviation infinistésimale d'une fissure dans une direction arbitraire" - C.R. Acad. Sc. Paris, t.289 (24 septembre 1979), Série B-99.

7 E. VISSE : "Calcul des facteurs d'intensité de contraintes en élasticité linéaire plane" - Note interne EDF-DER-MMN, HI-75505D du 05/07/94.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 P.MIALON : "Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure", note interne E.D.F. HI/4740-07 - 1984.

9 J.B. LEBLOND : "Mécanique de la rupture fragile et ductile" – Lavoisier, 2003.

10 E. GALENNE, S. DI DOMIZIO : "Méthode thêta en mécanique de la rupture : développement de la forme bilinéaire de G en 3D et application au cas de la dynamique modale basse fréquence", note interne E.D.F. R&D HT-65/05/024 - 2006.

11 G. ERDOGAN, G.C. SIH, “On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear”, Journal of Basic Engineering, 85, 519-27, 1963.

12 R.A. CHAUDHURI, “Three-dimensional asymptotic stress field in the vicinity of the circumference of a penny shaped discontinuity”, Int. J. of Solids and Structures, 40, 3787-3805, 2003.

# 4 Description des versions du document

| Indice doc | Version Aster | Auteur(s) ou contributeur(s), organisme | Description des modifications |
|---|---|---|---|
| A | 4 | E.Visse EDF/R&D/MMN | Texte intial |
| B | 7.4 | E.Galenne EDF/R&D/AMA | modifications mineures |
| C | 8.4 | E.Galenne EDF/R&D/AMA | Extension au 3D, termes volumiques et thermiques |
| D | 9.4 | E.Galenne EDF/R&D/AMA | Fiche 11175 CALC_K_G en axisymétrique |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)