Modèle d'endommagement de MAZARS

Résumé :

Cette documentation présente le modèle de comportement de MAZARS qui permet de décrire le comportement élastique-endommageable du béton. Ce modèle est 3D, isotrope et s'appuie sur un critère d'endommagement écrit en déformation et décrivant la dissymétrie traction-compression. Le modèle initial, ne rend pas compte de la restauration de rigidité en cas de « refermeture des fissures » et ne prend pas en compte les éventuelles déformations plastiques ou effets visqueux qui peuvent être observés au cours des déformations d'un béton. La version implémentée dans Code_Aster tient compte des dernières améliorations. Cette reformulation du modèle Mazars des années 1980 permet de mieux décrire le comportement du béton en bi-compression et en cisaillement pur.
La version 1D du modèle permet de rendre compte de la restauration de rigidité en cas de refermeture des fissures, elle est seulement utilisée avec les poutres multifibres [R5.03.09].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
1.1 Une loi de comportement élasto-endommageable....3
1.2 Limites et méthodes de régularisation....3
1.3 Couplage avec la thermique....3
1.4 Loi de Mazars en présence d'un champ de séchage ou d'hydratation....4
2 Les modèles de MAZARS....5
2.1 Modèle d'Origine de Mazars....5
2.2 Modèle Revisité de Mazars....6
3 Identification....10
4 Résolution numérique....12
4.1 Évaluation de la variable interne Y....12
4.2 Évaluation de l'endommagement....12
4.3 Calcul de la contrainte....12
4.4 Calcul de la matrice tangente....12
4.5 Variables internes stockées....13
5 Fonctionnalités et vérification....13
6 Bibliographie....14
7 Historique des versions du document....14

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

1.1 Une loi de comportement élasto-endommageable

Le modèle de comportement MAZARS 1] est un modèle simple, réputé robuste, basé sur la mécanique de l'endommagement [bib2] , qui permet de décrire la diminution de la rigidité du matériau sous l'effet de la création de micro-fissures dans le béton. Il s'appuie sur une seule variable interne scalaire D décrivant l'endommagement de façon isotrope, mais distinguant malgré tout l'endommagement de traction et l'endommagement de compression. **La version implémentée sous Aster correspond à la reformulation de 2012** [bib3] . La modification majeure par rapport au modèle d'origine 1] est l'introduction d'une nouvelle variable interne, notée Y, correspondant au maximum atteint lors du chargement par la déformation équivalente définie dans les années 1980. De ce fait, l'endommagement n'est plus la variable interne dans le modèle revisité. De plus, sa loi d'évolution est simplifiée afin d'éliminer les notions d'endommagement de traction et de compression.

Contrairement au modèle ENDO_ISOT_BETON, ce modèle ne permet pas de traduire le phénomène de refermeture des fissures (restauration de rigidité). Par ailleurs, le modèle de MAZARS ne prend pas en compte les éventuelles déformations plastiques ou effets visqueux qui peuvent être observés au cours des déformations d'un béton.

La version $1\mathrm{D}$ du modèle de MAZARS est décrite dans le document [R5.03.09] "Relations de comportement non-linéaires". Dans ce cas spécifique, le modèle est capable de rendre compte du phénomène de refermeture des fissures. La version $1\mathrm{D}$ du modèle, n'est utilisable qu'avec les poutres multi-fibres.

1.2 Limites et méthodes de régularisation

Comme toutes les lois adoucissantes, le modèle de MAZARS pose des difficultés liées au phénomène de localisation des déformations.

Physiquement, l'hétérogénéité de la micro-structure du béton induit des interactions à distance entre les fissures formées 4]. Ainsi, les déformations se localisent dans une bande mince, appelée bande de localisation, pour former les macro-fissures. L'état des contraintes en un point matériel ne peut plus être uniquement décrit par les caractéristiques au point mais doit aussi prendre en considération son environnement. Dans le cas de ce modèle (local), aucune indication n'est incluse concernant l'échelle de la fissuration. Par conséquent, aucune information n'est donnée sur la largeur de la bande de localisation qui devient alors nulle. Ceci aboutit à un comportement mécanique avec rupture sans dissipation d'énergie, physiquement inacceptable.

Mathématiquement, la localisation rend le problème à résoudre mal posé car l'adoucissement cause une perte d'ellipticité des équations différentielles qui décrivent le processus de déformations 5]. Les solutions numériques ne convergent pas vers des solutions physiquement acceptables malgré les raffinements de maillage.

1.3 Couplage avec la thermique

Pour certaines études, il peut être intéressant de pouvoir prendre en compte la modification des paramètres matériaux sous l'effet de la température. Ceci est possible dans *Aster* (MAZARS_FO combiné ou non avec ELAS_FO). Les hypothèses faites pour le couplage avec la thermique sont les suivantes :

- la dilatation thermique est supposée linéaire soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha\left(T - T_{ref}\right)\mathbf{I_d} \qquad \textbf{(éq 1.3-1)}$$

avec α = constante ou fonction de la température,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- on ne prend pas en compte d'interactions thermo-mécaniques, c'est-à-dire qu'on ne modélise pas l'effet de l'état de contrainte mécanique sur la déformation thermique du béton,
- concernant l'évolution des paramètres matériaux avec la température, on considère que ceux-ci dépendent non pas de la température courante mais de la température maximale $Tmax$ vue par le matériau au cours de son histoire, (effet cité dans la littérature),
- seule la déformation élastique (mécanique) induit de l'endommagement.

Remarque :
En raison de contraintes informatiques, la valeur initiale de $Tmax$ est initialisée à 0. En conséquence, on ne peut pas utiliser les paramètres matériaux définis pour des températures négatives (si nécessaire, on peut toutefois contourner ce problème en rentrant toutes les températures en Kelvin au lieu de $°C$).

1.4 Loi de Mazars en présence d'un champ de séchage ou d'hydratation

L'utilisation de ELAS_FO et/ou MAZARS_FO sous l'opérateur DEFI_MATERIAU permet de faire dépendre les paramètres matériaux du séchage ou de l'hydratation.
Par ailleurs, les déformations liées aux retrait de endogène ε_{re} et au retrait dessiccation ε_{rd} sont prises en compte dans le modèle, sous la forme (linéaire) suivante (cf. [R7.01.12]) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{re} = -\beta \xi \mathbf{I}_{\mathbf{d}} \quad \textbf{(éq 1.4-1)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{rd} = -\kappa (C_{ref} - C) \mathbf{I}_{\mathbf{d}} \quad \textbf{(éq 1.4-2)}$$

où ξ est l'hydratation, C la concentration en eau (champ de séchage dans la terminologie *Code_Aster*), C_{ref} la concentration en eau initiale (ou séchage de référence). Enfin β est le coefficient de retrait endogène et κ le coefficient de retrait de dessiccation à renseigner dans DEFI_MATERIAU, mot-clé facteur ELAS_FO, opérandes B_ENDO et K_DESSIC. Comme on l'a dit au paragraphe précédent, le choix qui a été fait dans l'implantation du modèle de MAZARS, c'est que seule la déformation élastique induit de l'endommagement. En conséquence, si on modélise une éprouvette en béton qui sèche ou qui s'hydrate librement et uniformément, on obtiendra bien un champ de déformation non nul et un champ de contrainte parfaitement nul.

On présente dans un premier temps l'écriture du modèle puis quelques données sur l'identification des paramètres. Pour finir, on expose les principes de l'intégration numérique dans *Code_Aster*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Les modèles de MAZARS

2.1 Modèle d'Origine de Mazars

Le modèle de MAZARS a été élaboré dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. Ce modèle est détaillé dans la thèse de MAZARS 1]
La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-D)\,\mathbf{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{e} \qquad \textbf{(éq 2.1-1)}$$

avec :

- E la matrice de Hooke,
- D la variable d'endommagement
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$ la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}^{rd} - \boldsymbol{\varepsilon}^{re}$
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha\left(T - T_{ref}\right)\mathbf{I_d}$ la dilatation thermique
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{re} = -\beta\,\xi\,\mathbf{I_d}$ le retrait endogène (lié à l'hydratation)
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{rd} = -\kappa\,(C_{ref} - C)\,\mathbf{I_d}$ le retrait de dessiccation (lié au séchage)

D est la variable d'endommagement. Elle est comprise entre 0, matériaux sain, et 1, matériau rompu. L'endommagement est piloté par la déformation équivalente ε_{eq} qui permet de traduire un état triaxial par une équivalence à un état uniaxial. Comme les extensions sont primordiales dans le phénomène de fissuration du béton, la déformation équivalente introduite est définie à partir des valeurs propres positives du tenseur des déformations, soit :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+}$$

où dans le repère principal du tenseur de déformations : **(éq 2.1-2)**

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}$$

sachant que la partie positive $\langle\,\rangle_+$ est définie de telle sorte que si ε_i est la déformation principale dans la direction i :

$$\begin{cases} \langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i & \text{si } \varepsilon_i \geq 0 \\ \langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0 & \text{si } \varepsilon_i < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(éq 2.1-3)}$$

Remarque :
Dans le cas d'un chargement thermo-mécanique, seule la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}$ contribue à l'évolution de l'endommagement d'où : $\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \rangle_+}$.

ε_{eq} est un indicateur de l'état de tension dans le matériau qui génère l'endommagement. Cette grandeur définit la surface de charge f telle que :

$$f = \varepsilon_{eq} - K(D) = 0 \qquad \textbf{(éq 2.1-4)}$$

(4)

avec $K(D) = \varepsilon_{d0}$ si $D = 0$. ε_{d0} la déformation seuil d'endommagement.
Lorsque la déformation équivalente atteint cette valeur, l'endommagement s'active. D est défini comme une combinaison de deux modes d'endommagement définis par D_t et D_c, variant entre 0 et 1 selon l'état d'endommagement associé, et correspondant respectivement à l'endommagement en traction et en compression. La relation liant ces variables est la suivante :

$$D = \alpha_t^{\beta} D_t + \alpha_c^{\beta} D_c \qquad \textbf{(éq 2.1-5)}$$

(5)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

β est un coefficient qui a été introduit ultérieurement pour améliorer le comportement en cisaillement. Usuellement sa valeur est fixée à 1.06. Les coefficients α_t et α_c réalisent un lien entre l'endommagement et l'état de traction ou de compression. Lorsque la traction est activée $\alpha_t = 1$ alors que $\alpha_t = 0$ et inversement en compression.

Une particularité de ce modèle est son écriture explicite ce qui implique que toutes les grandeurs se calculent directement sans utiliser un algorithme de linéarisation comme celui de Newton-Raphson. Ainsi, les lois d'évolution des endommagements D_t et D_c s'expriment seulement à partir de la déformation équivalente ε_{eq}

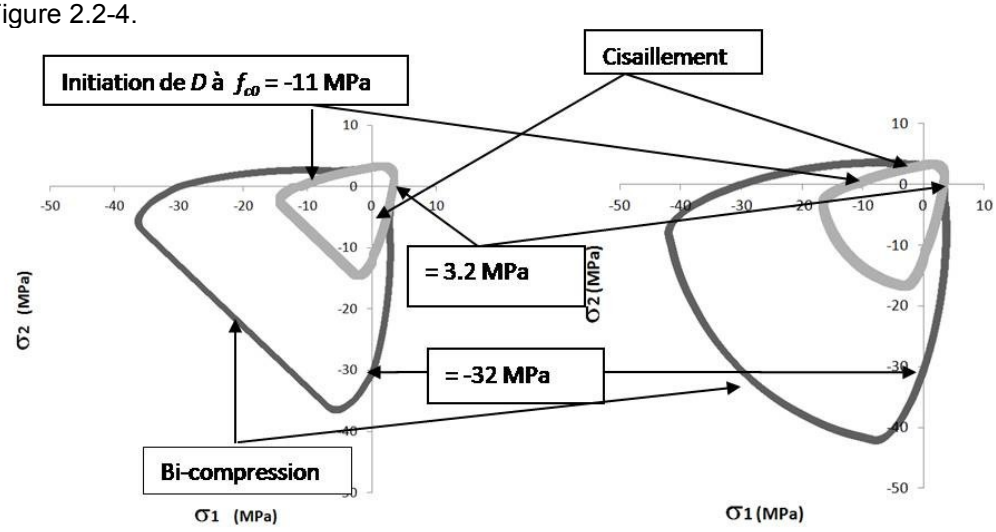
$$D_t = 1 - \frac{(1-A_t)\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} - A_t \exp\left(-B_t\left(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}\right)\right) \quad \textbf{(éq 2.1-6)}$$

$$D_c = 1 - \frac{(1-A_c)\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} - A_c \exp\left(-B_c\left(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}\right)\right) \quad \textbf{(éq 2.1-7)}$$

avec A_t, A_c, B_t, et B_c, des paramètres matériaux à identifier. Ces paramètres permettent de moduler la forme de la courbe post-pic. Ils sont obtenus à l'aide d'essais de traction et d'un essai de compression.

2.2 Modèle Revisité de Mazars

Bien que couramment employé, le modèle d'Origine de Mazars a des lacunes dans la modélisation du comportement du béton lors de chargements en cisaillement et en bi-compression. Une comparaison entre les surfaces de charge des deux modèles est donnée en Figure 2.2-4.



a) Modèle d'Origine de Mazars **b) Modèle Revisité de Mazars**

Figure 2.2-1 : Comparaison des surfaces d'initiation d'endommagement et de rupture des modèles Mazars dans le plan $\sigma_3 = 0$ et un béton C30

Ainsi, une nouvelle formulation est proposée à travers 2 modifications majeures :

1. amélioration du comportement en bi-compression,
2. simplification et amélioration du comportement en cisaillement.

Le modèle de Mazars d'origine des années 1980 1] sous-estime grandement la résistance du béton en bi-compression. La première modification apportée par le modèle Revisité améliore donc le comportement en bi-compression. Ce but est atteint en corrigeant la déformation équivalente lorsqu'au moins une contrainte principale est négative, à l'aide d'une variable γ :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\varepsilon_{eq}^{corrigée} = \gamma\, \varepsilon_{eq} = \gamma \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} \quad \textbf{(éq 2.2-1)}$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma = -\dfrac{\sqrt{\sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_-^2}}{\sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_-} & \text{si au moins une contrainte effective est négative} \\ \gamma = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(borné entre 0 et 1)} \quad \textbf{(éq 2.2-2)}$$

La contrainte effective au sens de la mécanique de l'endommagement est définie par :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{1-D} \quad \textbf{(éq 2.2-3)}$$

La définition de < > - est similaire à (éq 2.1-3) :

$$\begin{cases} \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_- = \tilde{\sigma}_i \quad \text{si} \quad \tilde{\sigma}_i \leq 0 \\ \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_- = 0 \quad \text{si} \quad \tilde{\sigma}_i > 0 \end{cases} \quad \textbf{(éq 2.2-4)}$$

où $\tilde{\sigma}_i$ est une contrainte effective principale.

L'amélioration du comportement en cisaillement est atteint par l'introduction d'une nouvelle variable interne : Y. Elle correspond au maximum atteint au cours du chargement de la déformation équivalente. Sa valeur initiale Y_0 est ε_{d0}. Y est définie par l'équation suivante :

$$Y = \max\left(\varepsilon_{d0}, \max\left(\varepsilon_{eq}^{corrigée}\right)\right) \quad \textbf{(éq 2.2-5)}$$

La fonction de charge est :

$$f = \varepsilon_{eq}^{corrigée} - Y \quad \textbf{(éq 2.2-6)}$$

L'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$D = 1 - \frac{(1-A)Y_0}{Y} - A\exp\left(-B\left(Y - Y_0\right)\right) \quad \textbf{(éq 2.2-7)}$$

Dans cette expression, ce sont les variables A et B qui permettent de reproduire le comportement quasi fragile du béton en traction et le comportement écroui en compression. Pour représenter au mieux les résultats expérimentaux, les lois d'évolution suivantes ont été choisies pour A et B :

$$A = A_t\left(2r^2(1-2k) - r(1-4k)\right) + A_c\left(2r^2 - 3r + 1\right) \quad \textbf{(éq 2.2-8)}$$

et

$$B = r^2 B_t + \left(1 - r^2\right) B_c \quad \textbf{(éq 2.2-9)}$$

où l'expression de r est :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$r=\frac{\sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_+}{\sum_i |\tilde{\sigma}_i|} \qquad \textbf{(éq 2.2-10)}$$

Il apparaît dans ces équations une nouvelle variable r qui nous renseigne sur l'état de contrainte. Lorsque r est égal à 1 (correspondant au secteur des tractions), les variables A et B sont équivalentes aux paramètres A_t et B_t . Donc, (éq 2.2-7) est identique à (éq 2.1-6) . Inversement, si r est nulle (correspondant au secteur des compressions), alors $A=A_c$, $B=B_c$ et (éq 2.2-7) est identique à (éq 2.1-7) .
La Figure 2.2-2 donne dans le plan $\sigma_3=0$ l'évolution en fonction du signe des contraintes principales des variables A , B , r et γ .

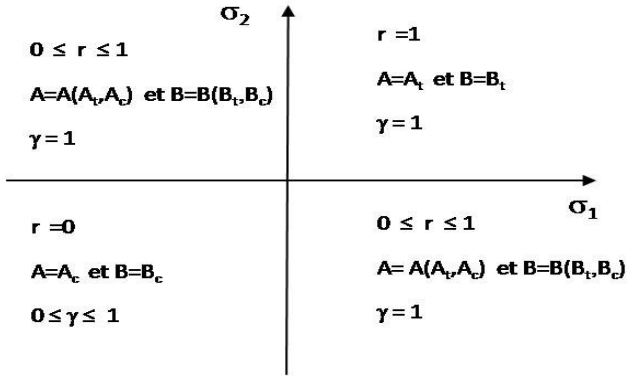


Figure 2.2-2 : Évolution des variables A , B , r et γ dans le plan $\sigma_3=0$

Dans l'équation (éq 2.1-6) un nouveau paramètre apparaît : k . Il introduit une asymptote à la courbe $\sigma-\varepsilon$ en cisaillement et il est défini par :

$$k=\frac{A_{cisaillement}}{A_t} \qquad \textbf{(éq 2.2-11)}$$

où $A_{cisaillement}$ définit la contrainte résiduelle en cisaillement pur. Il est similaire à A_t pour ce cas de chargement. La valeur conseillée pour k est de 0.7 . La valeur de k inférieure à 1 est très utile dans la modélisation des effets de friction entre le béton et les armatures dans des structures en béton armé car elle induit une contrainte de cisaillement résiduelle. Pour la valeur $k=1$ on retrouve le comportement du modèle d'Origine (Figure 2.2-3).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

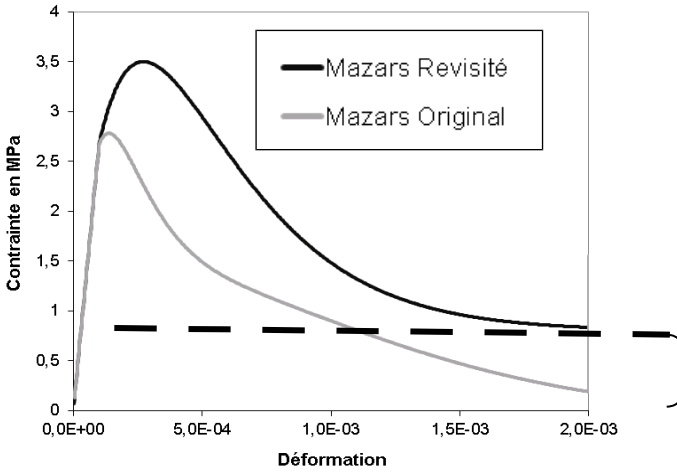


Figure 2.2-3 : Courbe contrainte-déformation lors d'un essai de cisaillement pur sur un point de Gauss

Le modèle d'Origine sous-estime la résistance du béton en cisaillement pur. Cette nouvelle formulation permet d'augmenter cette résistance en cisaillement pur passant de $2.5\,MPa$ à $3.5\,Mpa$ pour un béton C30. Cette valeur dépend de celles des paramètres matériaux entrées (A_t , A_c , B_t , et B_c).

La réponse locale du modèle Revisité de Mazars sous chargement successifs de traction compression est donnée par la Figure 2.2-4.

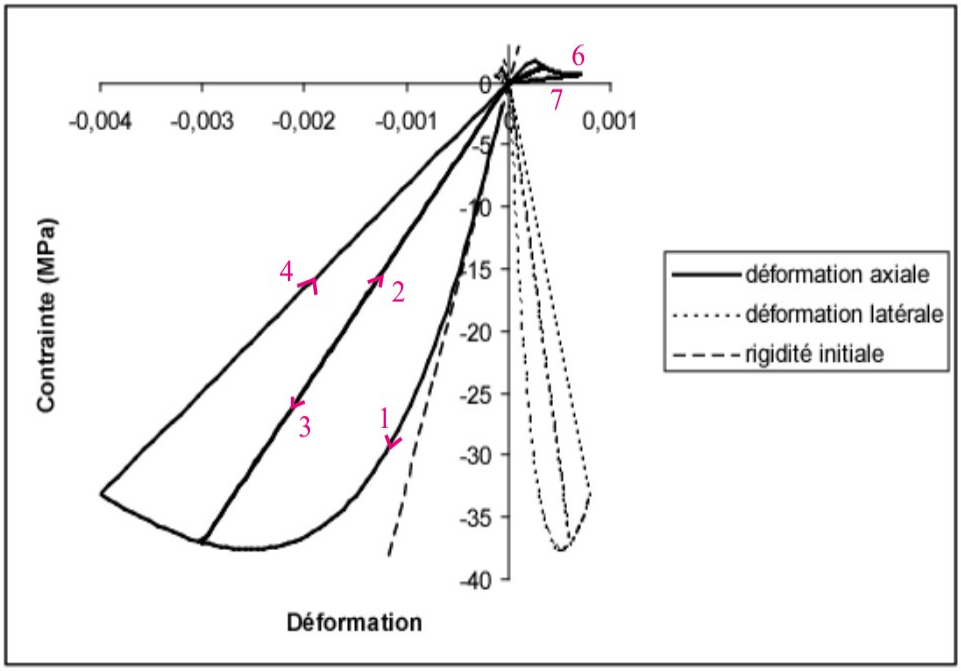


Figure 2.2-4 : Réponse contrainte-déformation du modèle de Mazars pour une sollicitation 1D.

La Figure 2.2-4 permet de visualiser un certain nombre de caractéristiques du modèle de MAZARS, à savoir :

- l'endommagement affecte la rigidité du béton,
- il n'y a pas de déformations irréversibles,
- les réponses en traction et en compression sont bien dissymétriques,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque : Les modèles Mazars d'Origine et Revisité ne prennent pas en compte le caractère unilatéral du béton à savoir la refermeture de fissure lors du passage d'un état de traction à un état de compression.

3 Identification

Outre les paramètres thermo-élastiques E, ν, α, le modèle de MAZARS Revisité fait intervenir 6 paramètres matériau : A_c, B_c, A_t, B_t, ε_{d0}, k.

- ε_{d0} est le seuil d'endommagement. Il agit évidemment sur la contrainte au pic mais également sur la forme de la courbe post-pic. En effet, la chute de contrainte est d'autant moins brutale que ε_{d0} est petit. En général ε_{d0} est compris en 0.5 et $1.5 10^{-4}$.

Les coefficients A et B permettent de moduler la forme de la courbe post-pic. Ils sont définis par les équations (éq 2.2-8) et (éq 2.2-9) qui dépendent des paramètres du modèle d'Origine de Mazars (A_t , B_t , A_c et B_c) et de r :

- A introduit une asymptote horizontale qui est l'axe des ε pour $A=1$ et l'horizontale passant par le pic pour $A=0$ (cf.[Figure 3-1]). Dans le domaine des tractions , A est équivalent à A_t (et réciproquement dans le domaine des compressions $A=A_c$). En général, A_c est compris entre 1 et 2. et A_t entre 0.7 et 1.
- B selon sa valeur peut correspondre à une chute brutale de contrainte ($B>10000$) ou une phase préliminaire d'accroissement de contrainte suivie, après passage par un maximum, d'une décroissance plus ou moins rapide comme on peut le voir sur la [Figure 3-2]. Dans le domaine des tractions , B est équivalent à B_t (et réciproquement dans le domaine des compressions $B=B_c$). En général B_c est compris entre 1000 et 2000 et B_t entre 9000 et 21000.
- k introduit une asymptote horizontale en cisaillement pur sur la courbe contrainte-déformation si sa valeur est différente de 1 pour $A_t=1$, (éq 2.2-11). La valeur conseillée est 0.7.

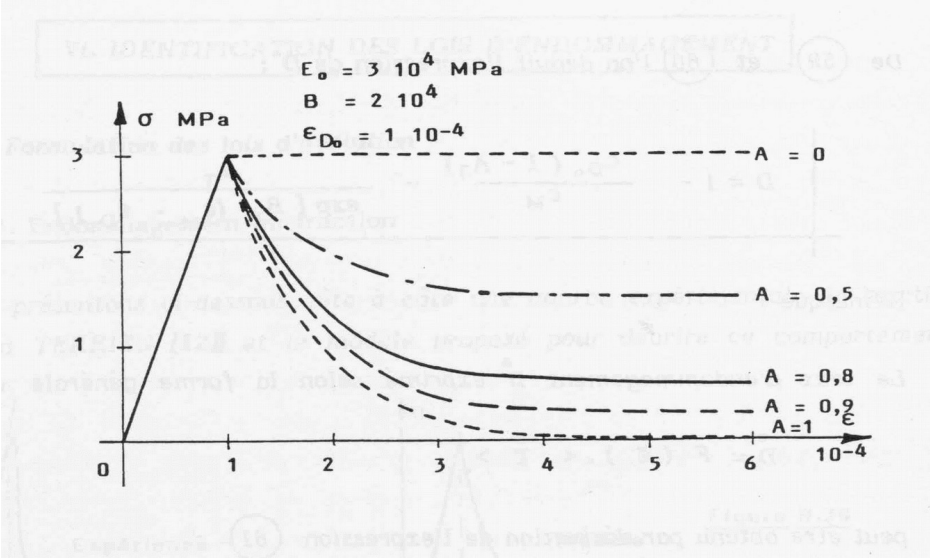


Figure 3-1: Influence du paramètre A_t

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

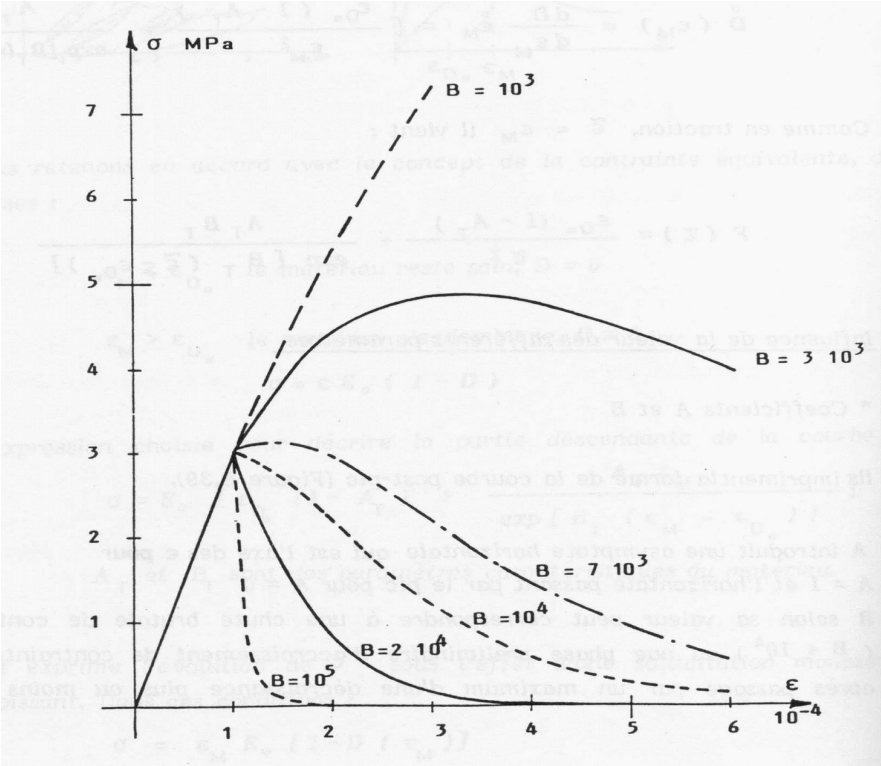


Figure 3-2: Influence du paramètre B_t

Un moyen d'obtenir un jeu de paramètres est de disposer des résultats d'essais uniaxiaux en compression et traction (pour la traction on peut utiliser autres type de tests, des essais de fendage « brésiliens » par exemple).
Si on utilise la régularisation en gradient de déformation (voir §1.2), il est recommandé de caler les paramètres de la loi au même temps de la longueur caractéristique L_c. Quelques auteurs (confer [bib7]) suggère aussi de calibrer L_c en utiliser des essais expérimentaux sur plusieurs tailles des spécimens ; en effet, la longueur caractéristique est liée à la taille de la zone de dissipation énergétique qui pourrait être à l'origine d'effet d'échelle structuraux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Résolution numérique

4.1 Évaluation de la variable interne *Y*

Le calcul de Y est très simple et suit un schéma explicite. Les étapes sont les suivantes :

- Calcul des déformations élastiques et thermiques
- Calcul des contraintes élastiques principales et évaluation de γ (éq 2.2-2).
- Calcul de la déformation équivalente ((éq 2.1-2) et (éq 2.2-1)).
- Calcul des variables r , A *et* B
- Calcul de la variable interne Y *(éq 2.2-5)*.

  Si $Y \leq Y^-$ alors $Y^+ = Y^-$.

  Si $Y > Y^-$ *alors* $Y^+ = Y$.

Remarque : Actuellement la variable stockée lors des calculs est ε_{eq} afin de ne pas modifier les couplages existants avec UMLV. Une condition sur l'évolution strictement croissante de l'endommagement permet cette simplification dans le cas où γ varie.

4.2 Évaluation de l'endommagement

L'endommagement est calculé dans tous les cas avec l'équation (éq 2.2-7).

$$D = 1 - \frac{(1-A)Y_0}{Y} - A\exp\left(-B\left(Y - Y_0\right)\right) \qquad \text{(éq 2.2-7)}$$

Il est important de préciser que nous imposons à D d'être compris entre 0 et 1 car il est possible d'avoir des valeurs en dehors cet encadrement suivant le choix des paramètres matériaux comme pour le modèle d'origine.

4.3 Calcul de la contrainte

Après évaluation de D , nous calculons simplement :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-D)\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} \qquad \textbf{(éq 4.3-1)}$$

4.4 Calcul de la matrice tangente

Un des désavantage du modèle de Mazars est l'absence de matrice tangente. Il n'est pas possible de calculer cette matrice à cause de l'utilisation de l'opérateur MacCauley dans le calcul de la déformation équivalente (éq 2.1-2), de γ (éq 2.2-2) et r . Toutefois il est possible d'utiliser une approximation lors de chargement radiaux.

Nous cherchons le tenseur $\mathbf{M}$ tel que $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sachant que $\boldsymbol{\sigma} = (1-D)\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\varepsilon}$. La matrice est donc la somme de deux termes, l'un à endommagement constant, l'autre dû à l'évolution de l'endommagement :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-D)\,\mathbf{A}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{A}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\dot{D} \qquad \textbf{(éq 4.4-1)}$$

Le premier terme est facile, il s'agit de l'opérateur de Hooke, multiplié par le facteur $1-D$.

Le deuxième nécessite l'évaluation de l'incrément d'endommagement $\dot{D}$.

Si un chargement radial est imposé, les variables γ , r , A et B sont constantes. En posant :

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial Y}\,\frac{\partial Y}{\partial\left(\gamma\,\varepsilon_{eq}\right)}\,\frac{\partial\left(\gamma\,\varepsilon_{eq}\right)}{\partial \varepsilon}\,\dot{\varepsilon} \qquad \textbf{(éq 4.4-2)}$$

Avec

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial Y}{\partial\left(\gamma \varepsilon_{eq}\right)} \frac{\partial\left(\gamma \varepsilon_{eq}\right)}{\partial \varepsilon}=\frac{\gamma\langle\varepsilon\rangle_{+}}{\varepsilon_{eq}} \quad \textbf{(éq 4.4-3)}$$

Sous cette condition de chargement radial, l'incrément de déformation s'écrit :

$$\dot{D}=\left[\frac{(1-A) Y_{0}}{Y^{2}}+AB \exp\left(B\left(Y-Y_{0}\right)\right)\right] \frac{\gamma\langle\varepsilon\rangle_{+}}{\varepsilon_{eq}} \dot{\varepsilon} \quad \textbf{(éq 4.4-4)}$$

Remarques :

1. *Étant donné les simplifications faites, dans le cas général la matrice tangente n'est pas consistante. Aussi, il peut arriver que la réactualisation de la matrice tangente au cours des itérations de Newton n'aide pas à la convergence. Dans ce cas, il suffit d'utiliser uniquement la matrice sécante en imposant* `STAT_NON_LINE(NEWTON = _F(REAC_ITER =0 ))`.
2. *Dans le cas général, la matrice tangente est non-symétrique. Il est possible de le faire grâce au mot-clé* `SOLVEUR=_F(SYME = 'OUI')` *de* `STAT_NON_LINE`.
3. *L'expression analytique de la matrice tangente n'est valide que pour des chargements radiaux ($dr=d\gamma=0$). Dans les autres cas, la convergence quadratique de la méthode n'est plus garantie.*

4.5 Variables internes stockées

Nous indiquons dans le tableau suivant les variables internes stockées en chaque point de Gauss pour le modèle de MAZARS :

Variable interne	Sens physique
V1	D : variable d'endommagement
V2	indicateur d'endommagement (0 si élastique, 1 si endommagé c'est-à-dire dès que D n'est plus nul)
V3	$Tmax$: température θ maximum atteinte au point de gauss
V4	$\varepsilon_{eq}=\sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{+}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{+}}$ la déformation équivalente

Tableau 4.5-1: Variables internes stockées.

5 Fonctionnalités et vérification

La loi de comportement MAZARS, mot-clé COMPORTEMENT de STAT_NON_LINE, matériau associé MAZARS est utilisable dans Code_Aster avec différentes modélisations :

- 3D, D_PLAN, AXIS, C_PLAN (formulation analytique implantée, ne pas utiliser la méthode DEBORST)
- couplé avec les modèles de THHM (confer [R7.01.11]).

La loi de MAZARS peut être couplée avec le modèle de fluage BETON_UMLV_FP (confer [R7.01.06]) via le mot-clé KIT_DDI.

La loi de comportement est vérifiée par les tests suivants :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

COMP007 b	[V6.07.107]	Essai de compression-dilatation pour étude du couplage thermique-fissuration
HSNV129	[V7.22.129]	Essai de compression-dilatation pour étude du couplage thermique-fissuration
SSLA103	[V3.06.103]	Calcul du retrait de dessiccation et du retrait endogène sur un cylindre
SSNP113	[V6.03.113]	Rotation des contraintes principales (loi de MAZARS)
SSNP161	[V6.03.161]	Essais biaxiaux de Kupfer
SSNV169	[V6.04.169]	Couplage fluage-endommagement
WTNV121	[V7.31.121]	Mouillage du béton avec une loi d'endommagement

Tableau 5-1 : Cas-tests existants

6 Bibliographie

[bib1] J. Mazars (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*, Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VI.

[bib2] J. Lemaitre, J.L. Chaboche (1988), *Mécanique des matériaux solides*. Ed. Dunod.

[bib3] J. Mazars, F. Hamon. *A new strategy to formulate a 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and severe loadings*. Engineering Structures, 2012, under review

[bib4] H. Askes (2000). *Advanced spatial discretisation strategies for localised failure, mesh adaptivity and meshless methods*, PhD thesis, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences.

[bib5] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, J.H.P. de Vree, I. Spee (1996). *Some observations on localisation in non local and gradient damage models*, Eur. J. Mech. A/Solids, **15(**6), 937-953.

[bib6] G. Pijaudier-Cabot, J. Mazars, J. Pulikowski (1991). *Steel-concrete bond analysis with non local continuous damage*, J. Structural Engrg ASCE, **117**, 862-882.

[bib7] C. Le Bellego, J.F. Dubé, G. Pijaudier-Cabot, B. Gerard (2003). *Calibration of nonlocal damage model from size effect tests*, Eur. J. Mech. A/Solids, **22**(1), 33-46.

7 Historique des versions du document

Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
6.4	S.MICHEL-PONNELLE	Texte initial
7.4	S.MICHEL-PONNELLE	
9.4	S.MICHEL-PONNELLE, Marina BOTTONI	Ajout du couplage UMLV-MAZARS + fiche 11150 + 4ème variable interne
11.0	Marina BOTTONI	
11.2	François HAMON	Reformulation du modèle Mazars

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)