Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité linéaire

Résumé :

On présente le calcul du taux de restitution de l'énergie G par la méthode θ en 2D ou en 3D pour un problème thermo-élastique linéaire. On explique comment le champ θ est introduit dans *Code_Aster* et comment le taux de restitution d'énergie est calculé avec l'opérateur CALC_G.

Des études mécano-fiabilistes d'évaluation de probabilité d'amorçage de la rupture requièrent, en plus, sa dérivée par rapport à une variation de domaine pilotée par un autre champ. On détaille l'implantation de cette option dans le code.

Le calcul de G est disponible aussi bien pour une fissure maillée (éléments finis classiques) que pour une fissure non maillée (éléments finis enrichis : méthode X-FEM). Le calcul de sa dérivée n'est quant à lui disponible qu'en 2D, pour une fissure maillée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode en thermo-élasticité linéaire....3
1.1 Relation de comportement....3
1.2 Énergie potentielle et relations d'équilibre....4
1.3 Expression Lagrangienne du taux de restitution d'énergie....5
2 Discrétisation du taux de restitution d'énergie....10
2.1 Méthode en dimension 2....10
2.2 Méthode en dimension 3....10
2.3 Choix dans Aster de la discrétisation de G en dimension 3....11
2.3.1 Description des espaces d'approximations....11
2.3.2 Premier cas (LEGENDRE-LEGENDRE)....13
2.3.3 Second cas (LEGENDRE-LAGRANGE)....14
2.3.4 Troisième cas (LAGRANGE-LAGRANGE)....14
2.3.5 Troisième cas (LAGRANGE_NO_NO-LAGRANGE)....19
2.3.6 Correction des valeurs aux extrémités du fond de fissure....19
2.4 Implantation de G en thermo-élasticité linéaire dans Aster....21
2.4.1 Types d'éléments et de chargements....21
2.4.2 Environnement nécessaire....21
2.4.3 Calculs des différents termes du taux de restitution d'énergie....22
2.4.3.1 Terme classique élémentaire....22
2.4.3.2 Terme force volumique....23
2.4.3.3 Terme force surfacique....23
2.4.3.4 Terme thermique....23
2.4.3.5 Terme de pré-déformations et contraintes initiales....23
24
2.4.4 Normalisation du taux de restitution d'énergie dans Aster....25
2.4.4.1 Axisymétrie....25
2.4.4.2 Autres cas....25
3 Introduction du champ dans Aster....27
3.1 Conditions à remplir....27
3.2 Choix du champ en dimension 3....27
3.2.1 Méthode de construction....27
3.2.2 Algorithmes de calcul....28
3.3 Choix du champ en dimension 2....31
3.4 Autre méthode....31
4 Bibliographie....32

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode θ en thermo-élasticité linéaire

1.1 Relation de comportement

On considère un solide élastique fissuré occupant le domaine Ω de l'espace R^2 ou R^3. Soit :

- u le champ de déplacement,
- T le champ de température,
- f le champ de forces volumiques appliquées sur Ω,
- g le champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$,
- U le champ de déplacements imposés sur une partie S_d de $\partial\Omega$.

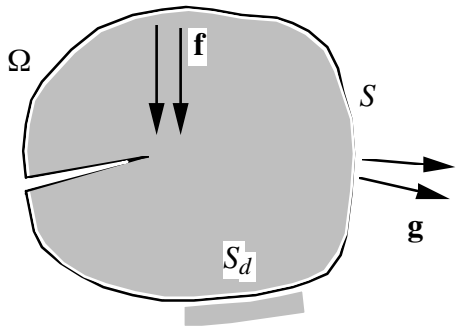


Figure 1.1-a : Solide élastique fissuré

Pour simplifier, on se place en **élasticité linéaire et en petites déformations**, mais cette approche se généralise sans peine à la plasticité [R7.02.07], aux grandes déformations, à la dynamique...
On désigne par :

- ε le tenseur des déformations,
- ε^0 le tenseur de pré-déformations,
- ε^{th} le tenseur des déformations d'origine thermique,
- σ le tenseur des contraintes,
- σ^0 le tenseur des contraintes initiales,
- $\Psi(\varepsilon, \varepsilon^0, \sigma^0, T)$ la densité d'énergie libre,
- Λ le tenseur d'élasticité.

ε est relié au champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ par :

$$\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

La **densité d'énergie libre** $\Psi(\varepsilon, \varepsilon^0, \sigma^0, T)$ est identifiée par un essai de traction et de dilatation en petites déformations. $\Psi(\varepsilon, \varepsilon^0, \sigma^0, T)$ est une fonction convexe et dérivable.

$$\Psi(\varepsilon, \varepsilon^0, \sigma^0, T) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^0 + \Lambda^{-1}\sigma^0)\Lambda(\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^0 + \Lambda^{-1}\sigma^0)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La loi de comportement d'un matériau élastique s'écrit sous la forme :

$$\sigma=\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon,\varepsilon^0,\sigma^0,T)=\Lambda(\varepsilon-\varepsilon^{th}-\varepsilon^0)+\sigma^0$$
$$\text{avec } \varepsilon^{th}_{ij}=\alpha(T-T_{ref})\delta_{ij}$$

Dans le cas où les déformations initiales ε^0 et les contraintes initiales sont nulles, la densité d'énergie libre s'écrit :

$$\Psi(\varepsilon,T)=\frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{ii})^2+\mu\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}-3K\,\alpha(T-T_{réf})\varepsilon_{kk}+\frac{9}{2}K\,\alpha^2(T-T_{réf})^2$$

La **relation de comportement** s'écrit :

$$\sigma_{ij}=\lambda\,\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\,\mu\,\varepsilon_{ij}-3K\,\alpha(T-T_{réf})\delta_{ij}$$

λ et μ sont les coefficients de LAME.
α est le coefficient de dilatation thermique.
$T_{réf}$ est la température de référence.
K, module de compressibilité volumique, est relié aux coefficients de LAME par : $3K=3\lambda+2\mu$.

La relation de comportement à partir du module d'YOUNG E et du coefficient de POISSON ν est :

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}(tr\,\varepsilon)\delta_{ij}\right)-\frac{\alpha E}{1-2\nu}(T-T_{réf})\delta_{ij}$$

$$\text{avec :}\quad \lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$$
$$3K=\frac{E}{1-2\nu}$$

1.2 Énergie potentielle et relations d'équilibre

On définit les espaces des champs cinématiquement admissible V et V_0.

$$V \;=\{\boldsymbol{v}\text{ admissibles, }\boldsymbol{v}=\boldsymbol{U}\text{ sur }S_d\}$$
$$V_0 \;=\{\boldsymbol{v}\text{ admissibles, }\boldsymbol{v}=0\text{ sur }S_d\}$$

Avec les hypothèses du [§1.1] (et pour $\sigma^0=\varepsilon^0=0$), les **relations d'équilibre en formulation faible** sont :

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}\in V\\ \int_\Omega \sigma_{ij}v_{i,j}\,d\Omega=\int_\Omega f_i v_i\,d\Omega+\int_S g_i v_i\,d\Gamma\;,\;\forall\,\boldsymbol{v}\in V_O\end{cases}$$

Elles sont obtenues en minimisant l'énergie potentielle globale du système :

$$W(\boldsymbol{v})=\int_\Omega \Psi(\varepsilon(\boldsymbol{v}),T)\,d\Omega-\int_\Omega f_i v_i\,d\Omega+\int_S g_i v_i\,d\Gamma$$

En effet, si cette fonctionnelle est minimale pour le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$, alors :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_\Omega f_i \delta v_i d\Omega - \int_S g_i \delta v_i d\Gamma \\ &= \int_\Omega \sigma_{ij} \frac{1}{2}(\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i}) d\Omega - \int_\Omega f_i \delta v_i d\Omega - \int_S g_i \delta v_i d\Gamma \\ &= \int_\Omega \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega - \int_\Omega f_i \delta v_i d\Omega - \int_S g_i \delta v_i d\Gamma \qquad = \ 0\end{aligned}$$

Nous retrouvons donc les équations d'équilibre et la relation de comportement en ayant posé : $\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}$.

1.3 Expression Lagrangienne du taux de restitution d'énergie

Par définition [bib1] le taux de restitution d'énergie locale G est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport au domaine Ω :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial \Omega}$$

Ce taux de restitution peut être calculé dans *Code_Aster* par la méthode θ , qui est une **méthode lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle** [bib4] [bib2]. On considère des transformations $F^\eta : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M} + \eta\,\theta(\boldsymbol{M})$ du domaine de référence Ω en un domaine Ω^η modélisant des propagations de la fissure, qui à un point matériel $\boldsymbol{P}$ font correspondre un point spatial $\boldsymbol{M}$. Ces transformations ne doivent modifier que la position du fond de fissure Γ_0. Les champs θ doivent donc être tangents à $\partial\Omega$, c'est-à-dire en notant $\boldsymbol{n}$ la normale à $\partial\Omega$:

$$\theta \in \Theta = \{\mu \text{ tels que } \mu . \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Remarque

Cette famille de fonctions de transformation doit être suffisamment régulière. En particulier, elle doit être au moins deux fois dérivables par morceaux en $\boldsymbol{P}$ et en η (pour que les dérivées partielles secondes commutent) et réaliser un difféomorphisme pour chaque valeur du paramètre η (cela assure la réversibilité du processus).

Soit $\boldsymbol{m}$ la normale unitaire à Γ_0 située dans le plan tangent à $\partial\Omega$ (c'est-à-dire tangent au plan de la fissure) et rentrant dans Ω .

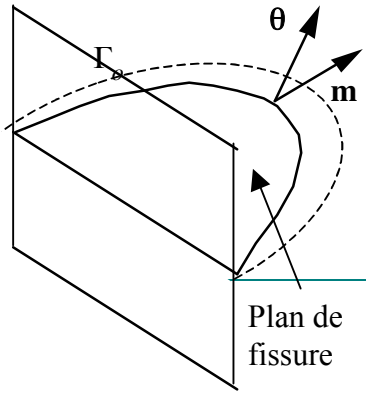


Figure 1.3-a : Fond de fissure en 3D

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

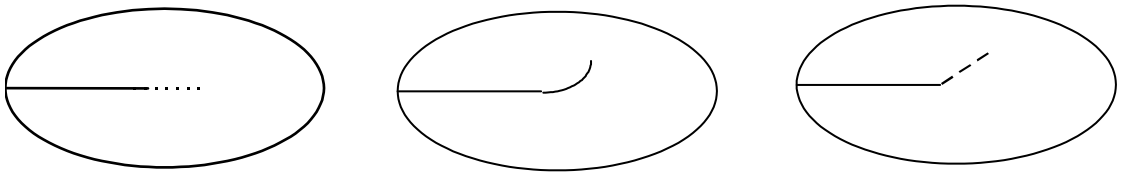
D'après la proposition 7 de [bib4], le taux de restitution d'énergie locale G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_0} G\theta.\boldsymbol{m} = G(\theta) \ , \ \forall \theta \in \Theta$$

où $G(\theta)$ est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle $W(\boldsymbol{u}(\eta))$ à l'équilibre par rapport à l'évolution initiale du fond de fissure η :

$$G(\theta) = -\dot{W} = -\left.\frac{d\,W(\boldsymbol{u}(\eta))}{d\,\eta}\right|_{\eta=0}$$

La quantité $\theta.\boldsymbol{m}$ représente la vitesse normale du fond de fissure. D'autre part, $G(\theta)$ a la même valeur qu'il s'agisse d'une propagation droite [Figure1.3-b] (a) ou d'une propagation courbe [Figure 1.3-b] (b) dans la mesure où celle ci à la même tangente au départ (ensuite on en peut rien dire). En revanche, on ne peut rien dire du cas de la propagation dans une direction marquant un angle [bib5] [Figure 1.3-b] (c).



a b c

Figure 1.3-b : Différentes géométries de propagations

Par la suite, lorsqu'aucune confusion ne sera possible, on désignera par $\cdot$ la dérivée lagrangienne dans une propagation virtuelle de fissure de vitesse θ. Soit $\phi(\eta, \boldsymbol{M})$ un champ spatial (ou eulérien) quelconque défini sur $R^+ \times \Omega$, nous noterons sa représentation matérielle (ou lagrangienne) $\bar{\varphi}(\eta, \boldsymbol{P}) = \varphi(\eta, F^{\eta}(\boldsymbol{P}))$ et sa dérivée particulaire (ou lagrangienne) par rapport $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ à cette propagation virtuelle $\dot{\varphi} = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$.

Remarques [bib6] :

•Le fait d'adopter deux visions différentes (eulérienne et lagrangienne) introduit structurellement des notions de dérivabilités croisées. Ainsi, cette dérivée particulaire d'un champ spatial appelée dérivée lagrangienne consiste à dériver $\phi(\eta, \boldsymbol{M})$ en fixant le point matériel $\boldsymbol{P} = \left(\boldsymbol{F}^{\eta}\right)^{-1}(\boldsymbol{M})$. On transpose le champ en représentation lagrangienne, puis on le dérive par rapport à η avant de le reconvertir en représentation eulérienne.

•On rappelle que cette dérivée lagrangienne est liée à la dérivée eulérienne $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ par la relation

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \nabla \varphi . \theta$$

Remarque [bib4] :

La dérivée eulérienne $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ ne dépend que de Ω restreint à $\delta\Omega$, c'est-à-dire de la trace de Ω sur le fond de fissure.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Avec ces notations, le taux de restitution d'énergie dans cette propagation θ s'écrit (en utilisant le **théorème de transport de Reynolds** cf. [§4.2.1]) :

$$-G(\theta)=\int_{\Omega}\overbrace{\psi-f_i u_i}^{\cdot}+(\psi-f_i u_i)\theta_{k,k}\,d\Omega-\int_{S}\overbrace{g_i u_i}^{\cdot}+g_i u_i\left(\theta_{k,k}-\frac{\partial\theta}{\partial n_k}n_k\right)d\Gamma$$

Or

$$\dot{\Psi}(\varepsilon,\varepsilon^0,\sigma^0,T)=\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^0_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\,0}+\frac{\partial\psi}{\partial\sigma^0_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}^{\,0}+\frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T}$$

T, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, σ^0, ε^0 étant supposés indépendants de η, c'est-à-dire étant la restriction à Ω (ou $\delta\Omega$) de champs définis sur R^3, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{T} &= T_{,k}\theta_k\\ \dot{f}_i &= f_{i,k}\theta_k\\ \dot{g}_i &= g_{i,k}\theta_k\\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{\,0} &= \varepsilon_{ij,k}^{\,0}\theta_k\\ \dot{\sigma}_{ij}^{\,0} &= \sigma_{ij,k}^{\,0}\theta_k\end{aligned}$$

En effet, si on considère des chargements et des matériaux φ qui sont la **restriction sur la géométrie** Ω (ou une partie de sa frontière) de champs définis sur R^3 tout entier :

$$\exists\Phi/\varphi=\Phi_{|\Omega}=0$$

La dérivation par rapport au paramètre η commutant avec cette restriction, on a le résultat

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_{|\Omega}=0_{|\Omega}=0$$

Remarques :

- *Cette hypothèse n'est vérifiée que pour des champs suffisamment réguliers (par exemple appartenant à des espaces de Sobolev de Ω). Leur définition ne doit pas être impactée par la variation de frontière.*
- *Dans le cas de la dérivation du taux de restitution d'énergie par rapport à une variation de domaine (cf. [§4]) la dérivée eulérienne du champ de température ne pourra plus être négligée.*

D'autre part, on a aussi supposé que les **dérivées eulériennes des caractéristiques matériaux** φ sont nulles, ce qui n'est vrai que sur le problème discrétisé avec les fonctionnalités actuelles de l'opérateur DEFI_MATERIAU. Leur gradient sur chaque élément est aussi nul par construction (elles sont discrétisées P_0 c'est-à-dire constantes par éléments finis), il en découle que la dérivée lagrangienne est nulle :

$$\dot{\varphi}=\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}_{=0}+\underbrace{\nabla\varphi.\theta}_{=0}\ \text{pour}\ \varphi\in\{E,\nu,\alpha,T_{ref}\}$$

Attention :

Avec des caractéristiques matériaux variables au sein d'éléments finis de la couronne θ de calcul, cette simplification n'est plus licite.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Comme $\Psi(\varepsilon,\varepsilon^0,\sigma^0,T)=\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon^{th}-\varepsilon^0+\Lambda^{-1}\sigma^0)\Lambda(\varepsilon-\varepsilon^{th}-\varepsilon^0+\Lambda^{-1}\sigma^0)$

on a
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}}=\Lambda_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon^{th}_{kl}-\varepsilon^0_{kl})+\sigma^0_{ij}=\sigma_{ij}$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon^0_{ij}}=-\Lambda_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon^{th}_{kl}-\varepsilon^0_{kl}+\Lambda^{-1}_{klpq}\sigma^0_{pq})=-\sigma_{ij}$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma^0_{ij}}=(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^{th}_{ij}-\varepsilon^0_{ij}+\Lambda^{-1}_{ijkl}\sigma^0_{kl})=\Lambda^{-1}_{ijkl}\sigma_{kl}$$

d'où $$\dot{\Psi}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon_{ij}}-\sigma_{ij}\varepsilon^0_{ij,k}\theta_k+\Lambda^{-1}_{ijpq}\sigma_{pq}\sigma^0_{ij,k}\theta_k+\frac{\partial\Psi}{\partial T}T_{,k}\theta_k$$

D'autre part, d'après la proposition 2 de [bib4] : $\left(\overbrace{\varphi_{i,j}}^{\cdot}\right)=\dot{\varphi}_{i,j}-\varphi_{i,p}\theta_{p,j}$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})-\frac{1}{2}(u_{i,p}\theta_{p,j}+u_{j,p}\theta_{p,i})$$

Et on peut éliminer $\dot{\boldsymbol{u}}$ de l'expression de $G(\theta)$ en remarquant que $\dot{\boldsymbol{u}}$ est cinématiquement admissible et en utilisant **l'équation d'équilibre** :

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\dot{u}_{i,j}\,d\Omega=\int_\Omega f_i\dot{u}_i\,d\Omega+\int_S g_i\dot{u}_i\,d\Gamma+\int_{S_d}\sigma_{ij}n_jU_{i,k}\theta_k\,d\Gamma$$

d'où :

$$\begin{aligned}G(\theta) &= \int_\Omega \dot{\psi}-f_i\dot{u}_i-\dot{f}_iu_i+(\psi-f_iu_i)\theta_{k,k}\,d\Omega-\int_S(g_i\dot{u}_i+\dot{g}_iu_i)\,d\Gamma-\int_S g_iu_i\left(\theta_{k,k}-\frac{\partial\theta}{\partial\eta_k}\eta_k\right)d\Gamma\\
&= \int_\Omega \sigma_{ij}\dot{u}_{i,j}-f_i\dot{u}_i\,d\Omega-\int_S g_i\dot{u}_i\,d\Gamma-\int_\Omega\dot{f}_iu_i\,d\Omega-\int_\Omega\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}\theta_{p,j}+u_{j,p}\theta_{p,i})\,d\Omega\\
&\quad+\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T}+(\psi-f_iu_i)\theta_{k,k}\,d\Omega-\int_S\dot{g}_iu_i+g_iu_i\left(\theta_{k,k}-\frac{\partial\theta}{\partial\eta_k}\eta_k\right)d\Gamma\\
&\quad+\int_\Omega\sigma_{ij}\varepsilon^0_{ij,k}\theta_k-\Lambda^{-1}_{ijpq}\sigma_{pq}\sigma^0_{ij,k}\theta_k\,d\Omega\end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}G(\theta) &= \int_\Omega\sigma_{ij}u_{i,p}\theta_{p,j}-\psi\theta_{k,k}-\frac{\partial\psi}{\partial T}T_{,k}\theta_k\,d\Omega\\
&\quad+\int_\Omega\sigma_{ij}\varepsilon^0_{ij,k}\theta_k-\Lambda^{-1}_{ijpq}\sigma_{pq}\sigma^0_{ij,k}\theta_k\,d\Omega\\
&\quad+\int_\Omega f_iu_i\theta_{k,k}+f_{i,k}\theta_ku_i\,d\Omega\\
&\quad+\int_S g_{i,k}\theta_ku_i+g_iu_i\left(\theta_{k,k}-\frac{\partial\theta}{\partial\eta_k}\eta_k\right)d\Gamma\\
&\quad-\int_{S_d}\sigma_{ij}\eta_jU_{i,k}\theta_k\,d\Gamma\end{aligned}$$

Remarques :

- *En déformations d'Euler-Lagrange le premier intégrande devient $h_{i,p}\sigma_{ij}u_{i,p}\theta_{p,j}$ avec $h_{i,j}=\delta_{i,j}+u_{i,j}$.*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- *En axisymétrie, on a l'analogie formelle $(x,y)\Leftrightarrow(r,z)$ et toutes les composantes des gradients impliquant la composante orthoradiale sont nulles sauf $\varphi_{\theta,\theta}=\frac{\varphi_r}{r}$. De plus l'élément de surface est multiplié par r pour prendre en compte le calcul de l'intégrale pour une unité de radian.*
- *La possibilité de prendre en compte des champs de déplacements imposés n'a pas été développée. Ceux-ci ne sont d'ailleurs pas contraints par la propagation de fissure puisqu'ils apparaissent via la condition d'équilibre.*
- *Dans le terme surfacique on a des dérivations normales à la surface qui n'ont pas de sens pour les éléments de peau utilisés dans Code_Aster. On a donc recours à la géométrie différentielle et aux dérivées contravariantes pour mieux appréhender cette intégrande sur la surface de calcul (cf. [Annexe 2]).*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Discrétisation du taux de restitution d'énergie

2.1 Méthode θ en dimension 2

On rappelle que le taux de restitution d'énergie G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_0} G(s)\theta(s).\boldsymbol{m}(s)ds = G(\theta)\ ,\ \forall \theta \in \Theta$$

où :

- $\boldsymbol{m}$ est la normale unitaire au fond de fissure Γ_0 situé dans le plan tangent à $\partial\Omega$ et rentrant dans Ω ,
- $\Theta = \{\mu \text{ tels que } \mu.\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

En dimension 2, le **fond de fissure Γ_0 se ramène à un point $\boldsymbol{M_0}$**, et on peut choisir un champ θ unitaire au voisinage de ce point, de telle sorte que : $G(\boldsymbol{M_0}) = G(\theta)$

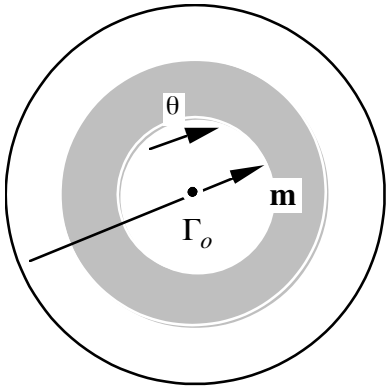


Figure 2.1-a : Fond de fissure en 2D

2.2 Méthode θ en dimension 3

La dépendance de $G(\theta)$ vis-à-vis du champ θ sur le fond de fissure est plus complexe. Le champ scalaire $G(s)$ peut être discrétisé sur une base que nous noterons $(p_j(s))_{1 \leq j \leq N}$.

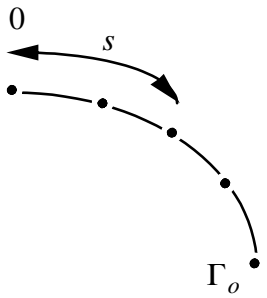


Figure 2.2-a : Discrétisation du fond de fissure en 3D (abscisse curviligne) P

Soit G_j les composantes de $G(s)$ dans cette base :

$$G(s) = \sum_{j=1}^{N} G_j p_j(s)$$

On se donne également une base de fonctions tests pour les champs θ , de longueur P :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\tilde{\Theta}=\{\theta^i\in\Theta, i=1,\dots,P\}$$

$\tilde{\Theta}$ est un sous-ensemble de longueur finie de l'ensemble Θ.

$G(s)$ étant solution de l'équation variationnelle $\int_{\Gamma_0} G(s)\theta(s).\boldsymbol{m}(s)ds=G(\theta), \forall\theta\in\Theta$, les G_j vérifient alors en particulier :

$$\int_{\Gamma_0}\left(\sum_{j=1}^{N} G_j p_j(s)\right)\bar{\theta}^i.m(s)ds=G(\theta^i), \forall i\in[1,P]$$

soit :

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_0} p_j(s)\bar{\theta}^i.m(s)ds\right)G_j=G(\theta^i), \forall i\in[1,P]$$

Les G_j peuvent donc être déterminés en résolvant le système linéaire à P équations et N inconnues :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}G_j &= b_i, i=1,P\\ \text{avec } a_{ij} &= \int_{\Gamma_0} p_j(s)\bar{\theta}^i(s).m(s)ds\\ b_i &= G(\theta^i)\end{aligned}$$

Ce système a une solution si on choisit P champs θ^i indépendants tels que : $P\geqslant N$. Il peut comporter plus d'équations que d'inconnues, auquel cas il est résolu au sens des moindres carrés.

Remarque :

On se donne en réalité une base de fonctions tests pour la trace des champs θ sur le fond de fissure Γ_0, notée $\bar{\theta}:\bar{\theta}(s)=\theta_{|\Gamma_0}(s)$. La donnée de la valeur de $\bar{\theta}^i$ sur le fond de fissure Γ_0 suffit alors pour identifier le champ θ^i sur tout le domaine.

2.3 Choix dans *Aster* de la discrétisation de G en dimension 3

2.3.1 Description des espaces d'approximations

Remarque :

***En dimension 2**, il n'y a pas de problème car en choisissant un champ θ unitaire au voisinage du fond de fissure, on obtient la relation $G=G(\theta)$. Le taux de restitution de l'énergie est indépendant du champ θ.*

En dimension 3, la dépendance de $G(\theta)$ vis-à-vis du champ θ sur le fond de fissure est plus complexe. Dans *Code_Aster*, on peut calculer :

•Le taux de restitution d'énergie local $G(s)$ solution de l'équation variationnelle

$$\int_{\Gamma_0} G(s)\theta(s).\boldsymbol{m}(s)ds=G(\theta), \forall\theta\in\Theta$$

Dans ce cas, l'utilisateur ne donne pas de champ θ, les champs θ^i nécessaires au calcul de $G(s)$ sont calculés automatiquement (cf. commande `CALC_G / OPTION='CALC_G'` [U4.82.03]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans *Code_Aster*, on a choisi **deux familles de bases** de fonctions tests pour $\bar{\theta}$ et de décomposition pour $G(s)$ (cf. [§2.2]) :

- Les **polynômes de LEGENDRE** $\gamma_j(s)$ de degré j $(O \leq j \leq Deg_{max})$.
- Les **fonctions de forme** du nœud k de Γ_0 : $\phi_k(s)$ $(1 \leq k \leq NNO =$ nombre de noeuds de $\Gamma_0)$ (de degré 1 pour les éléments linéaires et de degré 2 pour les éléments quadratiques).

Rappelons que les polynômes de LEGENDRE constituent une famille orthogonale non normée. Ils sont obtenus par la relation de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1}(t)-(2n+1)tP_n(t)+nP_{n-1}(t)=0$$

En particulier :

$$P_0(t)=1$$
$$P_1(t)=t$$
$$P_2(t)=\frac{(3t^2-1)}{2}$$
$$P_3(t)=\frac{(5t^3-3t)}{2}$$

Dans *Code_Aster*, on les norme sous la forme :

$$\gamma_j(s)=\sqrt{\frac{2j+1}{l}}P_j\left(\frac{2s}{l}-1\right)$$

où :

- s est l'abscisse curviligne de Γ_0,
- l la longueur du fond de fissure Γ_0.

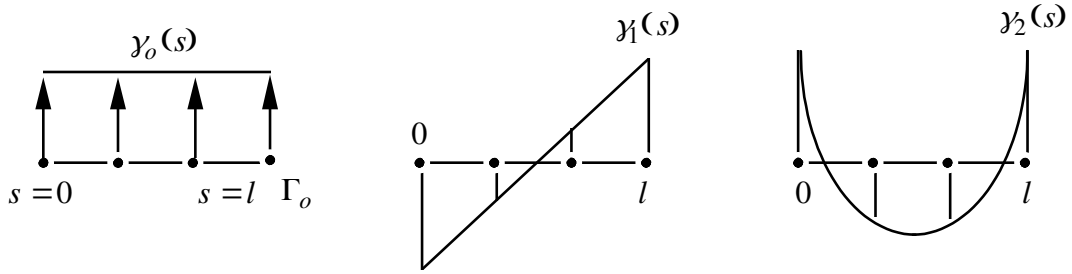


Figure 2.3-b : Polynômes de Legendre

Dans *Code_Aster*, on se limite à $Deg_{max}=7$ comme degré maximal.

Les fonctions de formes $\varphi_k(s)$ sont associées à la discrétisation de Γ_0.

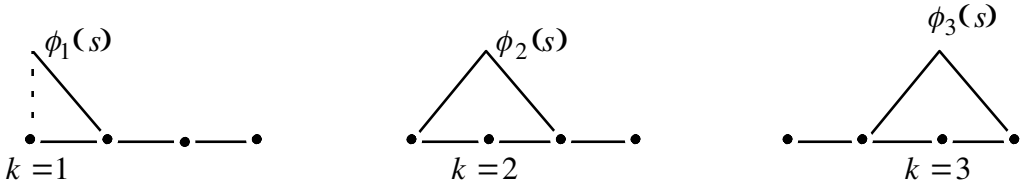


Figure 2.3-c : Fonctions de forme du fond de fissure (élements linéaires)

Rappelons qu'on est amené à discrétiser $G(s)$ le long du fond de fissure :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$G(s)=\sum_{j=1}^{N} G_j\, p_j(s)$$

et à se donner une base de fonctions tests $\left(\bar{\theta}^i(s)\right)_{1\le i\le N}$ pour la trace du champ θ sur le fond de fissure Γ_0.

Il existe donc plusieurs choix possibles de discrétisations, résumés dans le tableau ci-dessous :

	Polynômes de LEGENDRE	**Fonctions de forme**
$G(s)$	$G(s)=\sum_{j=0}^{NDEG} G_j \gamma_j(s)$	$\sum_{j=1}^{NNO} G_j \varphi_j(s)$
$\bar{\theta}(s)$	$\left(\gamma_i(s)\right)_{1\le i\le NDEG}$	$\left(\varphi_i(s)\right)_{1\le i\le NNO}$

Tableau 2.3-1 : Choix de la discrétisation

NNO : nombre de nœuds du fond de fissure Γ_0
$NDEG$: degré maximal des polynômes de LEGENDRE choisi par l'utilisateur $NDEG \leqslant Deg_{max}=7$

Dans la commande CALC_G (cf. [U4.82.03]) les mots-clés LISSAGE_THETA et LISSAGE_G permettent de choisir la discrétisation de $\bar{\theta}$ et de $G(s)$.

Les options disponibles dans *Aster* sont résumées dans le tableau suivant :

		$\bar{\theta}(s)$	
		Polynômes de LEGENDRE	**Fonctions de forme**
$G(s)$	**Polynômes de LEGENDRE**	LISSAGE_THETA = 'LEGENDRE' LISSAGE_G = 'LEGENDRE' (1er cas)	LISSAGE_THETA = 'LAGRANGE' LISSAGE_G = 'LEGENDRE' (2nd cas)
	Fonctions de forme	Non disponible	LISSAGE_THETA = 'LAGRANGE' LISSAGE_G = 'LAGRANGE' 'LAGRANGE_NO_NO' (3ème cas)

Tableau 2.3-2 : Options de discrétisation de *Code_Aster*

2.3.2 Premier cas (LEGENDRE-LEGENDRE)

$G(s)$ est décomposé suivant les polynômes de Legendre :

$$G(s)=\sum_{j=0}^{NDEG} G_j \gamma_j(s)$$

La base des fonctions tests pour $\theta(s)$ est définie à partir des polynômes de Legendre : $\theta(s)$

$$\tilde{\Theta}=\{\theta^i\in\Theta : \bar{\theta}^i(s).\boldsymbol{m}(s)=\varphi_i(s), i=1,\dots,NDEG\}$$

Les $NDEG$ composantes G_j sont déterminées en résolvant le système linéaire à $NDEG$ équations :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{NDEG} a_{ij} G_j = b_i \,, i=1, NDEG \\ \text{avec} \begin{cases} a_{ij} = \int_{\Gamma_0} \gamma_i(s)\gamma_j(s)\,ds \\ b_i = G(\theta^i) \end{cases} \end{cases}$$

Les polynômes de Legendre formant une base orthonormée sur Γ_0, on a $a_{ij}=\delta_{ij}$ et le système linéaire se résume donc à :

$G_j = G(\theta^j)$ et donc $G(s) = \sum_{j=0}^{NDEG} G(\theta^j)\gamma_j(s)$.

2.3.3 Second cas (LEGENDRE-LAGRANGE)

$G(s)$ est décomposé suivant les polynômes de Legendre :

$$G(s) = \sum_{j=0}^{NDEG} G_j \gamma_j(s)$$

La base des fonctions tests pour $\theta(s)$ est définie à partir des fonctions de forme des NNO nœuds du fond de fissure :

$$\tilde{\Theta} = \{\theta^i \in \Theta : \bar{\theta}^i(s).\boldsymbol{m}(s) = \varphi_i(s), i=1,\ldots,NNO\}$$

où $\varphi_i(s)$ est la fonction de forme du nœud i du fond de fissure.

On a alors NNO équations à $NDEG$ inconnues :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{NNO} a_{ij} G_j = b_i \,, i=1\,, NNO \\ \text{avec} \begin{cases} a_{ij} = \int_{\Gamma_0} \gamma_j(s)\phi_i(s)\,ds \\ b_i = G(\theta^i) \end{cases} \end{cases}$$

Dans ce cas, on doit avoir $NDEG \leq NNO$, soit $NDEG < min(7, NNO)$ où NNO est le nombre de nœuds du fond de fissure.

2.3.4 Troisième cas (LAGRANGE-LAGRANGE)

$G(s)$ est défini par les fonctions de forme des NNO nœuds du fond de fissure :

$$G(s) = \sum_{j=0}^{NNO} G_j \varphi_j(s)$$

La base des fonctions tests pour $\theta(s)$ est définie à partir des fonctions de forme des NNO nœuds du fond de fissure :

$$\tilde{\Theta} = \{\theta^i \in \Theta : \bar{\theta}^i(s).\boldsymbol{m}(s) = \varphi_i(s), i=1,\ldots,NNO\}$$

où $\varphi_i(s)$ est la fonction de forme du nœud i du fond de fissure.

Le système à résoudre est le suivant :

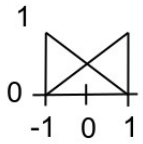
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{NNO} a_{ij} G_j = G(\theta^i) \quad (i=1,\dots,NNO) \\ \text{avec } a_{ij} = \int_{\Gamma_0} \phi_i(s)\phi_j(s)\,ds \end{cases}$$

Éléments linéaires :

Si on a des éléments linéaires :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(1-x)$$
$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(1+x)$$



Elément de référence

$$a_{i(i-j)} = a_{i,(i+j)} = 0, \text{ si } j \geq 2$$

$$a_{i(i-1)} = \int_{\Gamma_0} \varphi_i(s)\varphi_{i-1}(s)\,ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i(s)\varphi_{i-1}(s)\,ds$$

$$= \frac{s_i - s_{i-1}}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)\,dx = \frac{s_i - s_{i-1}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{6}(s_i - s_{i-1})$$

$$a_{ii} = \frac{s_i - s_{i-1}}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_2^2(x)\,dx + \frac{s_{i+1} - s_i}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_1^2(x)\,dx$$

$$= \frac{s_i - s_{i-1}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}(1+x)^2\,dx + \frac{s_{i+1} - s_i}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}(1-x)^2\,dx = \frac{1}{3}\left[(s_{i+1} - s_i) + (s_i - s_{i-1})\right]$$

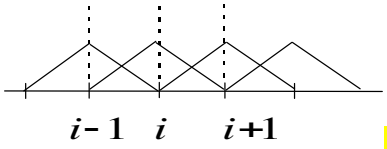


Figure 2.3-d : Fonctions de forme linéaires

Dans le cas d'un fond ouvert, la matrice A_{ij} s'écrit donc :

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(s_2-s_1) & (s_2-s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (s_2-s_1) & 2(s_3-s_1) & (s_3-s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (s_3-s_2) & 2(s_4-s_2) & (s_4-s_3) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s_4-s_3) & 2(s_5-s_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(s_n-s_{n-2}) & (s_n-s_{n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (s_n-s_{n-1}) & 2(s_n-s_{n-1}) \end{pmatrix}$$

En revanche dans le cas d'un fond fermé, la condition sur le second membre $b_1 = b_{NNO}$ implique que $G_1 = G_{NNO}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour obtenir que $G_1 = G_{NNO}$, il faut rajouter des termes à la matrice du système linéaire A_{ij} sur la première et la dernière ligne.

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(s_2-s_1)+2(s_n-s_{n-1}) & (s_2-s_1) & 0 & 0 & \dots & (s_n-s_{n-1}) & 0 \\ (s_2-s_1) & 2(s_3-s_1) & (s_3-s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (s_3-s_2) & 2(s_4-s_2) & (s_4-s_3) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s_4-s_3) & 2(s_5-s_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(s_n-s_{n-2}) & (s_n-s_{n-1}) \\ 0 & (s_2-s_1) & 0 & 0 & \dots & (s_n-s_{n-1}) & 2(s_2-s_1)+2(s_n-s_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Éléments quadratiques :

Si on a des éléments quadratiques :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$$
$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$$
$$\varphi_3(x) = (1-x)(1+x)$$

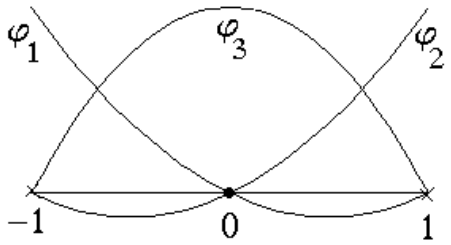


Figure 2.3-e : Fonctions de forme quadratiques (Élément de référence)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il faut distinguer nœud sommet et nœud milieu.

• i = nœud sommet :

$$a_{i(i-j)} = a_{i,(i+j)} = 0 \text{, si } j \geq 3$$

$$a_{i(i-2)} = \int_{\Gamma_0} \varphi_i(s)\varphi_{i-2}(s)\,ds = \int_{s_{i-2}}^{s_i} \varphi_i(s)\varphi_{i-2}(s)\,ds$$

$$= \frac{(s_i - s_{i-2})}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = \frac{(s_i - s_{i-2})}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}x^2(x^2-1)\,dx$$

$$= -\frac{(s_i - s_{i-2})}{30}$$

$$a_{i(i-1)} = \int_{\Gamma_0} \varphi_i(s)\varphi_{i-1}(s)\,ds = \int_{s_{i-2}}^{s_i} \varphi_i(s)\varphi_{i-1}(s)\,ds = \frac{(s_i - s_{i-2})}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_2(x)\varphi_3(x)\,dx$$

$$= \frac{(s_i - s_{i-2})}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}x(x+1)^2(1-x)\,dx = \frac{(s_i - s_{i-2})}{15}$$

$$a_{ii} = \frac{s_i - s_{i-2}}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_2^2(x)\,dx + \frac{s_{i+2} - s_i}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_1^2(x)\,dx = \frac{2}{15}(s_{i+2} - s_{i-2})$$

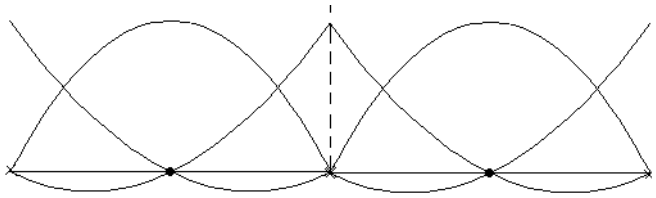


Figure 2.3-f : Nœud sommet

• i = nœud milieu :

$$a_{i(i-j)} = a_{i,(i+j)} = 0 \text{, si } j \geq 2$$

$$a_{i(i-1)} = \int_{-1}^{+1} \frac{(s_{i+1} - s_{i-1})}{2}\varphi_3(x)\varphi_1(x)\,dx = \frac{(s_{i+1} - s_{i-1})}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}x(x-1)(1-x)(1+x)\,dx$$

$$= \frac{(s_{i+1} - s_{i-1})}{15}$$

$$a_{ii} = \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \varphi_i^2(s)\,ds = \frac{(s_{i+1} - s_i)}{2}\int_{-1}^{+1} (1-x)^2(1+x)^2\,dx = \frac{8}{15}(s_{i+1} - s_{i-1})$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

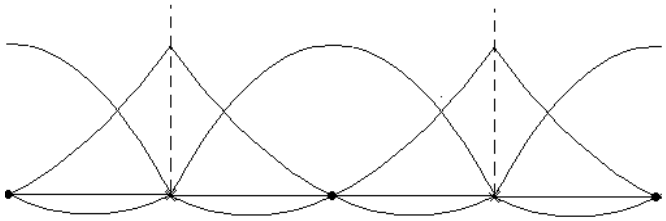


Figure 2.3-g : Noeud milieu

La matrice A_{ij} s'écrit :

$$\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 4(s_3-s_1) & 2(s_3-s_1) & -(s_3-s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2(s_3-s_1) & 16(s_3-s_1) & 2(s_3-s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -(s_3-s_1) & 2(s_3-s_1) & 4(s_5-s_1) & 2(s_5-s_3) & -(s_5-s_3) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2(s_5-s_3) & 16(s_5-s_3) & 2(s_5-s_3) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -(s_5-s_3) & 2(s_5-s_3) & 4(s_7-s_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(s_n-s_{n-2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(s_n-s_{n-2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4(s_n-s_{n-2}) \end{pmatrix}$$

Cas particulier : $s_{i+2}-s_i=cste=l=$longueur d'un élément

$$\frac{l}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & \dots \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \end{pmatrix}$$

← noeud sommet de bord
← noeud milieu
← noeud sommet

Dans le cas d'un fond fermé, on rajoute des termes à la matrice du système linéaire pour respecter la condition $G_1=G_{NNO}$. La matrice A_{ij} s'écrit :

$$\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 4(s_3-s_1)+4(s_n-s_{n-2}) & 2(s_3-s_1) & -(s_3-s_1) & 0 & \dots & -(s_n-s_{n-1}) & 2(s_n-s_{n-2}) & 0 \\ 2(s_3-s_1) & 16(s_3-s_1) & 2(s_3-s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(s_3-s_1) & 2(s_3-s_1) & 4(s_5-s_1) & 2(s_5-s_3) & -(s_5-s_3) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2(s_5-s_3) & 16(s_5-s_3) & 2(s_5-s_3) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -(s_5-s_3) & 2(s_5-s_3) & 4(s_7-s_3) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(s_n-s_{n-2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(s_n-s_{n-2}) \\ 0 & 2(s_3-s_1) & -(s_3-s_1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 4(s_3-s_1)+4(s_n-s_{n-2}) \end{pmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3.5 Troisième cas (LAGRANGE_NO_NO-LAGRANGE)

Cette méthode est issue de la méthode Lagrange-Lagrange mais elle est simplifiée : on remplace la résolution du système linéaire en multipliant les valeurs $G(\theta^i)$ par un coefficient de pondération.

$$G_i = \alpha_i G(\theta^i)$$

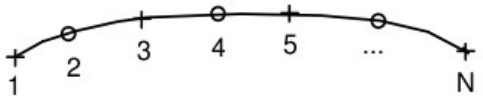
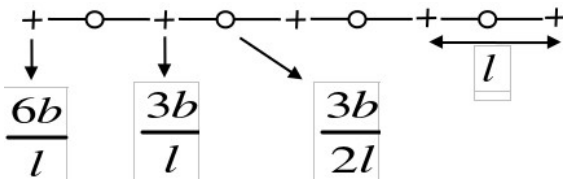


Figure 2.3-h : Méthode « nœud par nœud »

De plus si $G(\theta^i) = cste = b, \forall i$ et que l'on considère un G constant par élément (cette méthode n'a pas de signification vectorielle), on a :

•nœud sommet de bord : $\frac{l}{30}(4+2-1)G = b$ soit $G = \frac{6}{l}b$

•nœud sommet : $\frac{l}{30}(-1+2+2+8-1)G = b$ soit $G = \frac{3}{l}b$



•nœud milieu : $\frac{l}{30}(2+16+2)G = b$ soit $G = \frac{3}{2l}b$

Ce qui donne dans le cas où les éléments n'ont pas de longueurs constantes :

•nœud sommet de bord : $\alpha_1 = \frac{6}{(s_3 - s_1)}$ ou $\alpha_N = \frac{6}{(s_N - s_{N-2})}$

•nœud sommet : par exemple $\alpha_3 = \frac{6}{(s_3 - s_1)+(s_5 - s_3)} = \frac{6}{(s_5 - s_1)}$

soit : $\alpha_i = \frac{6}{(s_{i+2} - s_{i-2})}$

ou encore : $\alpha_i^{'} = \frac{3}{(s_{i+1} - s_i)} \approx \alpha_i$

•nœud milieu : $\alpha_i = \frac{3}{2(s_{i+1} - s_i)}$

Pour activer cette méthode il faut préciser dans CALC_G :show

```
LISSAGE_G = 'LAGRANGE_NO_NO'
LISSAGE_THETA = 'LAGRANGE'
```

2.3.6 Correction des valeurs aux extrémités du fond de fissure

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Lorsque le fond de fissure débouche, un traitement supplémentaire particulier est réalisé.
Il a été observé pour les lissages de type Lagrange (et ses variantes) que les valeurs numériques des $G(\theta^i)$ pour $i=1$ et $i=n$ sont particulières « fausses ». Cela est probablement dû à l'ordre de la singularité qui n'est plus en -1/2 à proximité des surfaces libres. En effet, l'ordre de la singularité aux bords dépend de ν (et de l'angle entre le fond de fissure et surface libre et de l'angle entre la normale à la surface de la fissure et la normale à la surface libre). Même pour une fissure dans un plan orthogonal à la surface libre et débouchant de manière orthogonal, la singularité n'est pas -1/2 si $\nu \neq 0$.
Afin d'améliorer les résultats aux points du bord, on procède à une modification des $G(\theta^i)$ pour $i=1$ et $i=n$ pour le lissage de LAGRANGE-LAGRANGE et à une modification directement des $G(s_i)$ pour $i=1$ et $i=n$ pour le LAGRANGE_NO_NO-LAGRANGE, uniquement pour l'option CALC_K_G. On modifie également les $K_j(\theta^i)$, $j=I, II, III$. Ce traitement est fait même si des conditions de symétrie sont appliqués sur les bords du fond (alors que dans ce cas, l'ordre de la singularité est bien en -1/2 et aucun traitement ne serait nécessaire).

Lissage LAGRANGE-LAGRANGE et maillages linéaires

On fait l'hypothèse que $G(s_1)=G(s_2)=G(s_3)=G_a$ et que $G(s_n)=G(s_{n-1})=G(s_{n-2})=G_b$. Alors en multipliant la matrice A par le vecteur $G(s)$ on obtient :

$$G(\theta^1)=\frac{1}{2}(s_2-s_1)G_a$$

$$G(\theta^2)=\frac{1}{2}(s_3-s_1)G_a$$

…

$$G(\theta^{n-1})=\frac{1}{2}(s_n-s_{n-2})G_b$$

$$G(\theta^n)=\frac{1}{2}(s_n-s_{n-1})G_b$$

Soit $G(\theta^1)=G(\theta^2)\frac{(s_2-s_1)}{(s_3-s_1)}$ et $G(\theta^n)=G(\theta^{n-1})\frac{(s_n-s_{n-1})}{(s_n-s_{n-2})}$

Lissage LAGRANGE-LAGRANGE et maillages quadratiques

On fait l'hypothèse que $G(s_1)=G(s_2)=G(s_3)=G_a$ et que $G(s_n)=G(s_{n-1})=G(s_{n-2})=G_b$. Alors en multipliant la matrice A par le vecteur $G(s)$ on obtient :

$$G(\theta^1)=\frac{1}{6}(s_3-s_1)G_a$$

$$G(\theta^2)=\frac{4}{6}(s_3-s_1)G_a$$

…

$$G(\theta^{n-1})=\frac{4}{6}(s_n-s_{n-2})G_b$$

$$G(\theta^n)=\frac{4}{6}(s_n-s_{n-2})G_b$$

Soit $G(\theta^1)=\frac{1}{4}G(\theta^2)$ et $G(\theta^n)=\frac{1}{4}G(\theta^{n-1})$

Lissage LAGRANGE_NO_NO-LAGRANGE

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On fait une extrapolation linéaire entre les 2ème et 3ème points du fond (resp. entre les 2 avant-derniers points du fond). Soit :

$$G(s_1)=G(s_2)+\frac{(s_1-s_2)}{(s_3-s_2)}\left(G(s_3)-G(s_2)\right) \text{ et } G(s_n)=G(s_{n-1})\frac{(s_n-s_{n-1})}{(s_{n-2}-s_{n-1})}\left(G(s_{n-2})-G(s_{n-1})\right)$$

2.4 Implantation de G en thermo-élasticité linéaire dans *Aster*

2.4.1 Types d'éléments et de chargements

Dans *Code_Aster*, il est possible de calculer en **thermo-élasticité linéaire** le taux de restitution d'énergie en 2D $(G(\theta))$ et en 3D (valeur locale $G(s)$) à l'aide de la commande CALC_G [U4.82.03].

Le champ de propagation virtuel de la fissure θ est calculé automatiquement dans la commande CALC_G à partir des informations fournies par l'utilisateur.

Ces calculs sont valables pour les **modélisations suivantes** :

- D_PLAN (fissure maillée ou non maillée)
- C_PLAN (fissure maillée ou non maillée)
- AXIS (fissure maillée ou non maillée)
- 3D (fissure maillée ou non maillée)

et pour les **chargements** thermo-mécaniques suivants :

- $\boldsymbol{f}$, champ de forces volumiques appliquées sur Ω (charges mécaniques du type PESANTEUR, ROTATION, FORCE_INTERNE),
- $\boldsymbol{g}$, champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\delta\Omega$ (y compris sur les lèvres de la fissure : PRES_REP, FORCE_FACE),
- T, champ de température (transmis via le champ matériau : AFFE_MATERIAU / AFFE_VARC),
- ε^0, champ de pré-défomation (PRE_EPSI).

Ces **chargements** peuvent dépendre du temps et de l'espace. On ne tient pas compte du terme dû aux déplacements imposés sur S_d, il ne faut donc pas imposer de conditions de Dirichlet sur les lèvres de la fissure.

Les **caractéristiques du matériau** (E,ν,α) peuvent dépendre de la température T et de l'espace tout en restant constantes par éléments.
En outre, un champ de **contrainte initiale** σ^0 peut être pris en compte.

2.4.2 Environnement nécessaire

Fissure maillée :

Pour le calcul du taux de restitution (option CALC_G), il faut caractériser préalablement la fissure via le concept de type fond_fiss (en 3D : liste ordonnée des nœuds du fond, mailles de la lèvre supérieure et la lèvre inférieure ; en 2D : nœud de fond de fissure et normale à la fissure), avec la commande DEFI_FOND_FISS [U4.82.01].

Lorsque que la fissure est disposée le long d'un axe de symétrie, on peut se contenter de ne représenter que la moitié du modèle, et préciser la symétrie du chargement par le mot-clé SYME dans DEFI_FOND_FISS. Par défaut, on suppose qu'il n'y a pas de symétrie. Si le modèle présente une symétrie, CALC_G la détecte automatiquement via le concept fond_fiss.

Fissure non maillée (méthode X-FEM) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En 2D comme en 3D, la fissure doit être définie, pour le calcul mécanique et pour le post-traitement, à l'aide de la commande DEFI_FISS_XFEM. Le mot-clé FISSURE doit être renseigné dans CALC_G.

Si la fissure n'est pas maillée, il n'est pas possible de prendre en compte les éventuelles symétries du modèle par rapport aux lèvres de la fissure.

Le calcul de G se fait en post-traitement, uniquement à partir du champ de déplacement solution du calcul sur le modèle considéré. En particulier, la densité d'énergie libre et les contraintes sont calculées à partir du champ de déplacement et des caractéristiques du matériau.

2.4.3 Calculs des différents termes du taux de restitution d'énergie

L'expression complète de $G(\theta)$ est donnée au [§1.3]. Nous allons détailler chaque terme. Le champ θ est nul en dehors d'un disque de rayon $R_{\text{sup}}(s)$ défini dans le chapitre 3 [Figure 3.3-a]. Remarquons que comme tous les termes font intervenir θ ou son gradient, les termes élémentaires sont nuls en dehors de ce disque de rayon $R_{\text{sup}}(s)$. Dans la commande CALC_G, il n'est ainsi pas nécessaire de préciser les chargements qui ne s'appliquent pas dans cette zone.

2.4.3.1 Terme classique élémentaire

$$TCLA=\sigma_{ij}u_{i,p}\theta_{p,j}-\psi(\varepsilon(u),T)\theta_{k,k}$$

La densité d'énergie élastique $\Psi(\varepsilon(u),T)$ s'écrit en thermo-élasticité linéaire :

•en 3D et en AXIS :

$$\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}),T)=\frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{ii})^2+\mu\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}-\psi_{th}$$

•en déformations planes :

$$\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}),T)=\frac{(1-\nu)E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2)+\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy}^2-\psi_{th}$$

•en contraintes planes :

$$\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}),T)=\frac{E}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2)+\frac{\nu E}{(1-\nu^2)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy}^2-\psi_{th}$$

avec $\Psi_{th}=3K\alpha(T-T_{réf})\varepsilon_{ii}-\frac{9}{2}K\alpha^2(T-T_{réf})^2$

où :

$$3K=\frac{E}{1-2\nu}\quad;\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\quad;2\mu=\frac{E}{1+\nu}$$

E : module d'YOUNG
ν : coefficient de POISSON
λ,μ : coefficients de LAME
α : dilatation thermique

La densité d'énergie élastique $\psi(\varepsilon(u),T)$ peut s'écrire de façon générale sous la forme :

$$\Psi(\varepsilon(u),T)=\frac{1}{2}K(\varepsilon_{kk}-3\alpha(T-T_{réf}))^2+\frac{2\mu}{3}\varepsilon_{eq}^2$$

avec $\varepsilon_{eq}^2=\frac{3}{2}\varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D$ et $\varepsilon_{ij}^D=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

soit $\varepsilon_{eq}^2 = \frac{1}{2}(3\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}^2)$

et $\Psi(\varepsilon(u),T) = \frac{1}{2}K\,\varepsilon_{kk}^2 - 3K\,\alpha(T-T_{réf})\,\varepsilon_{kk} + \frac{9}{2}K\,\alpha^2(T-T_{réf})^2 + \mu\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij} - \frac{\mu}{3}\varepsilon_{kk}^2$

$= \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{kk}^2 + \mu\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij} - 3K\,\alpha(T-T_{réf})\,\varepsilon_{kk} + \frac{9}{2}K\,\alpha^2(T-T_{réf})^2$

2.4.3.2 Terme force volumique

$$TFOR = f_i u_i \theta_{k,k} + f_{i,k}\theta_k u_i$$

2.4.3.3 Terme force surfacique

$$TSUR = g_{i,k}\theta_k u_i + g_i u_i\left(\theta_{k,k} - \frac{\partial\theta}{\partial n_k} n_k\right)$$

Remarque :

Dans ce terme surfacique on a des dérivations normales à la surface qui n'ont pas de sens pour les éléments de peau utilisés dans Code_Aster. On a donc recours à la géométrie différentielle et aux dérivées contravariantes pour mieux appréhender cet intégrande sur la surface de calcul (cf. [Annexe 2]).

2.4.3.4 Terme thermique

$$THER = -\frac{\partial\Psi}{\partial T} T_{,k}\theta_k$$

avec :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial T}(\varepsilon(u),T) = \left[\frac{1}{2}\frac{dK(T)}{dT}(\varepsilon_{kk} - 3\alpha(T-T_{réf})) - 3K\left(\alpha + \frac{d\alpha(T)}{dT}(T-T_{réf})\right)\right](\varepsilon_{kk} - 3\alpha(T-T_{réf}))$$

2.4.3.5 Terme de pré-déformations et contraintes initiales

$$TINI = \left[\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij,k}^0 - \Lambda_{ijpq}^{-1}\sigma_{pq}\sigma_{ij,k}^0\right]\theta_k$$

On peut remarquer que si $\sigma = 0$ alors $TINI = 0$

Remarque 1 :

Comme le reste de cette documentation, la présence de contraintes initiales n'est valide que dans le cas de l'élasticité, et ici même isotrope linéaire. Pour être activée, il faut donc être dans une relation de comportement incrémentale (COMPORTEMENT) avec une relation ELAS. Il n'est pas possible de fournir un champ de contraintes initiales dans un quelconque autre cas.

Remarque 2 :

Compte tenu de la difficulté de validation, il n'est pour l'instant pas possible de cumuler pré-déformations (chargement sous le mot clé PRE-EPSI) et contraintes initiales (mot clé SIGM_INIT de CALC_G). Les calculs de G en présence d'un état initial peuvent être effectués avec une fissure maillée ou bien une fissure non-maillée.

Remarque 3 :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

*Dans tous les cas, ce champ de contraintes initiales doit être **AUTO-EQUILIBRE** , en absence de fissure, avec les seules conditions limites. L'utilisateur pourra (devrait...) vérifier que son champ de contraintes initiales est licite en l'appliquant dans le mot clé* `ETAT_INIT` *de l'opérateur* `STAT_NON_LINE` *, avec un comportement élastique incrémental (* `COMPORTEMENT, RELATION = 'ELAS'` *), avec les seules conditions limites ; le résultat mécanique doit être le même champ de contrainte sans déformations supplémentaires.*

Remarque 4 :

Le champ de contraintes initiales devra avoir été utilisé préalablement dans le calcul thermo-mécanique. La démarche de calcul du taux de restitution d'énergie en présence de contraintes initiales est présentée Figure 2.1 . On se réfèrera également au cas test dédié.

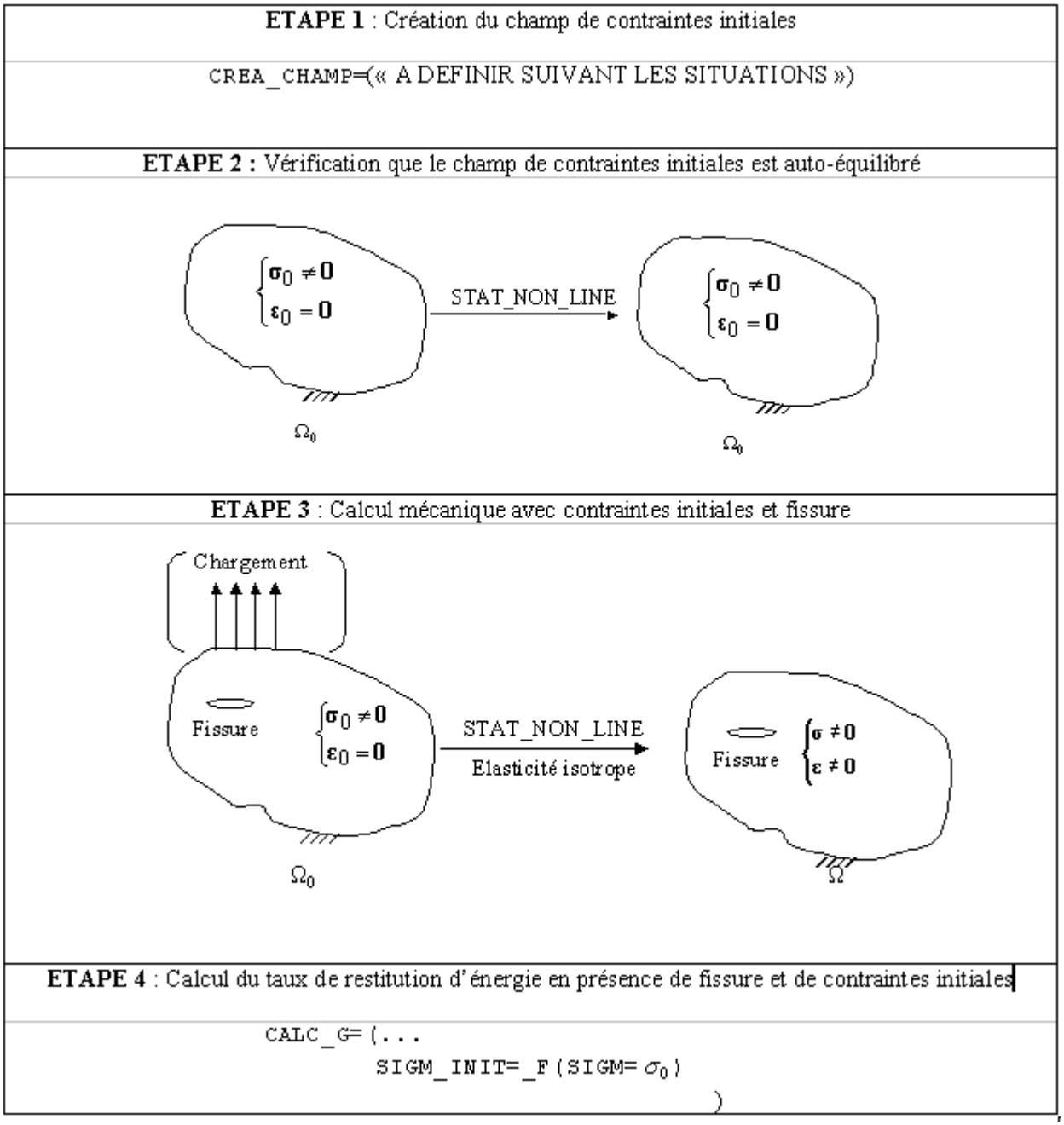


Figure 2.1 : Démarche de calcul en présence de contraintes initiales.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.4.4 Normalisation du taux de restitution d'énergie dans *Aster*

2.4.4.1 Axisymétrie

$G(\theta)$ tel qu'il est implanté ici, calcule la restitution de l'énergie dans la cinématique définie par θ. Il peut être nécessaire de le **normaliser** (**à la main ! ce n'est pas fait automatiquement dans le code**) pour pouvoir comparer à une valeur intrinsèque au matériau, notamment en axisymétrique. Considérons le cas d'une fissure inclinée, dont le fond de fissure est à une distance R de l'axe de symétrie :

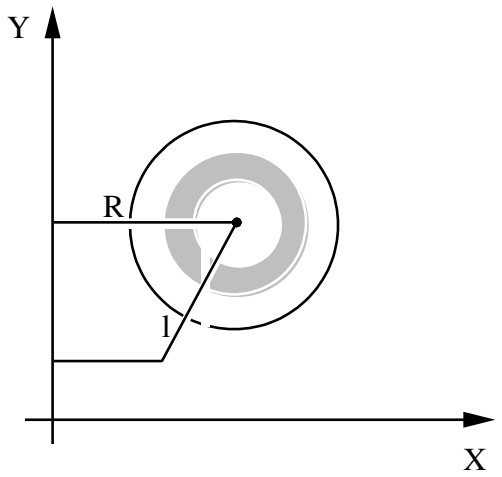


Figure 2.4.4.1-a : Fond de fissure en axisymétrie

Dans *Aster*, l'axe OY est l'axe de symétrie en modélisation 'AXIS' et le taux de restitution de l'énergie calculé est :

$$G(\theta)=-\frac{dW}{dl}$$

où W est l'énergie potentielle par unité de radian.

Or la valeur intrinsèque du taux de restitution d'énergie est :

$$G=-\frac{dW_{totale}}{dA}$$

où :

- W_{totale} est l'énergie potentielle totale,
- dA est la variation de surface de la fissure.

avec : $W_{totale}=2\pi W$
$dA=2\pi R\,dl$

d'où : $\frac{dW_{totale}}{dA}=2\pi\frac{dW}{dl}\frac{dl}{dA}=\frac{1}{R}\frac{dW}{dl}$

et donc $G=\frac{1}{R}G(\theta)$ en axisymétrie.

2.4.4.2 Autres cas

En dimension 2 (C_PLAN et D_PLAN), le fond de fissure est réduit à un point et la valeur de $G(\theta)$ est indépendante du choix du champ θ (avec $\theta\in\Theta$ et θ unitaire au voisinage du fond de fissure).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$G = G(\theta) \quad , \quad \forall \theta \in \Theta$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Introduction du champ θ dans *Aster*

3.1 Conditions à remplir

Le champ θ est un champ de vecteurs, défini sur le solide fissuré, qui représente la transformation du domaine lors d'une propagation de fissure au sens du [§1]. La transformation ne doit modifier que la position du fond de fissure et pas le bord du domaine $\delta\Omega$, c'est-à-dire : $\theta.\boldsymbol{n}=0$ sur (n normale à $\delta\Omega$). De plus, le **champ θ doit être régulier** sur Ω [bib4].

En raison de la singularité du champ de déplacement, il est intéressant du point de vue numérique d'utiliser des champs θ constants dans un voisinage de Γ_0, annulant ainsi dans ce voisinage les termes singuliers $\psi\theta_{k,k}-\sigma_{ij}u_{i,p}\theta_{p,k}$ dans $G(\theta)$.

3.2 Choix du champ θ en dimension 3

3.2.1 Méthode de construction

On doit construire un champ θ vérifiant :

$$\begin{cases}\theta_n=\theta.\boldsymbol{n}=0 & \text{sur le bord du domaine } \delta\Omega\ (\boldsymbol{n} \text{ est la normale à } \delta\Omega)\\ \bar{\theta}=\bar{\theta_0} & \text{donné sur le fond de fissure } \Gamma_0\end{cases}$$

où $\bar{\theta}$ représente la trace de θ sur Γ_0.
On se donne deux surfaces torique T et S (cylindres déformés) entourant le fond de fissure Γ_0. Pour vérifier la première condition ci-dessus, il faut en particulier veiller à ce que la couronne S soit strictement incluse dans Ω.

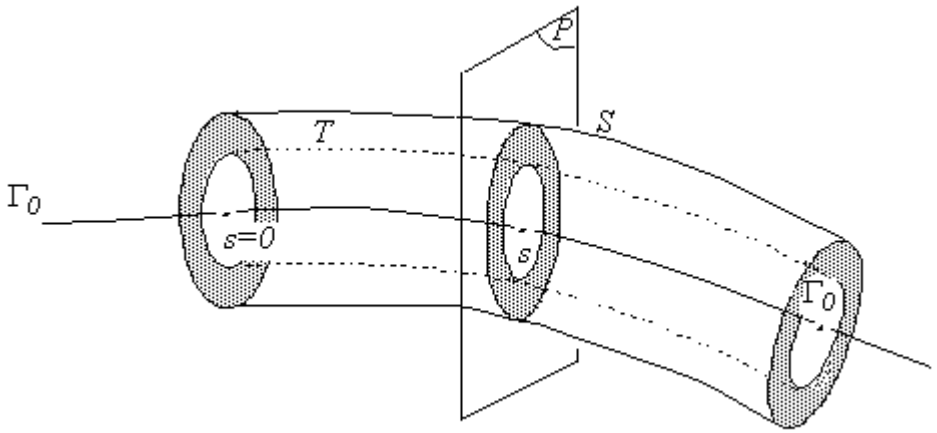


Figure 3.2.1-a : Construction du champ θ en 3D (vue d'ensemble)

On note $R_{inf}(s)$ le rayon variable de T et $R_{sup}(s)$ celui de S.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

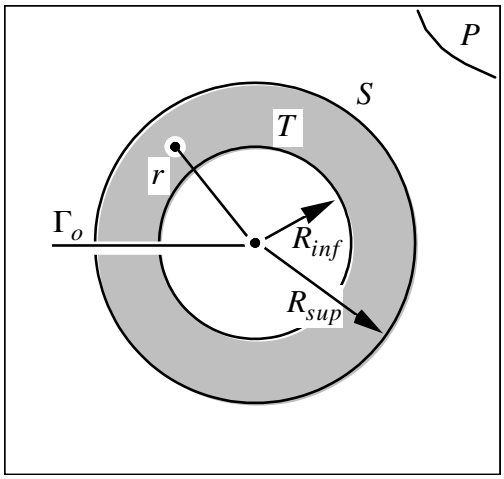


Figure 3.2.1-b : Construction du champ θ en 3D (plan de coupe)

En tout point de Γ_0, repéré par son abscisse curviligne s, on peut définir un plan normal P dans lequel le champ θ est introduit de la façon suivante :

- $\theta_n(r(s))=\bar{\theta}_0(s)$ pour $0\leq r(s)\leq R_{inf}(s)$
- $\theta_n(r(s))=0$ pour $r(s)\geq R_{sup}(s)$
- θ_n varie linéairement par rapport au rayon $r(s)$ dans la couronne $S(R_{sup}(s))\setminus T(R_{inf}(s))$
- θ_n est continu dans $S(R_{sup}(s))$.

Cette manière d'introduire θ est géométrique. Elle revient à se donner deux rayons $R_{inf}(s)$ et $R_{sup}(s)$, et à effectuer des calculs de distance d'un point courant au fond de fissure pour déterminer la valeur de θ en ce point.

3.2.2 Algorithmes de calcul

Le module $|\theta|$ du champ θ étant donné sur tout le fond de fissure Γ_0 (par l'utilisateur ou par la méthode θ, voir [§2.3]), le problème est de déterminer le champ θ (norme et direction) en tout point du domaine Ω.

On note $|\theta|_i$, $R_{inf\,i}$ et $R_{sup\,i}$ respectivement Γ_0 le module du champ θ, les rayons R_{inf} et R_{sup} pour le i-ème nœud du fond de fissure.
La procédure de calcul du champ θ en tout point de Ω est la suivante :

- **Calcul du champ θ en chaque point de Γ_0 :** le module $|\theta|_i$ étant donné, le problème est de déterminer la direction de θ. θ doit être localement dans le plan tangent aux lèvres de la fissure et normal à l'arête à laquelle il appartient. θ étant calculé aux nœuds, dans le cas général (fond de fissure non plan) la direction de θ sera moyennée sur les 2 arêtes de Γ_0 ayant le nœud en commun.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

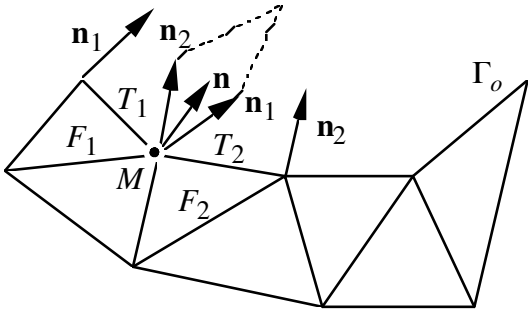


Figure 3.2.2-a : Construction du champ θ en 3D (normales)

Soient F_1 et F_2 deux faces appartenant aux lèvres de la fissure et comprenant les arêtes successives T_1 et T_2 de Γ_0. On calcule d'abord la normale $\boldsymbol{n_1}$ à l'arête T_1 dans le plan de la face F_1 puis la normale $\boldsymbol{n_2}$ à l'arête T_2 dans le plan de la face F_2.

$\boldsymbol{n_1}$ et $\boldsymbol{n_2}$ étant des normales unitaires, on en déduit $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{n_1}+\boldsymbol{n_2}}{2}$ puis $\theta(M)=|\theta(M)|\boldsymbol{n}$ pour $M\in\Gamma_0$.

On considère que les faces F_i sont droites :

- Dans le cas où F_i est un triangle, le plan de la face F_i est défini.
- Dans le cas où F_i est un quadrangle, on découpe F_i en 2 triangles F_{i1} et F_{i2}. On doit alors calculer les équations des deux plans contenant les faces F_{i1} et F_{i2} et faire deux calculs de normale par arête T_i.

Ce calcul nécessite de connaître les faces appartenant aux lèvres de la fissure et comprenant une arête de Γ_0. Dans *Code_Aster*, l'utilisateur rentre tous les éléments surfaciques appartenant aux lèvres de la fissure. Ces faces figurent dans un ou plusieurs groupes de mailles et sont décrites dans les connectivités des éléments de surfaces. L'algorithme trie ces faces pour ne conserver que celles ayant 2 sommets sur Γ_0. Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- Pour chaque nœud de Γ_0, on extrait les mailles appartenant aux lèvres de la fissure,
- De ces mailles, on tri celles ayant deux nœuds sur Γ_0,
- On récupère le type de la face (`TRIA` ou `QUAD`) et on calcule l'équation du ou des plan(s) tangent(s),
- Pour chaque arête de Γ_0 de sommets N_i, N_{i+1} calcul des normales $\boldsymbol{n_{i,1}}$, $\boldsymbol{n_{i+1,1}}$, $\boldsymbol{n_{i,2}}$ et $\boldsymbol{n_{i+1,2}}$.

Enfin, θ est calculé suivant l'algorithme suivant :

Boucle sur les sommets N_i de Γ_0 : $\boldsymbol{n_i}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{n_{i,1}}+\boldsymbol{n_{i,2}})$
$\theta(N_i)=|\theta|_i\,\boldsymbol{n_i}$

Fin de la boucle sur les sommets N_i de Γ_0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

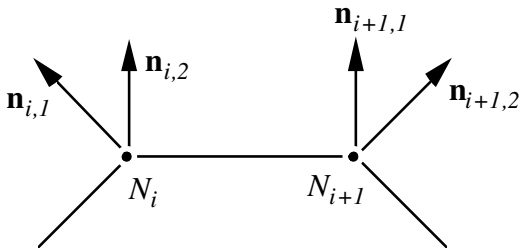


Figure 3.2.2-b : Notations des normales au fond de fissure

•Calcul de la projection Γ_0 de chaque point de Ω :

Pour chaque nœud M :

•Récupération des coordonnées de M

•

•Boucle sur les nœuds N_k de Γ_0 $k=1, NNO-1$

Récupération des coordonnées de N_k et N_{k+1}

Calcul de $s_k = \dfrac{N_k N_{k+1} . N_k M}{\|N_k N_{k+1}\|}$

$/ s_k < 0 : s_k = 0$

$/ s_k > 1 : s_k = 1$

Calcul des coordonnées de $\bar{M}_k$: $\boldsymbol{O\bar{M}_k = O\bar{N}_k + s_k N_k N_{k+1}}$

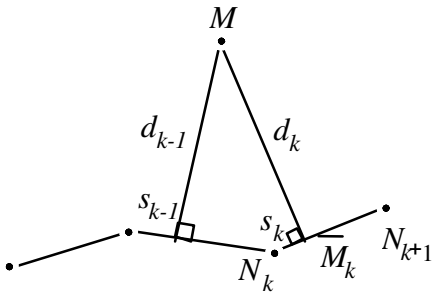
Calcul de $d_k = d(M, \bar{M}_k)$

Fin boucle

•Récupération de i tel que $d_i = \min_k (d_k)$

•Connaissant i, on récupère N_i, N_{i+1}, s_i et la projection $\bar{M}$ de M sur Γ_0 telle que :

$\boldsymbol{N_i \bar{M} = s_i N_i N_{i+1}}$



•Calcul du champ θ en chaque point de Ω :

Boucle sur les nœuds M

•Calcul de la projection $\bar{M}$ de M sur Γ_0 (cf. ci-dessus : donne N_i, N_{i+1}, s_i)

•Calcul de $d = d(M, \bar{M})$

•Calcul de $\theta(\bar{M})$ par interpolation linéaire :

$$\theta(\bar{M}) = (1 - s_i)\theta(N_i) + s_i \theta(N_{i+1})$$

•Calcul de $R_{inf}(s_i)$ et $R_{sup}(s_i)$ par interpolation linéaire :

$$R_{inf}(s_i) = (1 - s_i) R_{inf\,i} + s_i R_{inf\,i+1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$R_i(s_i)=(1-s_i)R_{sup\,i}+s_i R_{sup\,i+1}$$

/ Si $d>R_{sup}(s_i)$, $\theta(M)=0$

/ Si $d<R_{inf}(s_i)$, $\theta(M)=\theta(\bar{M})$

/ Si $R_{inf}(s_i)\le d\le R_{sup}(s_i)$, $\alpha=\dfrac{d-R_{inf}(s_i)}{R_{sup}(s_i)-R_{inf}(s_i)}$ et $\theta(M)=(1-\alpha)\theta(\bar{M})$

Fin boucle

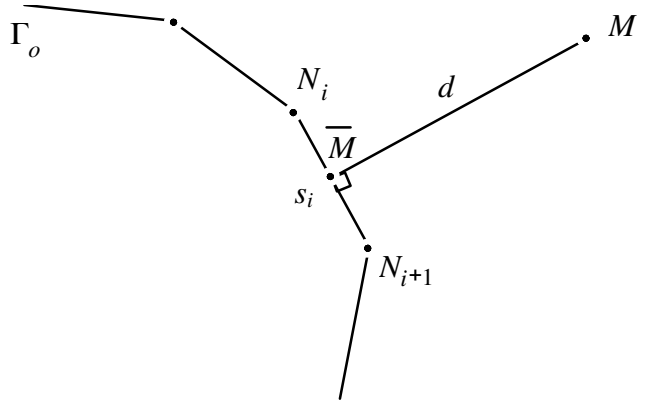


Figure 3.2.2-d : Calcul du champ θ en 3D

3.3 Choix du champ θ en dimension 2

Il s'agit d'un cas particulier de la dimension 3. Γ_0 se limite à un point, l'utilisateur choisit les rayons R_{inf} et R_{sup} , le module θ en fond de fissure $|\theta_0|$ et le champ θ est construit de telle sorte que :

$$\theta(r)=0 \text{ si } r\ge R_{sup}$$
$$\theta(r)=|\theta_0|\boldsymbol{n} \text{ si } r\le R_{inf}$$
$$\theta(r)=\frac{R_{sup}-r}{R_{sup}-R_{inf}}|\theta_0|\boldsymbol{n} \text{ si } R_{inf}\le r\le R_{sup}$$

Pour vérifier la condition $\theta.\boldsymbol{n}=0$ sur $\delta\Omega$, il faut en particulier veiller à ce que la couronne de rayon R_{sup} soit strictement incluse dans Ω .

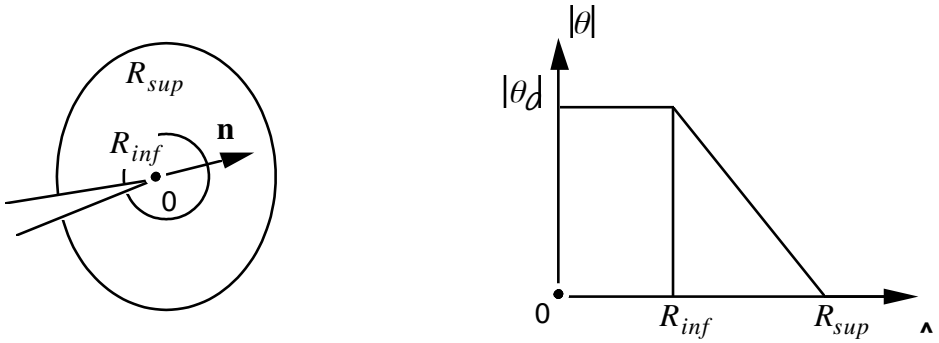


Figure 3.3-a : Calcul du champ θ en 2D

3.4 Autre méthode

L'utilisateur peut entrer lui-même le champ θ , en utilisant la commande CREA_CHAMP [U4.72.04] de *Code_Aster* qui permet d'affecter θ nœud par nœud ou par groupe de nœuds.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Bibliographie

- BUI H.D., Mécanique de la rupture fragile, Masson, 1977.
- DESTUYNDER Ph, DJAOUA M., Sur une interprétation de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, Mathematics Methods in the Applied Sciences, Vol. 3, pp. 70-87, 1981.
- GRISVARD P., "Problèmes aux limites dans les polygones", Mode d'emploi - EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, 1, 1986 pp. 21-59.
- MIALON P., "Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode thêta", EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n°3 1988 pp1-28.
- MIALON P., Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure, note interne EDF, HI/4740-07-1984.
- GURTIN M.E. An introduction to continuum mechanics. Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1981.
- VENTURINI V. et al. Etude PRObabiliste de la cuve par un couplage Mecano-fiabilisTE. Bilan du projet P1-97-04, HP-26/99/012/A, nov. 1999.
- DHATT.G et TOUZOT.G. Une présentation de la méthodes des éléments finis. Ed. Maloine, 1984.
- MURAT.F et SIMON.J. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Université de Paris VI, 1976.

Description des versions du document

Indice document	Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
D	7.4		Introduction du calcul de la dérivée
E	8.4	E. Galenne, EDF-R&D/AMA	Introduction de la méthode 'Lagrange régularisée'
F	9.4	E. Galenne, EDF-R&D/AMA	Modification de la manière de présenter la discrétisation de G et de θ en 3D

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)