Loi de comportement de plaques en béton armé GLRC_DAMAGE

Résumé :

Cette documentation présente la formulation théorique et l'intégration numérique de la loi de comportement GLRC_DAMAGE [bib1]. Elle est écrite de manière globale en efforts et moments résultants pour des modélisations en éléments finis de plaques. Cette loi intègre le comportement élastique et endommageable en flexion provenant du béton et le comportement élastoplastique provenant essentiellement des armatures en acier à partir des caractéristiques matérielles des deux matériaux et de la composition de la section de la plaque en béton armé. Il en résulte un comportement élastoplastique endommageable cyclique, adapté pour des études dynamiques de structures en béton armé. Le modèle GLRC_DAMAGE actuel ne prend pas en compte l'endommagement en membrane et n'est donc pas très précis lorsque les sollicitations de la plaque sont dominées par les effets en membrane. Par contre, la rupture d'une plaque dépend surtout du comportement de l'acier, modélisé par la partie élasto-plastique du modèle. On estime donc que la rupture devrait être représentée correctement même en membrane. Un modèle similaire à celui-là, GLRC_DM, est capable de mieux représenter l'endommagement en membrane/flexion, mais ne prend pas en compte la phase de plastification des aciers et ne peut donc pas être utilisé pour simuler la rupture.

L'élasticité orthotrope induite par le réseau orthogonal d'armatures n'est prise en compte que dans le cadre d'une analyse linéaire ; pour l'analyse non linéaire, on simplifie en construisant une élasticité isotrope équivalente approchée. A l'heure actuelle, le module tangent cohérent général n'est pas encore disponible pour ce modèle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1Introduction....3
1.1Modèles de comportements globaux....3
1.2Objectifs de la loi GLRC_DAMAGE....4
2Formulation du modèle....4
2.1Variables d'état....5
2.2Énergie libre : cas élastique linéaire....5
2.3Énergie libre : cas élastoplastique endommageable....5
2.4Loi de comportement élastoplastique endommageable....7
2.5Critères – surfaces seuils....8
2.5.1Critère de plasticité....8
2.5.2Critère d'endommagement....8
2.6Lois d'écoulement plastique....9
2.7Loi d'évolution des variables d'endommagement....9
3Paramètres de la loi....10
3.1Identification des paramètres de comportement élastique linéaire....11
3.2Identification des paramètres de comportement élasto-plastique endommageable....15
3.2.1Identification des seuils d'endommagement....15
3.2.2Identification de la pente d'endommagement en flexion....17
3.2.3Identification du niveau maximal d'endommagement en flexion....18
3.2.4Identification des paramètres de comportement plastique....18
4Intégration numérique de la loi de comportement....20
4.1Évaluation de l'endommagement....20
4.2Évaluation de l'écoulement plastique....20
4.3Évaluation de l'opérateur tangent....21
4.4Variables internes du modèle....21
5Vérification....22
6Bibliographie....22
7Description des versions du document....22

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

1.1 Modèles de comportements globaux

Les modèles globaux représentent les évolutions du matériau au sein de la structure étudiée – poutre et plaque – sur la base d'une relation entre les grandeurs généralisées de déformations (extension, courbure, distorsion) et les efforts généralisés (efforts de membrane, flexion, efforts tranchants). Ces modèles sont « calés » au préalable à l'aide d'une analyse locale figée (par exemple à l'aide des résultats d'une l'analyse limite des sections), en fonction des caractéristiques des matériaux béton et acier constituant la plaque et la répartition de ceux-ci dans la section, cf. [Figure 1.1-a]. Le schéma de principe est le suivant :

$$d(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}) \underset{\substack{\text{loi globale de comportement} \\ \uparrow \\ \text{analyse locale}}}{\rightarrow} d(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{T}) \tag{1.1.1}$$

Cette analyse locale doit tenir compte des différents couplages : par exemple l'évolution en flexion est dépendante de la valeur de l'effort normal appliqué. L'équilibre non linéaire de la structure est traité au niveau global sur les efforts généralisés, via la cinématique de plaque considérée.

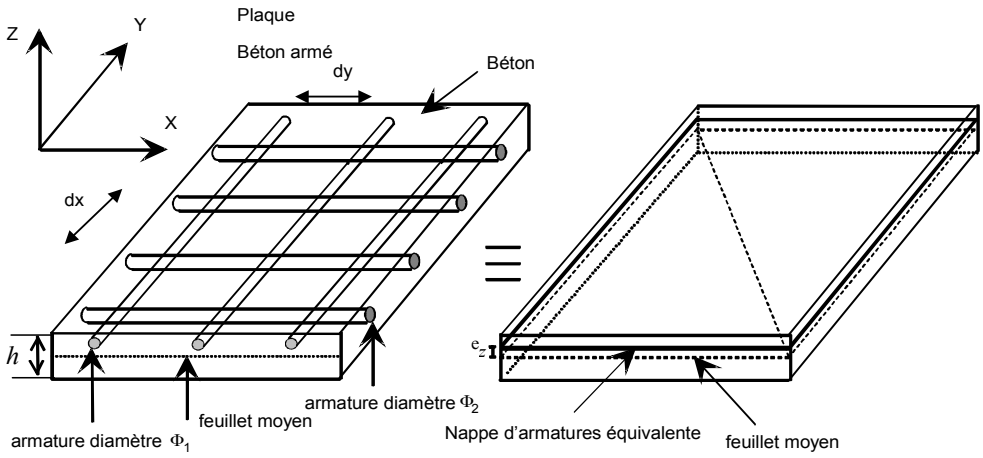


Figure 1.1-a: Dalle en béton armé.

Comme l'analyse locale n'est mise en œuvre qu'en pré-traitement (dans le cadre d'une analyse en charge monotone), on n'a pas de moyen immédiat de revenir en cours de calcul à l'analyse locale des contraintes à partir des efforts internes généralisés. En effet, le caractère dissipatif des lois de comportement irréversibles demande à stocker au cours des cycles l'évolution des variables internes en tout instant si l'on veut calculer les contraintes en un point particulier. On pourrait envisager de lancer en parallèle la loi de comportement tridimensionnelle selon [éq 1.1-1] et intégrer dans l'épaisseur pour revenir à un comportement global, mais le coût et la complexité d'une telle démarche semblent un obstacle. Il est à noter que cela pourrait être un moyen d'estimer l'erreur commise par une loi de comportement globale. Par contre, cette démarche n'est pas encore adoptée dans *Code_Aster*.

Ce type de modèle peut être utilement validé par comparaison avec une analyse directe réalisée avec un modèle local.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.2 Objectifs de la loi GLRC_DAMAGE

On trouve la formulation initiale du modèle global de béton armé de plaque GLRC_DAMAGE, établi par Koechlin en 2002, dans [bib1], [bib2] et [bib3].

Ce modèle a tout d'abord été développé pour des applications de dynamique avec ruine sous impact d'ouvrages en béton armé. La réponse élastoplastique du modèle est essentielle pour ce type d'applications. En effet, la dissipation d'énergie par plastification des aciers est importante. La prise en compte de l'endommagement par fissuration du béton permet de rendre plus précises les premières phases du comportement non linéaire. Dans le cadre d'applications sismiques, on peut s'attendre à une situation inversée : l'endommagement et la réponse après fissuration sont essentiels, tandis qu'il est rare d'aller jusqu'à mobiliser la plastification généralisée des aciers. Il semble cependant avantageux de disposer d'un même modèle pour traiter ces deux familles d'applications.

La formulation du modèle est établie dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Elle combine la plasticité avec écrouissage, notamment apportée par les aciers, et l'endommagement amené par le béton se fissurant lors de la flexion de la plaque. Le comportement plastique est construit sur la base de l'analyse limite en flexion d'une plaque de béton armé. Il est décrit à l'aide du cadre des matériaux standard généralisés. Sur la base de résultats expérimentaux, cf. [bib1], un écrouissage cinématique linéaire a été choisi pour traiter le comportement cyclique. L'endommagement est introduit pour représenter la perte de rigidité élastique qui a lieu par fissuration du béton avant la plastification des aciers. Le seuil d'endommagement est supposé constant. Ce comportement est supposé indépendant des vitesses de sollicitations (les dissipations sont instantanées).

2 Formulation du modèle

On présente ci-après la formulation du modèle GLRC_DAMAGE, sous le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles.

On doit noter que l'utilisation de ce modèle est associée à celle d'un élément de plaque. Si l'on choisit la famille d'éléments finis **DKT** (modélisation supportée : DKTG), on adopte la théorie de **Love-Kirchhoff**, c'est-à-dire qu'on ne considère aucune distorsion transverse dans l'épaisseur de la plaque. Le modèle GLRC_DAMAGE pourrait être utilisable avec les éléments finis de plaque épaisse Q4G, mais cette extension n'a pas encore été réalisée.

La maille de l'élément fini est supposée être placée sur le feuillet moyen de la dalle (à $z=0$).

En vue de pouvoir utiliser le modèle de comportement GLRC_DAMAGE dans deux types d'analyse différents, on a choisi selon le cas :

[1] ***pour une analyse élastique linéaire de plaque en béton armé :*** de prendre en compte l'orthotropie induite par le réseau orthogonal d'armatures d'acier, ainsi que le couplage flexion-membrane en cas de nappes inégales d'armatures, via un comportement élastique homogénéisé acier-béton ;

[2] ***pour une analyse élastoplastique endommageable non linéaire de plaque en béton armé :*** de négliger l'orthotropie et le couplage flexion-membrane dans la phase d'élasticité. Cette hypothèse permet de simplifier le modèle, en supposant qu'en présence de phénomènes fortement non-linéaires, l'élasticité orthotrope devient négligeable, surtout lors de la modélisation de la rupture. De plus, en pratique on s'attend à ce que les murs, voiles ainsi que les autres éléments de structure soient ferraillés à peu près pareillement entre les deux directions principales orthogonales. Cela a pour effet de diminuer l'effet de l'orthotropie élastique. Par contre, on choisit très souvent des armatures asymétriques afin de les optimiser en fonction de la direction du chargement dû au poids propre. Cela a tendance à induire un couplage membrane-flexion en élasticité en plus de celui en plasticité. Cependant, même si le modèle néglige l'asymétrie en élasticité, son

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

influence en élasto-plasticité, le comportement prépondérant lors de la rupture, peut être contrôlée à travers des fonctions seuil, qui elles peuvent être asymétriques.

Le modèle est défini par la description des variables d'état, qui représentent le système mécanique en chaque point matériel de la surface moyenne de la plaque, la densité surfacique d'énergie libre qui englobe la forme des relations de comportement et le type d'écrouissage, l'expression des critères de plasticité et d'endommagement, et les lois d'évolution irréversible, déduites du principe du travail maximal de Drücker.

2.1 Variables d'état

Les variables d'état globales sont les suivantes. Tout d'abord les variables globales de déformation :

[1] un tenseur de déformation membranaire : $\boldsymbol{\epsilon}$ défini dans le plan tangent à la plaque.

[2] un tenseur de courbure : $\boldsymbol{\kappa}$ défini dans le plan tangent à la plaque.

Puis les variables internes :

[1] deux variables d'endommagement associées aux parties supérieure, d_1 et inférieure, d_2 de la plaque. Elles sont plafonnées chacune à une valeur, d_1^{max} et d_2^{max}.

[2] deux tenseurs de courbure plastique associés à la plastification des lits d'acier, supérieur et inférieur $\boldsymbol{\kappa}_1^p$, $\boldsymbol{\kappa}_2^p$.

[3] deux tenseurs de déformation membranaire plastique associés à la plastification des lits d'acier, supérieur et inférieur, $\boldsymbol{\epsilon}_1^p$, $\boldsymbol{\epsilon}_2^p$.

[4] un tenseurs d'ordre 2 de variables internes d'écrouissage cinématiques $\boldsymbol{\alpha}$.

2.2 Énergie libre : cas élastique linéaire

La densité surfacique d'énergie libre est une expression additive des contributions élastique de membrane et de flexion :

$$\Phi_e^S = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{H}_m : \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{H}_f : \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{H}_{mf} : \boldsymbol{\kappa} \qquad (2.2.1)$$

Les tenseurs $\boldsymbol{H}_m$, $\boldsymbol{H}_f$, $\boldsymbol{H}_{mf}$ (couplage flexion-membrane en cas de nappes inégales d'armatures dans l'épaisseur) sont décrits au [§3.1]. Dans l'état actuel du modèle, on suppose que :

$$\boldsymbol{H}_{mf} = \boldsymbol{0}$$

donc que la plaque est symétrique et qu'il n'y a pas de couplage membrane-flexion élastique. Dans le modèle, le couplage membrane-flexion peut apparaître uniquement du fait d'une évolution vers l'élasto-plasticité (cf. §2.5).

2.3 Énergie libre : cas élastoplastique endommageable

Dans ce cas, on néglige l'orthotropie élastique induite par le ferraillage dans les deux directions du plan, ainsi que le couplage flexion-membrane élastique (pour des nappes d'armatures dissymétriques). On assimile donc les armatures en acier à une membrane élastique isotrope, cf. [Figure 1.1-a].

La densité surfacique d'énergie libre est une expression additive des contributions élastoplastique de membrane, élastoplastique endommageable de flexion, et d'écrouissage cinématique :

$$\Phi_{epd}^S(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}^p, d_1, d_2, \boldsymbol{\alpha}) = \Phi_{e,m}^S(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) + \Phi_{ed,f}^S(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}^p, d_1, d_2) + \Phi_p^S(\boldsymbol{\alpha}) + H(d_j - d_j^{max}) \qquad (2.3.1)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec l'énergie d'écrouissage :

$$\Phi_p^S(\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\alpha} \tag{2.3.2}$$

où $\boldsymbol{C}$ est un tenseur d'écrouissage cinématique de Prager. En pratique le tenseur $\boldsymbol{C}$ est diagonal, avec un coefficient C_m en membrane et un autre C_f en flexion, on a donc :

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} C_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_f \end{pmatrix}$$

Dans [éq 2.3.1], H désigne une fonction indicatrice du domaine d'admissibilité du potentiel thermodynamique. Concrètement, elle sert à limiter l'évolution de l'endommagement au dessus de d_j^{max}. Les d_j^{max} sont identifiés par [éq 3.2.11].

Les densités d'énergie de membrane et de flexion sont données par :

[1] En membrane :

$$\Phi_{e,m}^S(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}^p)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}^p):\boldsymbol{H}_m:(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}^p) \tag{2.3.3}$$

[2] En flexion :

$$\Phi_{ed,f}^S(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p,d_1,d_2)=\frac{\lambda_f}{2}tr(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p)^2\xi_f(tr(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p),d_1,d_2)+\mu_f\sum_{i=1}^{2}\widetilde{(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p)}_i^2\xi_f(\widetilde{(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p)}_i,d_1,d_2) \tag{2.3.4}$$

où on introduit les paramètres de Lamé en flexion λ_f et μ_f :

$$\lambda_f=\frac{h^3}{12}\lambda$$
$$\mu_f=\frac{h^3}{12}\mu$$

h étant l'épaisseur de la plaque et λ, μ les coefficients de Lamé du matériau homogénéisé.
$\widetilde{(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p)}_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de $\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p$. On notera par la suite $\boldsymbol{\kappa}^e$ le tenseur de variation de courbure élastique défini selon l'hypothèse de partition des déformations en flexion par : $\boldsymbol{\kappa}^e=\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p$.
Et enfin, on définit la fonction caractéristique de l'endommagement en flexion ξ_f :

$$\xi_f(x,d_1,d_2)=\frac{1+\gamma d_1}{1+d_1}H(x)+\frac{1+\gamma d_2}{1+d_2}H(-x) \tag{2.3.5}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans cette expression H est la fonction Heaviside et γ un paramètre de l'endommagement compris entre 0 et 1. Cette fonction ξ_f caractérise l'affaiblissement des raideurs par endommagement. Elle est décroissante pour d_1, d_2 positifs. Elle est convexe (grâce au choix de γ, identifié par la procédure décrite dans [§3.2.2]) pour assurer la stabilité du « matériau » béton armé de la dalle.

2.4 Loi de comportement élastoplastique endommageable

La loi de comportement élastoplastique endommageable (loi d'état) fournit les variables duales : les efforts de membrane, les moments de flexion qui sont des tenseurs d'ordre 2 définis sur le plan tangent de la plaque, les forces d'endommagement et les tenseurs irréversibles d'écrouissage. Elles s'écrivent :

[1] Effort de membrane :

$$\boldsymbol{N}=\frac{\partial \Phi_{epd}^{S}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}=\boldsymbol{H}_m:(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}^p) \tag{2.4.1}$$

[2] Moment de flexion :

$$\boldsymbol{M}=\frac{\partial \Phi_{epd}^{S}}{\partial \boldsymbol{\kappa}}=\boldsymbol{H}_f^d(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p,d_1,d_2):(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p) \tag{2.4.2}$$

Le tenseur d'élasticité membranaire $\boldsymbol{H}_m$ est donné dans [§3.1], tandis que $\boldsymbol{H}_f^d$ est le tenseur d'élasticité endommageable qui dépend des variables d'endommagement d_1, d_2 et aussi des signes de certaines composantes de $\boldsymbol{\kappa}^e=\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p$ (de la trace et des valeurs propres, en particulier). On rappelle que dans [éq. 2.4.1] et [éq. 2.4.2] le couplage membrane-flexion élastique est négligé (voir [§2.2]). En outre, à cause de la présence des valeurs propres des courbures élastiques dans l'expression de l'énergie libre (voir [éq. 2.3.4]), on calcule les contraintes généralisées en utilisant les équations [éq. 2.4.1], [éq. 2.4.2] dans le repère propre. Les détails de la transformation entre les repères sont disponibles dans [R7.01.32]. On précise également que selon l'hypothèse d'élasticité isotrope le couplage membrane-flexion est dû uniquement au processus élasto-plastique à travers $\boldsymbol{\epsilon}^p$ et $\boldsymbol{\kappa}^p$ (cf. §2.5).

Remarque :
On constate que le repère propre des moments est le même que celui des courbures élastiques. De même le repère propre des efforts de membrane est le même que celui des déformations élastiques. En l'absence d'endommagement, $\xi_f(x,d_1,d_2)=1$: on retrouve bien un comportement de plaque élastique isotrope.

[1] Forces d'endommagement, pour $j=1,2$:

$$Y_j=-\frac{\partial \Phi_{epd}}{\partial d_j}=\frac{1-\gamma}{(1+d_j)^2}\left(\frac{\lambda_f}{2}tr(\boldsymbol{\kappa}^e)^2H((-1)^j tr(\boldsymbol{\kappa}^e))+\mu_f\sum_i(\tilde{\kappa}_i^e)^2H((-1)^j\tilde{\kappa}_i^e)\right) \tag{2.4.3}$$

On constate que les Y_j définis par [éq. 2.4.3] sont positifs (c'est une restitution d'énergie surfacique, dont l'unité SI est J/m²) si $\gamma\in[0,1]$.

[2] Efforts et moments irréversibles de plasticité :

$$\boldsymbol{N}^p=\frac{\partial \Phi_{epd}^{S}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p}=\boldsymbol{H}_m:(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}^p)=\boldsymbol{N} \text{ et } \boldsymbol{M}^p=\frac{\partial \Phi_{epd}^{S}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^p}=\boldsymbol{H}_f^d:(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^p)=\boldsymbol{M} \tag{2.4.4}$$

[3] Tenseurs de rappel d'écrouissage cinématique :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{X}^m=\frac{\partial \Phi^S_{epd}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_m}=-\boldsymbol{C}_m:\boldsymbol{\alpha}_m \text{ et } \boldsymbol{X}^f=\frac{\partial \Phi^S_{epd}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_f}=-\boldsymbol{C}_f:\boldsymbol{\alpha}_f \quad (2.4.5)$$

2.5 Critères – surfaces seuils

2.5.1 Critère de plasticité

Le **critère de plasticité** de Johansen à écrouissage cinématique est dédoublé pour la plasticité de la partie supérieure (indice 1) et de la partie inférieure (indice 2) de la plaque. Ce critère couple la plasticité en membrane avec celle en flexion. Si x et y désignent les directions du ferraillage orthogonal de la plaque en béton, pour $j=1,2$, le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} f^p_j(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{X}^m,\boldsymbol{M}-\boldsymbol{X}^f) &= -(M_{xx}-X^f_{xx}-M^p_{jx}(N_{xx}-X^m_{xx})) \\ &\times \ (M_{yy}-X^f_{yy}-M^p_{jy}(N_{yy}-X^m_{yy}))+(M_{xy}-X^f_{xy})^2\leq 0 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Les f^p_j définissent un domaine convexe (cf. [bib4]) de réversibilité, paramétré par 4 fonctions : $M^p_{jx}(N_{xx})$ et $M^p_{jy}(N_{yy})$. Ces fonctions sont construites à l'aide de l'analyse limite de sections de poutre en béton armé représentatives de la section de la plaque étudiée, prises dans le sens des armatures de ferraillage, cf. [bib1, bib2]. On constate que seules les différences entre l'état de sollicitations et les tenseurs de rappel d'écrouissage interviennent dans l'expression du critère. Ceci est caractéristique des modèles à écrouissage cinématique.

Le potentiel de dissipation associé à ce critère est donné par :

$$\begin{aligned} \Psi_{tot}&=\boldsymbol{N}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}+\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\kappa}}-\dot{\Phi}_{epd}=\Psi_p+\Psi_d \\ \Psi_p&=\boldsymbol{N}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p+\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\kappa}}^p-\dot{\boldsymbol{\alpha}}_m:\boldsymbol{C}_m:\boldsymbol{\alpha}_m-\dot{\boldsymbol{\alpha}}_f:\boldsymbol{C}_f:\boldsymbol{\alpha}_f \\ \Psi_d&=Y_1\dot{d}_1+Y_2\dot{d}_2 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

2.5.2 Critère d'endommagement

Le **critère d'endommagement** fragile sans écrouissage est défini par un scalaire. Ce critère est dédoublé pour différencier les flexions positives des flexions négatives. Il s'écrit :

$$f^d_j(Y_j)=Y_j(\boldsymbol{\kappa},d_j)-k_j\leq 0 \quad (2.5.3)$$

Ce critère représente un domaine convexe (cf. [bib2]) de réversibilité paramétré par les seuils k_1 et k_2 qui définissent l'apparition des premières fissures en flexion de la plaque en béton armé. Leur unité SI est le J/m^2 . Ils correspondent à une limitation de la densité surfacique d'énergie élastique. Ce critère est associé au potentiel de dissipation positif :

$$\Psi_d(d_j,\dot{d}_j)=k_j\dot{d}_j\geq 0 \text{ et } \dot{d}_j\geq 0 \quad (2.5.4)$$

Ce critère d'endommagement est basique, mais c'est sa combinaison avec l'effet de l'endommagement sur la raideur élastique, cf. la fonction $\xi_f(x,d_1,d_2)$ [éq. 2.3.5], qui joue sur la réponse du modèle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.6 Lois d'écoulement plastique

La loi d'écoulement plastique s'écrit (selon la règle de normalité au critère [éq. 2.5.1]) :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p=\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1^p+\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_2^p=\lambda_1^p\frac{\partial f_1^p}{\partial \boldsymbol{N}}+\lambda_2^p\frac{\partial f_2^p}{\partial \boldsymbol{N}} \tag{2.6.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^p=\dot{\boldsymbol{\kappa}}_1^p+\dot{\boldsymbol{\kappa}}_2^p=\lambda_1^p\frac{\partial f_1^p}{\partial \boldsymbol{M}}+\lambda_2^p\frac{\partial f_2^p}{\partial \boldsymbol{M}} \tag{2.6.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^m=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^m+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2^m=\lambda_1^p\frac{\partial f_1^p}{\partial \boldsymbol{X}^m}+\lambda_2^p\frac{\partial f_2^p}{\partial \boldsymbol{X}^m}=-(-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1^p-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_2^p)=\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \tag{2.6.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^f=\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^f+\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2^f=\lambda_1^p\frac{\partial f_1^p}{\partial \boldsymbol{X}^f}+\lambda_2^p\frac{\partial f_2^p}{\partial \boldsymbol{X}^f}=-(-\dot{\boldsymbol{\kappa}}_1^p-\dot{\boldsymbol{\kappa}}_2^p)=\dot{\boldsymbol{\kappa}}^p \tag{2.6.4}$$

où les λ_j^p sont les multiplicateurs plastiques, positifs ou nuls, pour les flexions positives et les flexions négatives. Ils sont partagés par l'écoulement en membrane et par celui en flexion. On déduit de [éq. 2.6.3] et [éq. 2.6.4], de manière habituelle en écrouissage cinématique linéaire, que les variables internes d'écrouissage en membrane et en flexion sont égales respectivement aux déformations et aux courbures plastiques. Il en découle les relations suivantes sur les tenseurs de rappel en membrane et flexion :

$$\boldsymbol{X}^m=-\boldsymbol{C}_m:\boldsymbol{\epsilon}^p \tag{2.6.5}$$

$$\boldsymbol{X}^f=-\boldsymbol{C}_f:\boldsymbol{\kappa}^p \tag{2.6.6}$$

Il faut noter que ce choix d'un tenseur de Prager $\boldsymbol{C}_m$ identique à la fois en traction et en compression est critiquable. En effet, en compression plastique, le béton et l'acier interviennent, tandis qu'en traction, seul l'acier contribue (le béton étant rompu).
Les critères de plasticité [éq. 2.4.1] peuvent être atteints au même moment (pour des régimes particuliers de bi-flexion), donc l'écoulement peut avoir lieu depuis les deux critères atteints à la fois. La condition de cohérence donne deux relations supplémentaires :

$$\lambda_j^p\dot{f}_j^p(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})=0 \quad \text{si} \quad \lambda_j^p>0 \quad \text{alors} \quad \dot{f}_j^p(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})=0 \tag{2.6.7}$$

2.7 Loi d'évolution des variables d'endommagement

La loi d'évolution de l'endommagement en flexion s'écrit, pour les flexions positives et les flexions négatives (selon la règle de normalité au critère [éq. 2.5.3]) :

$$\dot{d}_j=\lambda_j^d\frac{\partial f_j^d}{\partial Y_j} \tag{2.7.1}$$

Les λ_j^d sont les multiplicateurs d'endommagement, positifs ou nuls. On rappelle que les Y_j, définis par [éq. 2.4.3], sont positifs par construction (restitution d'énergie).

La condition de cohérence donne deux relations supplémentaires :

$$\lambda_j^d\dot{f}_j^d(Y_j)=0 \quad \text{si} \quad \lambda_j^d>0 \quad \text{alors} \quad \dot{f}_j^d(Y_j)=0\Leftrightarrow\dot{Y}_j=0 \tag{2.7.2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les deux variables d'endommagement peuvent évoluer simultanément.

3 Paramètres de la loi

Avec les modèles globaux tels que GLRC_DAMAGE on cherche à avoir une représentation plus simple des phénomènes non-linéaires, en utilisant des méthodes numériques plus efficaces et plus robustes. Par conséquent, il est difficile d'attribuer une signification physique à tous les paramètres du modèle, car la plupart d'entre eux englobent plusieurs phénomènes. Ainsi, il est fortement recommandé que les paramètres du modèle soient validés par une étude comparative entre l'approche GLRC_DAMAGE et une approche plus fine, telles les modélisations par poutres multi-fibres, coques multi-couches ou 3D, sur une partie suffisamment représentative de la structure à analyser. Faute de quoi, l'erreur d'une analyse utilisant le modèle GLRC_DAMAGE ne peut pas être estimée ni contrôlée.

En tous cas, les paramètres de la loi sont déterminés de manière simplifiée à l'aide de l'analyse du comportement monotone d'une section en béton armé, excepté pour le comportement élastique linéaire où il est aussi possible de recourir à une approche homogénéisée en plaque, cf. par exemple [bib4]. On suppose que le jeu de paramètres décrivant le comportement élastique est identifiable indépendamment des paramètres de plasticité et d'endommagement. De plus, les méthodes d'homogénéisation nous permettent de déterminer le comportement élastique global avec une très bonne précision. On considère dans [§3.1] deux approches pour homogénéiser le comportement élastique : dans l'une on fait l'hypothèse d'un milieu équivalent isotrope et dans l'autre l'orthotropie est prise en compte. A présent, seulement l'approche isotrope est disponible dans *Code_Aster*. D'ailleurs, ce n'est que l'approximation isotrope qui peut être utilisée en combinaison avec la plasticité et l'endommagement. En principe, une extension aux comportements orthotropes en linéaire et en non-linéaire pourrait être envisagée dans un cadre théorique équivalent. La limitation aux cas isotropes a été choisie d'une part parce que le phénomène de l'orthotropie a été jugé négligeable lors de la rupture, dont la simulation est le but principal du modèle, et d'autre part pour alléger la formulation du modèle et l'identification des paramètres.

Les paramètres des comportements non-linéaires sont plus délicats à déterminer que les paramètres d'élasticité. Pour l'endommagement cela est plus simple, car leur nombre est plus petit. Par contre, pour la plasticité, l'utilisateur doit renseigner une fonction, déterminant le moment limite d'écoulement en fonction de l'effort membranaire. De plus, l'écrouissage cinématique est donné par quatre tenseurs de Drucker, chacun ayant trois paramètres. Dans cette version leur nombre est artificiellement réduit en supposant que ces tenseurs sont les mêmes pour les deux seuils de plasticité. Si les comportements en élasticité et avec endommagement peuvent être identifiés sans disposer d'une modélisation (ou d'un essai) de référence, pour le comportement plastique cela est fortement déconseillé.

On note h la hauteur de la section (épaisseur de la plaque). On note $\Omega_x^{\sup}=A_x^{\sup}/d_x^{\sup}$ et $\Omega_y^{\sup}=A_y^{\sup}/d_y^{\sup}$ les densités de ferraillage dans les deux directions, cf. [Figure 1.1-a], [Figure 3-a]. $A_x^{\sup}$ (*resp.* $A_y^{\sup}$) est l'aire de la section d'une barre d'acier dans la direction x (*resp.* y) de la nappe supérieure. On fait de même pour la nappe inférieure : $\Omega_x^{\inf}=A_x^{\inf}/d_x^{\inf}$, $\Omega_y^{\inf}=A_y^{\inf}/d_y^{\inf}$. En général, toutes les quantités ayant *sup* en exposant correspondent à la partie supérieure de la plaque, tandis que celle avec *inf* correspondent à sa partie inférieure.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

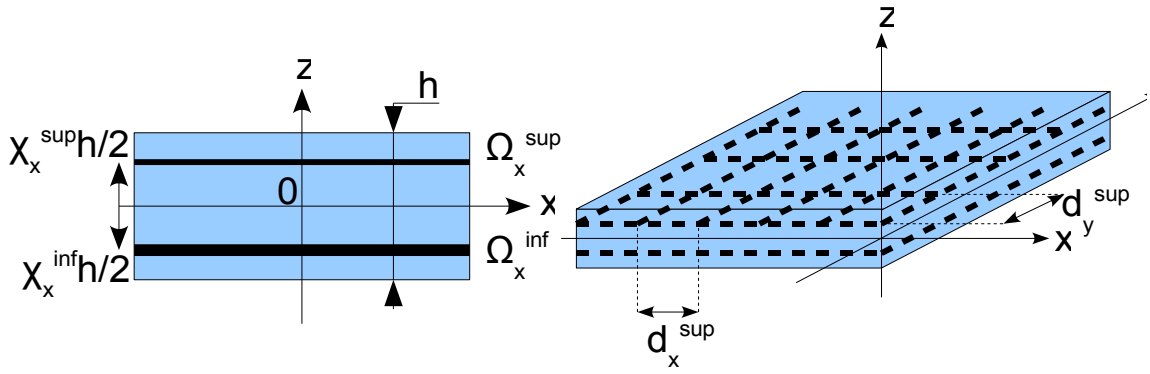


Figure 3-a: Coupe de la dalle en béton armé ; vue en perspective.

Les positions adimensionnelles des nappes d'armature dans l'épaisseur vérifient :

$$\chi_{x/y}^{sup} \in]0,1[\text{ et } \chi_{x/y}^{inf} \in]-1,0[$$

La masse volumique équivalente de la plaque en béton armé est définie par une moyenne simple pondérée par les masses volumiques ρ_a, ρ_b des proportions respectives des deux matériaux (loi des mélanges). Elle sert à établir l'énergie cinétique de la plaque.

$$\rho_{éq} = \rho_b + \frac{\rho_a}{h}\left(\Omega_x^{sup} + \Omega_x^{inf} + \Omega_y^{sup} + \Omega_y^{inf}\right) \quad (3.1)$$

Cette masse volumique équivalente doit être renseignée sous le mot-clé ELAS de l'opérateur DEFI_MATERIAU de définition du matériau béton, avec le module d'Young et le coefficient de Poisson du béton. Cette dernière donnée sert à établir une estimation de la vitesse des ondes, utilisée pour le contrôle du pas de temps en intégration explicite (condition de Courant) :

	E	NU	RHO
paramètre	E_b	ν_b	$\rho_{éq}$
Unités SI	[Pa]	sans	[kg/m^3]

3.1 Identification des paramètres de comportement élastique linéaire

Le comportement élastique linéaire est *a priori* orthotrope et intègre un couplage membrane – flexion. Pour réaliser un calcul élastique préalable à une analyse non linéaire, on souhaite représenter le mieux possible ce type de comportement de la structure en béton armé.

On propose d'identifier les coefficients de comportement élastique linéaire de deux manières :

- par **l'approche orthotrope** où l'on construit la matrice élastique membrane-flexion à partir des caractéristiques élastiques du béton (E_b, ν_b), de l'acier (E_a) et des caractéristiques géométriques de la section de béton armé, cf. (Figure 3-a).

- par **l'approche isotrope** où l'on détermine les paramètres élastiques du milieu homogénéisé équivalent.

La loi élastique globale de la dalle de béton armé avec couplage membrane et flexion s'écrit avec les tenseurs $\boldsymbol{H}_m$, $\boldsymbol{H}_f$, $\boldsymbol{H}_{mf}$ et est donné dans le repère local orthogonal lié au ferraillage par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ 2\mathrm{N}_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ 2\mathrm{M}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} H^{m}_{1111} & H^{m}_{1122} & 0 \\ H^{m}_{1122} & H^{m}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^{m}_{1212} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} H^{mf}_{1111} & H^{mf}_{1122} & 0 \\ H^{mf}_{1122} & H^{mf}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^{mf}_{1212} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} H^{mf}_{1111} & H^{mf}_{1122} & 0 \\ H^{mf}_{1122} & H^{mf}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^{mf}_{1212} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} H^{f}_{1111} & H^{f}_{1122} & 0 \\ H^{f}_{1122} & H^{f}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^{f}_{1212} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\,\epsilon_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\,\kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

Le repère local orthogonal lié au ferraillage est défini avec AFFE_CARA_ELEM (mot-clé facteur COQUE, mot-clé ANGL_REP).

Dans cette expression, H^{m}_{ijkl} sont les raideurs de membrane, les H^{f}_{ijkl} sont les raideurs de flexion et les H^{mf}_{ijkl} sont les raideurs de couplage membrane-flexion. L'orthotropie impose dans ce repère que les termes $H_{ij\,12}$ soient nuls. Dans le cas de deux grilles d'armatures symétriques, on a découplage membrane-flexion : $H^{mf}_{ijkl}=0$.

On vérifie que nécessairement : $H^{m}_{1111}H^{f}_{1111}-\left(H^{mf}_{1111}\right)^{2}>0$, de même dans l'autre direction. De la même manière on doit avoir : $H^{m}_{1111}H^{m}_{2222}-\left(H^{m}_{1212}\right)^{2}>0$, $H^{f}_{1111}H^{f}_{2222}-\left(H^{f}_{1212}\right)^{2}>0$, toujours à cause du caractère défini-positif du tenseur d'élasticité.

- **Approche orthotrope (**indisponible dans le Code_Aster à présent)

  On construit directement les coefficients par les relations suivantes approchées :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} H^m_{1111}=\dfrac{E_b h}{1-\nu_b^2}+E_a\langle\Omega\rangle_x \\ H^m_{2222}=\dfrac{E_b h}{1-\nu_b^2}+E_a\langle\Omega\rangle_y \end{cases}, \begin{cases} H^m_{1122}=\dfrac{\nu_b E_b h}{1-\nu_b^2} \\ H^m_{1212}=\dfrac{E_b h}{1+\nu_b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H^f_{1111}=\dfrac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)}+\dfrac{E_a h^2}{4}\langle\chi^2\Omega\rangle_x \\ H^f_{2222}=\dfrac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)}+\dfrac{E_a h^2}{4}\langle\chi^2\Omega\rangle_y \end{cases}, \begin{cases} H^f_{1122}=\dfrac{\nu_b E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)} \\ H^f_{1212}=\dfrac{E_b h^3}{12(1+\nu_b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H^{mf}_{1111}=\dfrac{E_a h}{2}\langle\chi\Omega\rangle_x \\ H^{mf}_{2222}=\dfrac{E_a h}{2}\langle\chi\Omega\rangle_y \end{cases}, \begin{cases} H^{mf}_{1122}=0 \\ H^{mf}_{1212}=0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

où on a posé, pour simplifier, les expressions :

$$\langle\Omega\rangle_x=\Omega_x^{\sup}+\Omega_x^{\inf},\ \langle\Omega\rangle_y=\Omega_y^{\sup}+\Omega_y^{\inf}$$

$$\langle\chi\Omega\rangle_y=\chi_y^{\sup}\Omega_y^{\sup}+\chi_y^{\inf}\Omega_y^{\inf},\ \langle\chi\Omega\rangle_y=\chi_y^{\sup}\Omega_y^{\sup}+\chi_y^{\inf}\Omega_y^{\inf}$$

$$\langle\chi^2\Omega\rangle_x=\chi_x^{\sup^2}\Omega_x^{\sup}+\chi_x^{\inf^2}\Omega_x^{\inf},\ \langle\chi^2\Omega\rangle_x=\chi_x^{\sup^2}\Omega_x^{\sup}+\chi_x^{\inf^2}\Omega_x^{\inf}$$

On suppose ainsi que les aciers n'apportent pas de raideur en distorsion membranaire de la plaque, ni en torsion.

Remarque :

L'approche orthotrope n'est pas disponible dans la version actuelle. Il est envisagé de l'introduire dans les prochaines évolutions du modèle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- **Approche isotrope**

On construit la matrice élastique globale de éq. 3.1.1 en supposant :

$$\begin{pmatrix} H^m_{1111} & H^m_{1122} & 0 \\ H^m_{1122} & H^m_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^m_{1212} \end{pmatrix} = \frac{E^m_{éq} h}{1-(\nu^m_{éq})^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu^m_{éq} & 0 \\ \nu^m_{éq} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu^m_{éq} \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

pour la partie membrane et

$$\begin{pmatrix} H^f_{1111} & H^f_{1122} & 0 \\ H^f_{1122} & H^f_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^f_{1212} \end{pmatrix} = \frac{E^f_{éq} h^3}{12(1-(\nu^f_{éq})^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu^f_{éq} & 0 \\ \nu^f_{éq} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu^f_{éq} \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

pour la partie flexion. On néglige également le couplage membrane-flexion :

$$\begin{pmatrix} H^{mf}_{1111} & H^{mf}_{1122} & 0 \\ H^{mf}_{1122} & H^{mf}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H^{mf}_{1212} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.1.5)$$

Par comparaison avec [éq. 3.1.3] et [éq. 3.1.4], on opte pour les relations suivantes, en privilégiant le comportement moyen dans le plan et en moyennant sur les directions *x* et *y*, qui donnent les quatre coefficients élastiques nécessaires, à partir des notations [éq 3.1.2] :

$$\nu^m_{éq} = \nu_b \frac{2 E_b h}{2 E_b h + E_a (1-\nu_b^2)(\langle \Omega \rangle_x + \langle \Omega \rangle_y)} \quad (3.1.6)$$

$$\nu^f_{éq} = \nu_b \frac{2 E_b h}{2 E_b h + 3 E_a (1-\nu_b^2)(\langle \chi^2 \Omega \rangle_x + \langle \chi^2 \Omega \rangle_y)} \quad (3.1.7)$$

$$E^m_{éq} = E_b \frac{\nu_b (1-(\nu^m_{éq})^2)}{\nu^m_{éq}(1-\nu_b^2)} \text{ , } E^f_{éq} = E_b \frac{\nu_b (1-(\nu^f_{éq})^2)}{\nu^f_{éq}(1-\nu_b^2)} \text{ , } D_{éq} = \frac{E^f_{éq} h^3}{12(1-(\nu^f_b)^2)} \quad (3.1.8)$$

Parmi les deux approches élastiques seulement la deuxième (*ii)* est disponible actuellement.

Les coefficients élastiques du béton (E_b , ν_b) ainsi que ceux des aciers E_a sont renseignés sous le mot-clé ELAS de DEFI_MATERIAU. Les caractéristiques de la disposition des aciers dans la plaque de béton ($\Omega_x^{\inf}$, $\Omega_x^{\sup}$, $\Omega_y^{\inf}$, $\Omega_y^{\sup}$, $\chi_x^{\inf}$, $\chi_x^{\sup}$, $\chi_y^{\inf}$, $\chi_y^{\sup}$) sont renseignées sous le mot-clé NAPPE de DEFI_GLRC.

La hauteur h de la section est aussi fournie par l'opérateur DEFI_GLRC, mot-clé BETON, opérande EPAIS. Les directions du repère local d'orthotropie sont définies par l'opérateur AFFE_CARA_ELEM, mot-clé COQUE avec l'opérande ANGL_REP. Le comportement élastique linéaire est utilisable en analyse non linéaire sous le mot-clé COMPORTEMENT avec l'opérande RELATION = 'GLRC_DAMAGE'.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2 Identification des paramètres de comportement élasto-plastique endommageable

Le modèle d'endommagement, [§2.3], est formulé sous l'hypothèse d'isotropie (voir [§3.1, ii]), qui est une approximation raisonnable dans la plupart des cas. De plus, on admet que le couplage flexion-membrane (termes H_{ijkl}^{mf}) dans la phase élastique du comportement est négligeable.

Selon [§3.1, ii] on identifie le tenseur d'élasticité flexion-membrane (cf. les tenseurs $\boldsymbol{H}_m$ et $\boldsymbol{H}_f$ définis par les [éq 2.3.3] et [éq. 2.3.4]) :

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ 2\mathrm{N}_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ 2\mathrm{M}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{E_{éq}^m h}{1-(\nu_{éq}^m)^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu_{éq}^m & 0 \\ \nu_{éq}^m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_{éq}^m \end{pmatrix} & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & \dfrac{E_{éq}^f h^3}{12(1-(\nu_{éq}^f)^2)}\begin{pmatrix} 1 & \nu_{éq}^f & 0 \\ \nu_{éq}^f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu_{éq}^f \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

3.2.1 Identification des seuils d'endommagement

On doit identifier les seuils d'endommagement définis par [éq. 2.4.3] à partir des limites de fissuration en traction pure mono-axiale et en flexion pure mono-axiale (dans les directions positive M_1^d et négative M_2^d) de la dalle en béton armé, elles-mêmes définies à partir du seuil de résistance en traction du béton $\sigma_{ft} \geq 0$ (cf. [bib2]). On utilise pour ce faire la résolution analytique du cas d'une poutre en béton ferraillée de la même manière que la dalle. On conserve l'approximation consistant à considérer des nappes d'armatures moyennées selon les directions x et y. On admettra donc que l'on a $H_{1111}^m \equiv H_{2222}^m$, $H_{1111}^f \equiv H_{2222}^f$ et $H_{1111}^{mf} \equiv H_{2222}^{mf}$. Ne pas prendre en compte cette approximation conduit à des calculs lourds et peu nécessaires.

En flexion pure mono-axiale positive M_{xx}, avec $N_{xx}=0$, $\epsilon_{\alpha y}=0$, $\kappa_{xy}=0$ et $\kappa_{yy}=-\nu_{éq}^f \kappa_{xx}$, $\alpha=\{x,y\}$, l'endommagement du béton est atteint d'abord en peau inférieure de la dalle en béton armé : $\sigma_{ft}=\dfrac{E_b}{1-\nu_b^2}(\epsilon_{xx}+\kappa_{xx} h/2)$. On a donc les relations suivantes, cf. [éq. 3.1.2], [éq. 3.1.3] et [éq. 3.1.4] :

$$\epsilon_{xx} = -\frac{H_{1111}^{mf}}{H_{1111}^m}\kappa_{xx}$$

puis

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \left(H^f_{1111} - H^f_{1122}\nu^f_{éq} - \frac{(H^{mf}_{1111})}{H^m_{1111}} \right)\kappa_{xx} \\ &= \left(H^f_{1111}(1-(\nu^f_{éq})^2) - \frac{(H^{mf}_{1111})}{H^m_{1111}} \right)\kappa_{xx} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\sigma_{ft} = \frac{E_b \kappa_{xx}}{1-\nu_b^2}\left(\frac{h}{2} - \frac{H^{mf}_{1111}}{H^m_{1111}}\right) = \frac{E_b M_{xx}}{1-\nu_b^2}\frac{H^m_{1111}}{(1-(\nu^f_{éq})^2)H^m_{1111}H^f_{1111} - (H^{mf}_{1111})^2}\left(\frac{h}{2} - \frac{H^{mf}_{1111}}{H^m_{1111}}\right) \quad (3.2.3)$$

d'où :

$$M^d_1 = (1-\nu_b^2)\frac{\sigma_{ft}}{E_b}\frac{(1-(\nu^f_{éq})^2)H^m_{1111}H^f_{1111} - (H^{mf}_{1111})^2}{H^m_{1111}}\left(\frac{h}{2} - \frac{H^{mf}_{1111}}{H^m_{1111}}\right)^{-1} \quad (3.2.4)$$

Dans le cas où on néglige le couplage flexion-membrane, $H^{mf}_{1111} = 0$, on a simplement :

$$M^d_1 = \frac{\sigma_{ft} h^2}{6}\frac{\nu_b}{\nu^f_{éq}}(1-(\nu^f_{éq})^2) \quad (3.2.5)$$

De même, en flexion pure mono-axiale négative M_{xx}, avec $N_{xx} = 0$, $\epsilon_{\alpha y} = 0$, $\kappa_{xy} = 0$ et, $\kappa_{yy} = -\nu^f_{éq}\kappa_{xx}$, $\alpha = \{x, y\}$, l'endommagement du béton est atteint d'abord en peau supérieure de la dalle en béton armé : $\sigma_{ft} = \frac{E_b}{1-\nu_b^2}(\epsilon_{xx} - \kappa_{xx} h/2)$. On a donc les relations suivantes :

$$\sigma_{ft} = -\frac{E_b \kappa_{xx}}{1-\nu_b^2}\left(\frac{h}{2} - \frac{H^{mf}_{1111}}{H^m_{1111}}\right) = -\frac{E_b M_{xx}}{1-\nu_b^2}\frac{H^m_{1111}}{(1-(\nu^f_{éq})^2)H^m_{1111}H^f_{1111} - (H^{mf}_{1111})^2}\left(\frac{h}{2} + \frac{H^{mf}_{1111}}{H^m_{1111}}\right) \quad (3.2.6)$$

d'où :

$$M^d_2 = -(1-\nu_b^2)\frac{\sigma_{ft}}{E_b}\frac{(1-(\nu^f_{éq})^2)H^m_{1111}H^f_{1111} - (H^{mf}_{1111})^2}{H^m_{1111}}\left(\frac{h}{2} + \frac{H^{mf}_{1111}}{H^m_{1111}}\right)^{-1} \quad (3.2.7)$$

Dans le cas où on néglige le couplage flexion-membrane, on a simplement :

$$M^d_1 = -\frac{\sigma_{ft} h^2}{6}\frac{\nu_b}{\nu^f_{éq}}(1-(\nu^f_{éq})^2) \quad (3.2.8)$$

Remarque :

On vérifie que : $M^d_1 \geq 0$ et $M^d_2 \leq 0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il ne reste plus qu'à relier ces moments de fissuration aux seuils k_1, k_2 définis en [éq. 2.5.3]. Puisque le chargement est exercé à partir d'un état vierge, $d_1=d_2=0$. D'où les forces d'endommagement (restitution d'énergie), cf. [éq. 2.4.3] :

$$Y_j=\frac{1-\gamma}{(1+d_j)^2}\left(\frac{\lambda_f}{2}tr(\boldsymbol{\kappa}^e)^2H((-1)^j tr(\boldsymbol{\kappa}^e))+\mu_f\sum_i(\tilde{\kappa}_i^e)^2H((-1)^j\tilde{\kappa}_i^e)\right)$$

où on applique $d_j=0$, $\boldsymbol{\kappa}^p=0$, $\boldsymbol{\kappa}^e=\boldsymbol{\kappa}$, $\kappa_{xy}=0$ et $\kappa_{yy}=-\nu_{éq}^f\kappa_{xx}$ afin d' obtenir :

$$Y_j=\frac{1}{2}(1-\gamma)\left(\lambda_f(1-\nu_{éq}^f)^2+\mu_f\right)\kappa_{xx}^2$$

En utilisant [éq. 3.1.1] du document [R7.01.32] :

$$\lambda_f=\frac{h^3\nu_f E_{éq}^f}{12(1-\nu_f^2)}\ ,\ \mu_f=\frac{h^3E_{éq}^f}{24(1+\nu_f)}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
Y_j &= \frac{h^3}{24}(1-\gamma)E_{éq}^f\frac{1+\nu_{éq}^f(1-\nu_{éq}^f)}{1+\nu_{éq}^f}\kappa_{xx}^2\\
&= \frac{h^3}{24}(1-\gamma)E_{éq}^f\frac{1+\nu_{éq}^f(1-\nu_{éq}^f)}{1+\nu_{éq}^f}\left(\frac{M_{xx}}{H_{1111}^f(1-(\nu_{éq}^f)^2)}\right)^2\\
&= \frac{h^3}{24}(1-\gamma)E_{éq}^f\frac{1+\nu_{éq}^f(1-\nu_{éq}^f)}{1+\nu_{éq}^f}\left(\frac{12}{E_{éq}^f h^3}M_{xx}\right)^2\\
&= \frac{6}{h^3}\frac{(1-\gamma)}{E_{éq}^f}\frac{1+\nu_{éq}^f(1-\nu_{éq}^f)}{1+\nu_{éq}^f}M_{xx}^2
\end{aligned}$$

puis :

$$k_1=\frac{6}{h^3}\frac{(1-\gamma)}{E_{éq}^f}\frac{1+\nu_{éq}^f(1-\nu_{éq}^f)}{1+\nu_{éq}^f}(M_1^d)^2\ ,\ k_2=\frac{6}{h^3}\frac{(1-\gamma)}{E_{éq}^f}\frac{1+\nu_{éq}^f(1-\nu_{éq}^f)}{1+\nu_{éq}^f}(M_2^d)^2 \qquad (3.2.9)$$

Ces seuils ont pour unités SI le Joule.

Le comportement élastique linéaire endommageable est utilisable en analyse non linéaire sous le mot-clé `COMPORTEMENT` avec l'opérande `RELATION = 'GLRC_DAMAGE'`. Les paramètres de l'opérateur `DEFI_MATERIAU MF1` et `MF2` correspondent à M_1^d et M_2^d.

3.2.2 Identification de la pente d'endommagement en flexion

Suivant les relations développées dans [§3.2] de [R7.01.32], la pente endommageante est proportionnelle au paramètre γ :

$$p_f=\gamma\, p_{élas} \qquad (3.2.10)$$

Le paramètre γ correspond au paramètre `GAMMA` renseigné dans l'opérateur `DEFI_GLRC`.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2.3 Identification du niveau maximal d'endommagement en flexion

Dans [éq. 2.3.1], on a prévu de limiter le niveau d'endommagement en flexion de la plaque en béton armé, à l'aide des valeurs de d_j^{max}. On associe ces valeurs aux pentes moment-courbure, pour les deux directions de chargement $j=1,2$, et par rapport à la pente élastique, voir aussi [Figure 3.2.4-a] :

$$\frac{p_{2,j}}{p_{élas}}=\frac{1+\gamma\, d_j^{max}}{1+d_j^{max}}$$

d'où, pour $j=1,2$:

$$d_j^{max}=\frac{p_{élas}-p_{2,j}}{p_{2,j}-p_f} \tag{3.2.11}$$

Dans l'opérateur DEFI_GLRC on renseigne QP1 et QP2 pour $p_{2,1}$ et $p_{2,2}$.

3.2.4 Identification des paramètres de comportement plastique

Pour les comportements en élasticité et avec endommagement, il est possible d'obtenir les valeurs des paramètres analytiquement à partir des propriétés matériaux et géométriques du béton armé. Pour caractériser les paramètres du comportement plastique, il est impératif de se référer à une modélisation plus fine (poutre multi-fibres, coque multi-couches ou 3D). Un logiciel du type MOCO (voir [bib10]) est préconisé pour l'identification automatique des modèles GLRC. A terme, il est prévu qu'un tel outil soit intégré dans *Code_Aster*. Dans la version actuelle, l'identification de la partie élasto-plastique est complètement laissée aux soins des utilisateurs.

Pour l'identification, il est plus raisonnable d'identifier les paramètres du comportement non-linéaire à partir de tests, numériques ou expérimentaux, avec un chargement monotone. Par exemple, on peut utiliser un test aux courbures et aux moments fléchissant homogènes. Un tel test est pseudo-unidimensionnel et peut être entièrement représenté avec un seul graphique, sur lequel on peut identifier les seuils d'endommagement et de plasticité de même que les pentes correspondant aux différentes phases de chargement, voir Figure 3.2.4-a. Pour mesurer l'effet de l'effort membranaire le test de flexion monotone doit être combiné avec un chargement en membrane.

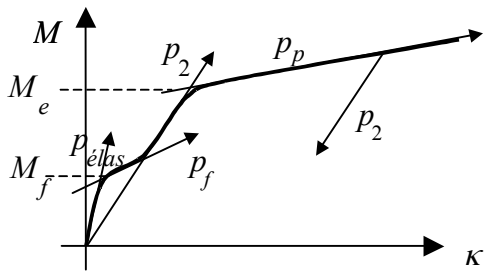


Figure 3.2.4-a: Flexion uniaxiale monotone.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Sur la Figure 3.2.4-a, on distingue cinq phases :

i) phase élastique caractérisée par la pente $p_{élas}$

ii) phase correspondant à l'endommagement du béton (pente p_f),

iii) reprise de la raideur due aux aciers après l'atteinte de l'endommagement maximal (pente p_2)

iv) plastification des aciers (pente p_p).

v) décharge élastique : la valeur de pentes de décharge est dans l'intervalle $[p_{élas}, p_f]$ pour les phases i) à iii) et vaut p_2 pour la phase iv).

Pour décrire le comportement plastique il faut renseigner les fonctions $M^p_{jx}(N_{xx}-X^m_{xx})$ et $M^p_{jy}(N_{yy}-X^m_{yy})$, $j=1,2$, en tant que fonctions « aster », FMEX1, FMEX2, FMEY1, FMEY2 dans DEFI_GLRC. Il est recommandé de définir des fonctions symboliques par la commande FORMULE, qui doivent ensuite être transformées en fonctions discrétisées par la commande CALC_FONC_INTERP. En plus de ces fonctions, on doit renseigner aussi leurs dérivées premières et secondes, lesquelles, en revanche, peuvent être calculées par l'opérateur CALC_FONCTION. Typiquement, il s'agit de fonctions proches de fonctions paraboliques. Pour une direction donnée, disons x , les deux fonctions M^p_{1x} et M^p_{2x} définissent le domaine élastique, comme dans la Figure 3.2.4-b.

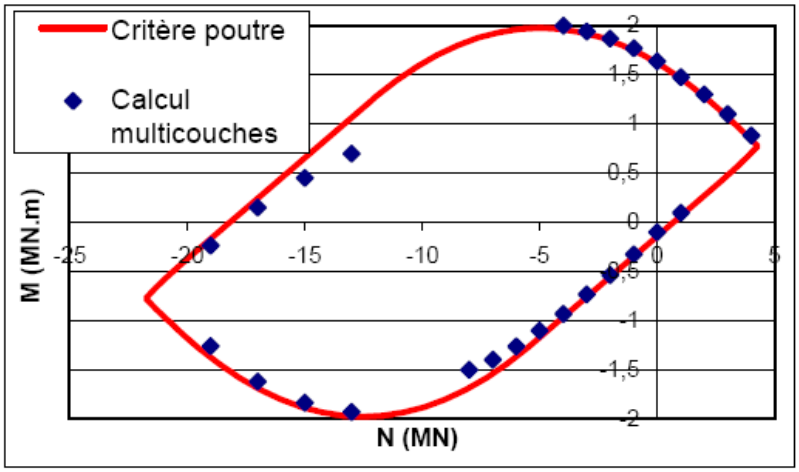


Figure 3.2.4-b: Le domaine élastique se trouve entre les deux courbes moment fléchissant/effort membranaire. Le graphe présente une comparaison entre les seuils utilisés par le modèle GLRC_DAMAGE et ceux obtenus par un calcul multi-couches sur le cas d'une poutre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Intégration numérique de la loi de comportement

La loi GLRC_DAMAGE a été initialement conçue pour des analyses de dynamique rapide ayant recours aux schémas explicites d'intégration temporelle. La version du modèle est presque identique à la version initiale et n'est donc pas optimisée pour des calculs en statique ou en dynamique implicite. Par conséquent, le modèle risque d'être peu robuste et peu performant pour une analyse avec de grands pas de temps. Il est prévu que l'intégration numérique du modèle soit améliorée.

4.1 Évaluation de l'endommagement

Le modèle d'endommagement utilisé dans GLRC_DAMAGE a été étendu au couplage membrane-flexion et mis dans le modèle GLRC_DM (voir [R7.01.32]). On renvoie donc le lecteur à [R7.01.32] pour les détails concernant l'intégration numérique de la partie endommagement. Le calcul dans GLRC_DAMAGE est plus simple, car on néglige l'influence de l'énergie membranaire sur l'évolution de l'endommagement.

4.2 Évaluation de l'écoulement plastique

L'intégration de la partie élasto-plastique est la partie la plus délicate du modèle. Pour l'instant, on ne dispose pas de méthode ayant une robustesse satisfaisante pour de grands incréments de (pseudo)-temps. On résume ci-dessous les particularités du modèle présenté dans [§2], qu'on peut difficilement résoudre par les approches classiques, basées sur la méthode de Newton.

- **Doubles cônes :** Le domaine élastique de chacune des fonctions seuil définies dans [§2.5.1] n'est pas convexe et peut être représenté par un double cône dans l'espace des contraintes généralisées (voir Figure 4.2-a). Évidemment, ce n'est que le cône proche de l'origine qui représente le vrai domaine élastique. Ainsi, la résolution de l'admissibilité plastique doit s'effectuer en rajoutant deux inéquations :

$$g_1^p(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{X}^m,\boldsymbol{M}-\boldsymbol{X}^f)=(M_{xx}-X_{xx}^f)-M_{1\mathrm{x}}^p(N_{xx}-X_{xx}^m)+(M_{yy}-X_{yy}^f)-M_{1\mathrm{y}}^p(N_{yy}-X_{yy}^m)\leq 0 \qquad (4.2.1)$$

$$g_2^p(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{X}^m,\boldsymbol{M}-\boldsymbol{X}^f)=(M_{xx}-X_{xx}^f)-M_{2\mathrm{x}}^p(N_{xx}-X_{xx}^m)+(M_{yy}-X_{yy}^f)-M_{2\mathrm{y}}^p(N_{yy}-X_{yy}^m)\leq 0 \qquad (4.2.2)$$

  Avec les inéquations [éq. 4.2.1] et [éq. 4.2.2], on élimine les solutions non-physiques des équations d'admissibilités plastiques, $f_j^p(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{X}^m,\boldsymbol{M}-\boldsymbol{X}^f)\leq 0$, $\lambda_j^p\geq 0$. Les fonctions g_j^p définissent les deux plans, $g_j^p(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{X}^m,\boldsymbol{M}-\boldsymbol{X}^f)=0$, séparant les cônes non-physiques des cônes déterminant le domaine élastique. En revanche, l'introduction des inéquations dans le système nous empêche d'utiliser les algorithmes du type Newton sans modifications importantes.

- **Sommets des cônes** : l'autre inconvénient, également lié à la forme du domaine élastique dans l'espace des contraintes généralisées, provient des deux sommets des cônes du domaine élastique (voir Figure 4.2-a). Cette propriété peut aussi rendre la convergence de l'algorithme itératif difficile.

Du fait des deux inconvénients mentionnés ci-dessus on ne peut pas appliquer l'algorithme du retour radial, le plus souvent utilisé pour la résolution des problèmes de plasticité. A sa place on a implémenté un algorithme de « cutting plane », combiné avec de la dichotomie. Les détails de l'algorithme sont disponibles dans [bib1].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

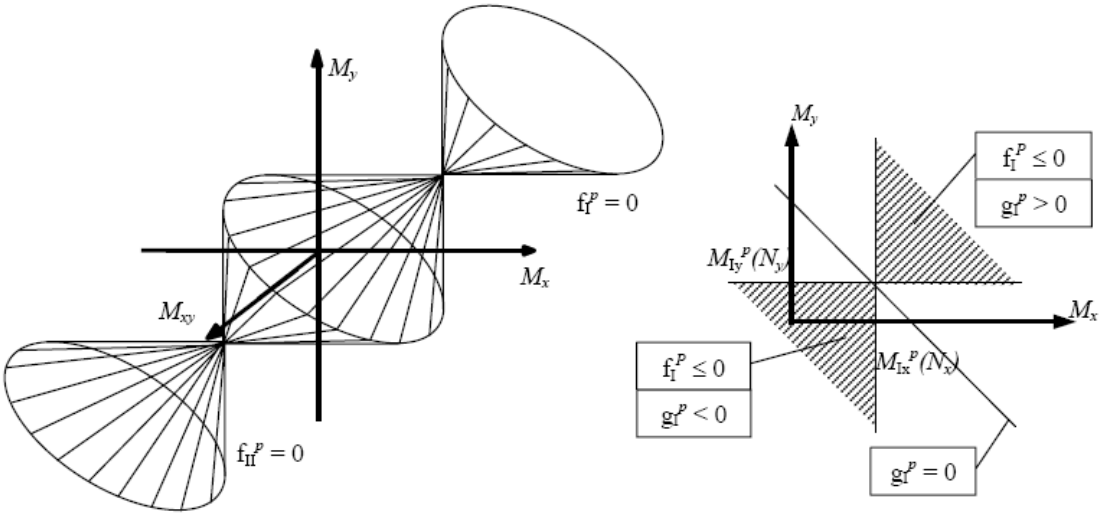


Figure 4.2-a: Seuil plastique dans l'espace des contraintes généralisées en forme de deux double cônes.

4.3 Évaluation de l'opérateur tangent

Actuellement, l'opérateur tangent du modèle GLRC_DAMAGE n'est pas cohérent et ne garantit pas la convergence quadratique du processus global de Newton. Son implantation est basée sur une version plus ancienne du modèle. Cette partie du modèle est encore en chantier.

4.4 Variables internes du modèle

Nous listons ici les variables internes stockées en chaque point de Gauss dans l'implantation du modèle.

Numéro de variable interne	sens physique
V1	EXXP extension membranaire plastique
V2	EYYP extension membranaire plastique
V3	EXYP extension membranaire plastique
V4	KXXP courbure plastique cumulée
V5	KYYP courbure plastique cumulée
V6	KXYP courbure plastique cumulée
V7	Dissipation plastique cumulée
V8	D1 variable d'endom. de la face supérieure
V9	D2 variable d'endom. de la face inférieure
V10	Dissipation d'endommagement
V11	angle d'orthotropie
V12	angle d'orthotropie
V13	angle d'orthotropie
V14	NXX effort de membrane de rappel cinématique
V15	NYY effort de membrane de rappel cinématique
V16	NXY effort de membrane de rappel cinématique
V17	MXX moment de rappel cinématique
V18	MYY moment de rappel cinématique
V19	MXY moment de rappel cinématique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Vérification

La loi de comportement GLRC_DAMAGE est vérifiée par les cas tests suivants :

statique linéaire	SSLS126	Flexion d'une dalle en béton armé (modèle GLRC_DAMAGE) appuyée sur deux cotés: régime de poutre élastique	[V3.03.126]
statique linéaire	SSLS127	Flexion d'une dalle en béton armé (modèle GLRC_DAMAGE) appuyée sur 4 cotés : régime de plaque élastique	[V3.03.127]
dynamique explicite non-linéaire	SDNS106	Réponse transitoire d'une dalle en béton armé : modèle GLRC_DAMAGE	[V5.06.106]

6 Bibliographie

- P. KOECHLIN, « Modèle de comportement membrane-flexion et critère de perforation pour l'analyse de structures minces en béton armé sous choc mou », Thèse de doctorat Paris VI, 2007, http://www.lamsid.cnrs-bellevue.fr/productions/theses.htm.
- P.KOECHLIN, S.MOULIN. Modèle de comportement global des plaques en béton armé sous chargement dynamique en flexion : loi GLRC améliorée : modélisation de la fissuration par endommagement. Note HT-62/02/021/A, 11/2002.
- P.KOECHLIN, S.POTAPOV. A global constitutive model for reinforced concrete plates. ASCE J. Eng. Mech. 2006.
- F.VOLDOIRE. Homogénéisation des structures hétérogènes. Note EDF/DER/MMN HI-74/93/055, 27/10/1993.
- [V3.03.126] SSLS126 – Flexion d'une dalle en béton arme (modèle GLRC) appuyée sur 2 côtés.
- [V3.03.127] SSLS127 – Flexion d'une dalle en béton arme (modèle GLRC) appuyée sur 4 côtés.
- [V5.06.106] SDNS106 – Réponse transitoire d'une dalle en béton armé (modèle GLRC_DAMAGE).
- F.VOLDOIRE. Homogénéisation des structures hétérogènes. Note EDF/DER/MMN HI-74/93/055, 27/10/1993.
- P. KOECHLIN, MOCO 2007 : Documentation de référence et d'utilisation, Note EDF/R&D HT-T62-2007-00635-FR, 12/04/2007.

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
8.4	D.Markovic F.Voldoire EDF-R&D/AMA	Texte initial
9.5	S.Fayolle EDF-R&D/AMA	Introduction de DEFI_GLRC, réécriture des équations, reformulations de certaines phrases,...
10.2	S.Fayolle EDF-R&D/AMA	Nettoyage et mise en cohérence avec GLRC_DM

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)