Relation de comportement BETON_UMLV pour le fluage du béton

Résumé :

Ce document présente le modèle de fluage propre UMLV (comportement BETON_UMLV) , qui est une façon de modéliser le fluage du béton (propre et de dessiccation).

On y détaille également l'écriture et le traitement numérique du modèle. L'intégration du modèle (c'est-à-dire la mise à jour des contraintes) est réalisé suivant un schéma incrémental à partir de l'incrément de déformations totales fourni par le schéma de résolution global.

On ajoute la description du couplage entre le fluage propre et le modèle de MAZARS. L'intégration du modèle (c'est-à-dire la mise à jour des contraintes) est réalisé suivant un schéma « total » à partir des déformations totales cumulées depuis l'état initial avant chargement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Hypothèses....4
3 Description du modèle....5
3.1 Fluage propre....5
3.1.1 Description de la partie sphérique du fluage propre....5
3.1.2 Description de la partie déviatorique....6
3.2 Fluage de dessiccation....6
4 Discrétisation des équations constitutives du modèle....8
4.1 Discrétisation des équations constitutives du fluage sphérique....8
4.2 Discrétisation des équations constitutives du fluage déviatorique....11
4.3 Discrétisation des équations du fluage de dessiccation....13
5 Matrice tangente....14
6 Description des variables internes....14
7 Couplage entre BETON_UMLV et MAZARS....16
7.1 Mise en œuvre....16
7.1.1 Mise à jour des variables internes du fluage....16
7.1.2 Evolution de l'endommagement....17
7.2 Réponse en traction....18
8 Notations....19
9 Bibliographie....20
10 Fonctionnalités et vérification....21
11 Description des versions du document....22

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Dans le cadre des études du comportement à long terme de structures en béton, une part prépondérante des déformations mesurées sur structure concerne les déformations différées qui apparaissent dans le béton au cours de sa vie. Elles comportent les retraits au jeune âge, le retrait de dessiccation, le fluage propre et le fluage de dessiccation.

Le modèle présenté ici est dédié à la modélisation de la déformation différée associée au fluage, propre et de dessiccation. Le fluage propre est, en complément du fluage de dessiccation, la part de fluage du béton qu'on observerait lors d'un essai sans échange d'eau avec l'extérieur. Expérimentalement le béton en fluage présente un comportement viscoélastique vieillissant. La déformation de fluage observée est proportionnelle à la contrainte de chargement, dépend de la température et de l'hygrométrie. L'aspect vieillissant et la dépendance à la température ne sont pas pris en compte par cette loi.

Fluage propre. Le premier modèle de fluage des bétons introduit précedemment dans Code_Aster (voir par exemple [R7.01.01] et [bib4]) a été développé dans l'optique de prédire les déformations longitudinales de fluage sous des contraintes uniaxiales. La généralisation de ce modèle, afin de prendre en compte un état de contraintes multiaxiales, se fait alors par l'intermédiaire d'un coefficient de Poisson de fluage arbitraire, constant et égal, ou proche, du coefficient de Poisson élastique. Or, la détermination *a posteriori* du coefficient de Poisson de fluage effectif montre sa dépendance vis-à-vis du chemin de chargement. Par ailleurs, le béton de certains ouvrages du Parc EDF, telles les enceintes de confinement de réacteur nucléaire, est soumis à un état de contraintes biaxiales. Ce constat a conduit à la mise au point de la loi de déformations de fluage propre UMLV (Université de Marne-la-Vallée, partenaire dans le développement de ce modèle) pour laquelle le coefficient de Poisson de fluage est une conséquence directe du calcul des déformations principales.

Fluage de dessiccation. Le modèle proposé ici est celui de Bazant [bib6]. C'est une loi purement visqueuse.

Dans *Code_Aster*, le modèle de fluage présenté ici est utilisé sous le nom de `BETON_UMLV`.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Hypothèses

Hypothèse 1 (H.P.P.)
Le loi est écrite dans le cadre des petites perturbations.

Hypothèse 2 (partition des déformations)
En petites déformations, le tenseur des déformations totales est décomposé en plusieurs termes relatifs aux processus considérés. S'agissant de la description des différents mécanismes de déformations différées des bétons, on admet que la déformation totale s'écrive :

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon^{e}}_{\substack{\text{déformation}\\ \text{élastique}}} + \underbrace{\varepsilon^{fp}}_{\substack{\text{fluage}\\ \text{propre}}} + \underbrace{\varepsilon^{fdess}}_{\substack{\text{fluage de}\\ \text{dessiccation}}} + \underbrace{\varepsilon^{\Re}}_{\substack{\text{retrait}\\ \text{endogène}}} + \underbrace{\varepsilon^{rd}}_{\substack{\text{retrait de}\\ \text{dessiccation}}} + \underbrace{\varepsilon^{th}}_{\substack{\text{déformation}\\ \text{thermique}}} \qquad \text{éq 2-1}$$

Dans ce document, on ne décrit pas la prise en compte des différents types de retraits (pour cela, voir la documentation de *Code_Aster* [R7.01.12]), de sorte que [éq 2-1] se réduise à :

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{fp} + \varepsilon^{fdess} \qquad \text{éq 2-2}$$

Hypothèse 3 (décomposition des composantes de fluage)

De façon générale, le fluage propre peut être modélisé en combinant le comportement élastique du solide et le comportement visqueux du fluide. Pour la loi présentée, le fluage propre est décrit comme la combinaison du comportement élastique des hydrates et des granulats et du comportement visqueux de l'eau.
Dans le cas du modèle BETON_BURGER, on effectue l'hypothèse que le fluage propre puisse être décomposé en un processus découplant une partie sphérique et une partie déviatorique. Le tenseur des déformations totales de fluage propre s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fp} = \underbrace{\varepsilon^{fs}\cdot\underline{\underline{1}}}_{\substack{\text{partie}\\ \text{sphérique}}} + \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}}_{\substack{\text{partie}\\ \text{déviatorique}}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon^{fs} = \frac{1}{3}\cdot tr\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{fp} \qquad \text{éq 2-3}$$

Le tenseur des contraintes peut être développé suivant une forme similaire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\sigma^{s}\cdot\underline{\underline{1}}}_{\substack{\text{partie}\\ \text{sphérique}}} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^{d}}_{\substack{\text{partie}\\ \text{déviatorique}}} \qquad \text{éq 2-4}$$

Le modèle BETON_BURGER suppose un découplage total entre les composantes sphériques et déviatoriques du fluage propre : les déformations induites par les contraintes sphériques sont purement sphériques et les déformations induites par les contraintes déviatoriques sont purement déviatoriques. En revanche, les déformations visqueuses cumulées ont un effet sur les propriétés visqueuses du fluide, quelque soit sa provenance (sphérique ou déviatorique). Pour tenir compte de l'effet de l'humidité interne, les déformations sont multipliées par l'humidité relative interne :

$$\varepsilon^{s} = h\cdot f\left(\sigma^{s}\right) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{d} = h\cdot f\left(\underline{\underline{\sigma}}^{d}\right) \qquad \text{éq 2-5}$$

Ou h désigne l'humidité relative interne.
La condition [éq 2-5] permet de vérifier a posteriori que les déformations de fluage propre sont proportionnelles à l'humidité relative.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Description du modèle

3.1 Fluage propre

3.1.1 Description de la partie sphérique du fluage propre

Les contraintes sphériques sont à l'origine de la migration de l'eau adsorbée aux interfaces entre les hydrates au niveau de la macro-porosité et absorbée au sein de la micro-porosité dans la porosité capillaire. La diffusion de l'eau inter-lamellaire des pores d'hydrates vers la porosité capillaire s'effectue de façon irréversible. La déformation sphérique totale de fluage s'écrit donc comme la somme d'une partie réversible et d'une partie irréversible :

$$\varepsilon^{fs} = \underbrace{\varepsilon_r^{fs}}_{\substack{partie \\ réversible}} + \underbrace{\varepsilon_i^{fs}}_{\substack{partie \\ irréversible}} \qquad \text{éq 3.1.1-1}$$

Le processus de déformation sphérique du fluage est gouverné par le système d'équations couplées suivant (équations [éq 3.1.1-2] et [éq 3.1.1-3]) :

$$\dot{\varepsilon}^{fs} = \frac{1}{\eta_r^s} \cdot \left[h \cdot \sigma^s - k_r^s \cdot \varepsilon_r^{fs} \right] - \dot{\varepsilon}_i^{fs} \qquad \text{éq 3.1.1-2}$$

où k_r^s désigne la rigidité apparente associée au squelette formé par des blocs d'hydrates à l'échelle mésoscopique ;

et η_r^s la viscosité apparente associée au mécanisme de diffusion au sein de la porosité capillaire.

$$\dot{\varepsilon}_i^{fs} = \frac{1}{\eta_i^s} \left\langle \left[k_r^s \cdot \varepsilon^{fs} - \left(k_r^s + k_i^s \right) \cdot \varepsilon_i^{fs} \right] - \left[h\sigma^s - k_r^s \cdot \varepsilon_r^{fs} \right] \right\rangle^+ \qquad \text{éq 3.1.1-3}$$

où k_i^s désigne la rigidité apparente associée intrinsèquement aux hydrates à l'échelle microscopique ;

et η_i^s la viscosité apparente associée au mécanisme de diffusion inter-foliaire.

Dans [éq 3.1.1-3], les crochets $\langle \rangle^+$ désignent l'opérateur de Mac Cauley : $\langle x \rangle^+ = \frac{1}{2}(x + |x|)$

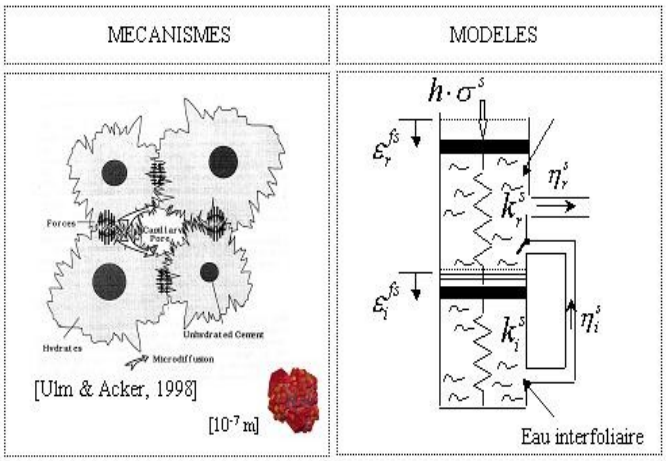


Figure 3.1.1-1 :Modèle phénoménologique associé à la partie sphérique du fluage propre

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1.2 Description de la partie déviatorique

Les contraintes déviatoriques sont à l'origine d'un mécanisme de glissement (ou mécanisme de quasi-dislocation) des feuillets de CSH dans la nano-porosité. Sous contrainte déviatorique, le fluage s'effectue à volume constant. Par ailleurs, la loi de fluage UMLV suppose l'isotropie du fluage déviatorique. Phénoménologiquement, le mécanisme de glissement comporte une contribution réversible viscoélastique de l'eau fortement adsorbée aux feuillets de CSH et une contribution irréversible visqueuse de l'eau libre :

$$\underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}}_{\substack{\text{déformation}\\ \text{déviatorique}\\ \text{totale}}} = \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}_r^{fd}}_{\substack{\text{contribution}\\ \text{eau}\\ \text{absobée}}} + \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{fd}}_{\substack{\text{contribution}\\ \text{eau}\\ \text{libre}}} \qquad \text{éq 3.1.2-1}$$

La $j^{ème}$ composante principale de la déformation déviatorique totale est régie par les équations [éq. 3.1.2-2] et [éq 3.1.2-3] :

- $\eta_r^d \dot{\varepsilon}_r^{d,j} + k_r^d \varepsilon_r^{d,j} = h \cdot \sigma^{d,j}$ éq 3.1.2-2
- $\eta_i^d \dot{\varepsilon}_i^{d,j} = h \cdot \sigma^{d,j}$ éq 3.1.2-3

où k_r^d désigne la rigidité associée à la capacité de l'eau adsorbée à transmettre des charges (load bearing water), η_r^d la viscosité associée à l'eau adsorbée par les feuillets d'hydrates et η_i^d désigne la viscosité de l'eau libre.

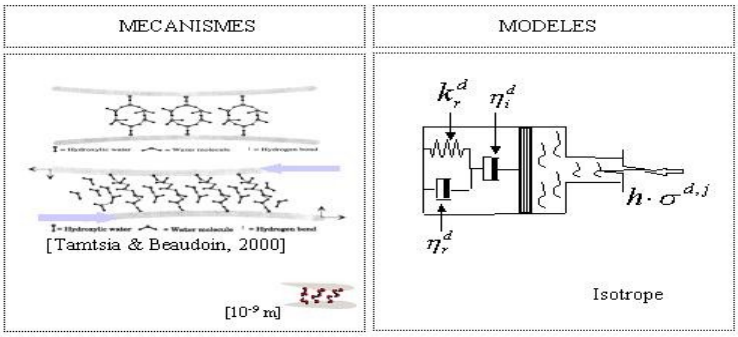


Figure 3.1.2-1: Modèle phénoménologique associé à la partie déviatorique du fluage propre.

3.2 Fluage de dessiccation

On suppose de pouvoir décomposer le fluage de dessiccation $\Delta\varepsilon^{fdess}$ en deux parties appellées intrinsèque et structurale [bib4] :

$$\Delta\varepsilon^{fdess} = \Delta\varepsilon_{int}^{fdess} + \Delta\varepsilon_{struct}^{fdess} \qquad \text{éq 3.2-1}$$

Il est convenu que la déformation structurale n'est pas une composante de déformation en soi, donc dans ce document la seule composante du fluage de dessiccation concerne la partie intrinsèque :

$$\Delta\varepsilon^{fdess} = \Delta\varepsilon_{int}^{fdess} \qquad \text{éq 3.2-2}$$

Bazant et al. [bib10] suggèrent que le séchage et l'application d'un chargement en compression simultanément sont responsables de la micro-diffusion des molécules entre les macro-pores et les micro-

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

pores. La micro-diffusion des molécules d'eau favoriserait la rupture des liaisons entre les particules de gel induisant la déformation de fluage de dessiccation. C'est un des phénomènes physico-chimiques les plus compliqués à modéliser résultant d'un couplage entre la contrainte, le fluage propre et le séchage. Ils proposent l'équation suivante (équation d'un amortisseur) pour prendre en compte le fluage de dessiccation (intrinsèque) au niveau élémentaire :

$$\dot{\varepsilon}^{fdess} = \frac{|\dot{h}|\sigma}{\eta^{fd}} \qquad \text{éq 3.2-3}$$

avec :

- ε^{fdess}, la déformation du fluage de dessiccation,
- η^{fd} un paramètre matériau (en $[Pa \cdot sec]$ dans le S.I.),
- h, l'humidité relative qui évolue dans le temps, donnée du problème d'évolution.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Discrétisation des équations constitutives du modèle

4.1 Discrétisation des équations constitutives du fluage sphérique

On effectue une linéarisation au premier ordre du produit des contraintes et de l'humidité :

$$\sigma(t)\cdot h(t)\approx\sigma_n\cdot h_n+\frac{t-t_n}{\Delta t_n}\left(\Delta\sigma_n\cdot h_n+\sigma_n\cdot\Delta h_n\right) \qquad \text{éq 4.1-1}$$

Après discrétisation des contraintes et de l'humidité relative par des fonctions affines, la déformation sphérique de fluage propre est discrétisée par l'équation suivante :

$$\Delta\varepsilon_n^{fs}=a_n^s+b_n^s\cdot\sigma_n^s+c_n^s\cdot\sigma_{n+1}^s\Leftrightarrow\Delta\left(tr\ \underline{\underline{\varepsilon}}^f\right)=3a_n^s+b_n^s\cdot tr\ \underline{\underline{\sigma}}_n+c_n^s\cdot tr\ \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \qquad \text{éq 4.1-2}$$

où σ_n^s et σ_{n+1}^s sont les contraintes sphériques au début et à la fin du pas de temps courant.

Il faut distinguer deux cas de figures selon que la déformation irréversible doit être prise en compte ou pas.

1er cas : la déformation de fluage sphérique irréversible n'est pas prise en compte, l'équation [éq 4.1-2] peut se mettre sous la forme (chaîne de Kelvin simple) :

$$\eta_r^s\dot{\varepsilon}_r^{fs}(t)+k_r^s\varepsilon_r^{fs}(t)=h(t)\sigma_r^s(t) \qquad \text{éq 4.1-3}$$

Après discrétisation, l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\Delta\varepsilon_{r,n}^{fs}=a_{r,n}^s+b_{r,n}^s\cdot\sigma_n^s+c_{r,n}^s\cdot\sigma_{n+1}^s \qquad \text{éq 4.1-4}$$

Avec :

$$\begin{cases} a_{r,n}^s=\left[\exp\left(-\dfrac{\Delta t_n}{\tau_r^s}\right)-1\right]\cdot\varepsilon_{r,n}^{fs} \\ b_{r,n}^s=\dfrac{1}{k_r^s}\left\{\left[-\left(\dfrac{2\tau_r^s}{\Delta t_n}+1\right)h_n+\dfrac{\tau_r^s}{\Delta t_n}h_{n+1}\right]\exp\left(-\dfrac{\Delta t_n}{\tau_r^s}\right)+\left[\left(\dfrac{2\tau_r^s}{\Delta t_n}-1\right)h_n-\dfrac{\tau_r^s-\Delta t_n}{\Delta t_n}h_{n+1}\right]\right\} \\ c_{r,n}^s=\dfrac{1}{k_r^s}\left[\dfrac{\tau_r^s}{\Delta t_n}\exp\left(-\dfrac{\Delta t_n}{\tau_r^s}\right)h_n-\dfrac{\tau_r^s-\Delta t_n}{\Delta t_n}h_n\right] \end{cases} \qquad \text{éq 4.1-5}$$

La déformation irréversible, quant à elle, ne varie pas :

$$\Delta\varepsilon_{i,n}^{fs}=0\Rightarrow\begin{cases} a_{i,n}^s=0 \\ b_{i,n}^s=0 \\ c_{i,n}^s=0 \end{cases} \qquad \text{éq 4.1-6}$$

2nd cas : la déformation de fluage sphérique irréversible doit être prise en compte.
A l'aide de la linéarisation [éq 4.1-1],], le système d'équations couplées s'écrit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r^{fs}(t)+2\,\dot{\varepsilon}_i^{fs}(t)=\dfrac{1}{\eta_r^s}\left[\sigma_n\cdot h_n+\dfrac{t-t_n}{\Delta t_n}\left(\Delta\sigma_n\cdot h_n+\sigma_n\cdot\Delta h_n\right)-k_r^s\varepsilon_r^{fs}(t)\right] \\ \dot{\varepsilon}_i^{fs}(t)=-\dfrac{1}{\eta_i^s}\left(-2\mathrm{k}_r^s\varepsilon_r^{fs}(t)+k_i^s\varepsilon_i^{fs}(t)+\sigma_n\cdot h_n+\dfrac{t-t_n}{\Delta t_n}\left(\Delta\sigma_n\cdot h_n+\sigma_n\cdot\Delta h_n\right)\right) \end{cases}$$ éq 4.1-7

Ce système peut se mettre sous la forme :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{fs}(t)=\begin{bmatrix}\dot{\varepsilon}_r^{fs}(t)\\ \dot{\varepsilon}_i^{fs}(t)\end{bmatrix}=\underline{\underline{A}}:\underline{\varepsilon}_r^{fs}(t)+\underline{b}+\left(t-t_n\right)\underline{c}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{\varepsilon}_r^{fs}(t)=a_{rr}^s\varepsilon_r^{fs}(t)+a_{ri}^s\varepsilon_i^s(t)+b_r^s+c_r^s\left(t-t_n\right)\\ \dot{\varepsilon}_i^{fs}(t)=a_{ir}^s\varepsilon_r^{fs}(t)+a_{ii}^s\varepsilon_i^s(t)+b_i^s+c_i^s\left(t-t_n\right)\end{cases}$$ éq 4.1-8

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{b}$ et $\underline{c}$ sont définis comme suit :

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}a_{rr}^s & a_{ri}^s\\ a_{ir}^s & a_{ii}^s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{k_r^s}{\eta_r^s}-4\dfrac{k_r^s}{\eta_i^s} & 2\dfrac{k_i^s}{\eta_i^s}\\ 2\dfrac{k_r^s}{\eta_i^s} & -\dfrac{k_i^s}{\eta_i^s}\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}=\begin{bmatrix}b_r^s\\ b_i^s\end{bmatrix}=\sigma_n\cdot h_n\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\eta_r^s}+\dfrac{2}{\eta_i^s}\\ -\dfrac{1}{\eta_i^s}\end{bmatrix}$$ éq 4.1-9

$$\underline{c}=\begin{bmatrix}c_r^s\\ c_i^s\end{bmatrix}=\frac{\Delta\sigma_n\cdot h_n+\sigma_n\cdot\Delta h_n}{\Delta t_n}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\eta_r^s}+\dfrac{2}{\eta_i^s}\\ -\dfrac{1}{\eta_i^s}\end{bmatrix}$$

Le système d'équations précédent peut être découplé et résolu dans l'espace des vecteurs propres. Le système d'équations s'écrit en effet :

$$\dot{\varepsilon}_k^*(t)=\lambda_k\,\varepsilon_k^*(t)+b_k^*+c_k^*\left(t-t_n\right)\ \text{avec}\ \dot{\underline{\varepsilon}}^*=\begin{bmatrix}\dot{\varepsilon}_1^*\\ \dot{\varepsilon}_2^*\end{bmatrix}=\underline{\underline{P}}^{-1}\cdot\dot{\underline{\varepsilon}}$$ éq 4.1-10

Ainsi, dans l'espace des vecteurs propres, le modèle de fluage devient équivalent à une double chaîne de Kelvin. Il est nécessaire de connaître la solution de l'équation homogène (sans second membre), ainsi qu'une solution particulière afin de résoudre l'équation différentielle précédente. La solution homogène de chacune des deux équations est la suivante :

$$\varepsilon_k^*(t)=\mu_k\,e^{\lambda_k\cdot t}$$ éq 4.1-11

où μ_k est un paramètre dépendant de la condition initiale. Une solution particulière est obtenue par la méthode de variation de la constante ($\mu_k=\mu_k(t)$. On obtient alors les solutions suivantes :

$$\varepsilon_k^*(t)=\mu_k\,e^{\lambda_k\cdot t}-\frac{1}{\lambda_k}\left[b_k^*+c_k^*\left(t-t_n+\frac{1}{\lambda_k}\right)\right]$$ éq 4.1-12

Les déformations de fluage sphériques réversible et irréversible sont alors égales à :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{fs}(t_{n+1}) = \dfrac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_r^s} + \left(x_1 \mu_1 e^{\lambda_1 t_{n+1}} + \mu_2 e^{\lambda_2 t_{n+1}} \right) \\ \varepsilon_i^{fs}(t_{n+1}) = \dfrac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_i^s} + \left(\mu_1 e^{\lambda_1 t_{n+1}} + x_2 \mu_2 e^{\lambda_2 t_{n+1}} \right) \end{cases}$$ éq 4.1-13

Après simplification, on obtient alors les expressions suivantes pour les valeurs de μ_k :

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{1}{\left(x_1 \cdot x_2 - 1\right) e^{\lambda_1 t_n}} \left[x_2 \left(\varepsilon_r^{fs}(t_n) - \dfrac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_r^s} \right) - \left(\varepsilon_i^{fs}(t_n) - \dfrac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_i^s} \right) \right] \\ \mu_2 = \dfrac{1}{\left(x_1 \cdot x_2 - 1\right) e^{\lambda_2 t_n}} \left[- \left(\varepsilon_r^{fs}(t_n) - \dfrac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_r^s} \right) + x_1 \left(\varepsilon_i^{fs}(t_n) - \dfrac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_i^s} \right) \right] \end{cases}$$ éq 4.1-14

L'équation [éq 4.1-2] peut donc se mettre sous la forme, après discrétisation :

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_{r,n}^{fs} = a_{r,n}^s + b_{r,n}^s \cdot \sigma_n^s + c_{i,n}^s \cdot \sigma_{n+1}^s \\ \Delta \varepsilon_{i,n}^{fs} = a_{i,n}^s + b_{i,n}^s \cdot \sigma_n^s + c_{i,n}^s \cdot \sigma_{n+1}^s \end{cases}$$ éq 4.1-15

Avec :

$$\begin{cases} a_{r,n}^s = \left[\dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} - 1 \right] \cdot \varepsilon_{r,n}^{fs} - x_1 \cdot \left[\dfrac{e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] \cdot \max_{k \le n} \left(\varepsilon_{i,k}^{fs} \right) \\ b_{r,n}^s = \dfrac{\Delta h_n}{k_r^s} \cdot \left[\dfrac{-x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_1 \Delta t_n} + e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} + 1 \right] + \dfrac{\Delta h_n}{k_i^s} \cdot x_1 \cdot \left[\dfrac{e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] \\ c_{r,n}^s = \dfrac{h_n}{k_r^s} \cdot \left[\dfrac{-x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_1 \Delta t_n} + e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} + 1 \right] + \dfrac{h_n}{k_i^s} \cdot x_1 \cdot \left[\dfrac{e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] \end{cases}$$ éq 4.1-16

$$\begin{cases} a_{i,n}^s = x_2 \cdot \left[\dfrac{e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] \cdot \varepsilon_{r,n}^{fs} + \left[\dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_2 \Delta t_n} - e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} - 1 \right] \cdot \max_{k \le n} \left(\varepsilon_{i,k}^{fs} \right) \\ b_{i,n}^s = \dfrac{\Delta h_n}{k_r^s} \cdot x_2 \cdot \left[\dfrac{e^{\lambda_2 \Delta t_n} - e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] + \dfrac{\Delta h_n}{k_i^s} \cdot \left[\dfrac{-x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_2 \Delta t_n} + e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} + 1 \right] \\ c_{i,n}^s = \dfrac{h_n}{k_r^s} \cdot x_2 \cdot \left[\dfrac{e^{\lambda_2 \Delta t_n} - e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] + \dfrac{h_n}{k_i^s} \cdot \left[\dfrac{-x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_2 \Delta t_n} + e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} + 1 \right] \end{cases}$$ éq 4.1-17

Dans les équations [éq 4.1-16] et [éq 4.1-17] les paramètres λ_1, λ_2, x_1 et x_2 sont fonction des paramètres intrinsèques du matériau. A chaque pas de calcul, il est nécessaire de sauvegarder **deux variables internes** $\varepsilon_{r,n}^{fs}$, la dernière déformation sphérique réversible obtenue et $\max_{k \le n} \left(\varepsilon_{i,k}^{fs} \right)$, c'est-à-dire $\varepsilon_{i,n}^{fs}$, la plus grande déformation sphérique réversible obtenue dans l'histoire de l'élément. Le choix de retenir les expressions [éq 4.1-5] et [éq 4.1-6] (pas de déformation irréversibles), ou les expressions

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

[éq 4.1-16] et [éq 4.1-17] (existence de déformations irréversibles) pour déterminer l'incrément de déformation sphérique totale est effectuée *a posteriori* en fonction du signe de $\Delta\varepsilon_{i,n}^{fs}$ dans [éq 4.1-15].

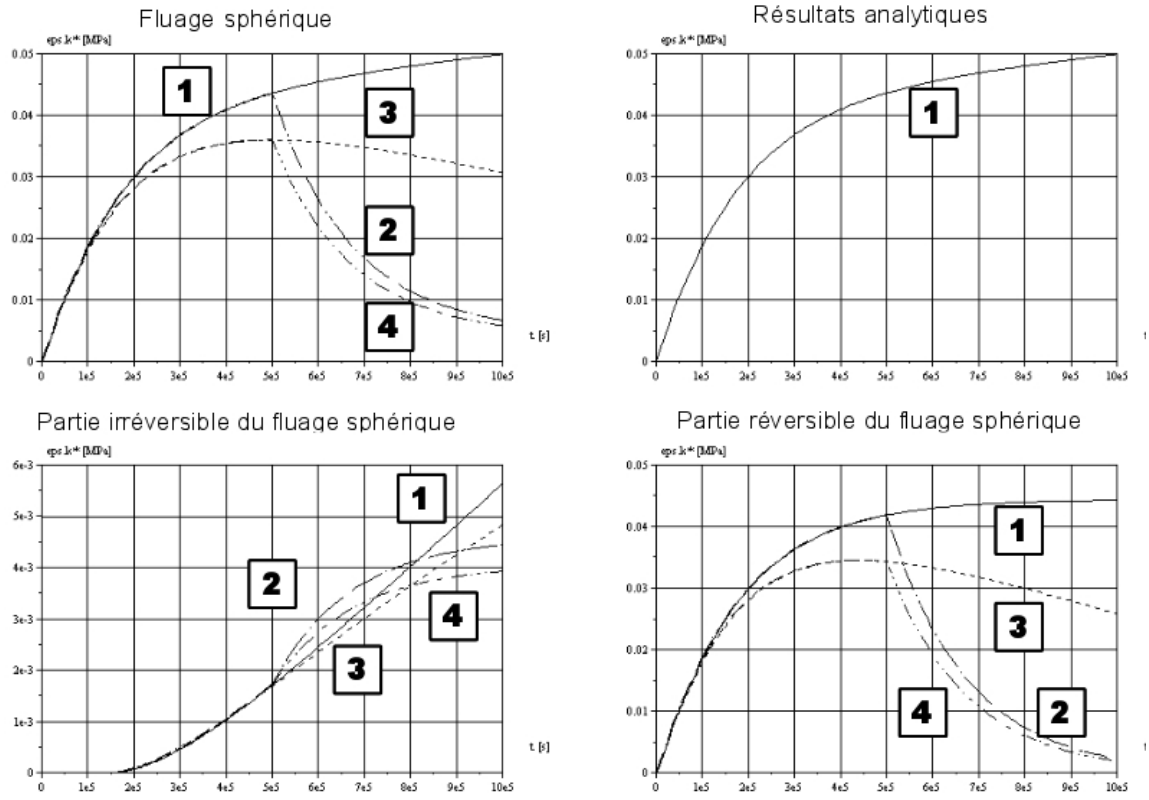


Figure 4.1-1 : Réponses numériques obtenues en utilisant les expressions discrétisées [éq 4.1-3] à [éq 4.1-17] pour quatre histoires de chargement : 1 échelon de contrainte unitaire à humidité constante (100%), 2 échelon de contrainte unitaire à humidité linéairement décroissante de 100% à 50%, 3 échelon de contrainte unitaire pendant la moitié de la durée du calcul suivi d'une recouvrance à la moitié de la contrainte initiale sur la seconde partie du calcul ; l'humidité est supposée constante (100%), 4 le chargement mécanique est identique à 3 ; humidité décroît linéairement de 100% à 50%.

Pour réaliser les simulations de la Figure 4.1-1 les paramètres suivants ont été retenus : $k_r^s = 2{,}0\text{e+}5$ [MPa] ; $\eta_r^s = 4{,}0\text{e+}10$ [MPa.s] ; $k_i^s = 1{,}0\text{e+}4$ [MPa] ; $\eta_i^s = 1{,}0\text{e+}11$ [MPa.s]. Le calcul comporte 200 intervalles de 5000 [s].

4.2 Discrétisation des équations constitutives du fluage déviatorique

Après discrétisation des contraintes et de l'humidité relative par des fonctions affines, le tenseur déviateur des déformations de fluage propre est discrétisé par l'équation suivante :

$$\Delta \underline{\varepsilon}_n^{fd} = \underline{a}_n^d + b_n^d \cdot \underline{\sigma}_n^d + c_n^d \cdot \underline{\sigma}_{n+1}^d \qquad \text{éq 4.2-1}$$

où $\underline{\sigma}_n^d$ et $\underline{\sigma}_{n+1}^d$ sont les tenseurs des contraintes déviatoriques au début et à la fin du pas de temps courant.
Les étapes effectuées sont :

- On calcule les paramètres par rapport à la déformation de fluage propre déviatorique *réversible*, dont le modèle est :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\eta_r^d \dot{\underline{\varepsilon}}_r^{fd}(t)+k_r^d \underline{\varepsilon}_r^{fd}(t)=h(t)\underline{\sigma}^d(t) \qquad \text{éq 4.2-2}$$

Après discrétisation, l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \underline{\varepsilon}_{r,n}^{fd}=\underline{a}_{r,n}^d+b_{r,n}^d\cdot\underline{\sigma}_n^d+c_{r,n}^d\cdot\underline{\sigma}_{n+1}^d \qquad \text{éq 4.2-3}$$

Avec :

$$\begin{cases} \underline{a}_{r,n}^d=\left[\exp\left(-\dfrac{\Delta t_n}{\tau_r^d}\right)-1\right]\cdot\underline{\varepsilon}_{r,n}^{f,d} \\ b_{r,n}^d=\dfrac{1}{k_r^d}\left\{\left[-\left(\dfrac{2\tau_r^d}{\Delta t_n}+1\right)h_n+\dfrac{\tau_r^d}{\Delta t_n}h_{n+1}\right]\exp\left(-\dfrac{\Delta t_n}{\tau_r^d}\right)+\left[\left(\dfrac{2\tau_r^d}{\Delta t_n}-1\right)h_n-\dfrac{\tau_r^d-\Delta t_n}{\Delta t_n}h_{n+1}\right]\right\} \\ c_{r,n}^d=\dfrac{1}{k_r^d}\left[\dfrac{\tau_r^d}{\Delta t_n}\exp\left(-\dfrac{\Delta t_n}{\tau_r^d}\right)h_n-\dfrac{\tau_r^d-\Delta t_n}{\Delta t_n}h_n\right] \end{cases} \qquad \text{éq 4.2-4}$$

Remarque :

L'équation [éq 4.2-4] (partie réversible du fluage déviatorique) est analogue à l'équation [éq 4.1-5] (partie réversible du fluage en l'absence de déformations irréversibles). Elles correspondent à la discrétisation d'une unique chaîne de Kelvin.

On calcule les paramètres par rapport à la déformation de fluage propre déviatorique, dont le modèle est :

$$\eta_i^d \dot{\underline{\varepsilon}}_i^{f,d}(t)=h(t)\underline{\sigma}^d(t) \qquad \text{éq 4.2-5}$$

Après discrétisation, l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \underline{\varepsilon}_{i,n+1}^{f,d}=\underline{a}_{i,n}^d+b_{i,n}^d\cdot\underline{\sigma}_n^d+c_{i,n}^d\cdot\underline{\sigma}_{n+1}^d \qquad \text{éq 4.2-6}$$

Avec :

$$\begin{cases} \underline{a}_{i,n}^d=0 \\ b_{r,n}^d=\dfrac{\Delta t_n\cdot h_{n+1}}{2\eta_i^d} \\ c_{r,n}^d=\dfrac{\Delta t_n\cdot h_n}{2\eta_i^d} \end{cases} \qquad \text{éq 4.2-7}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

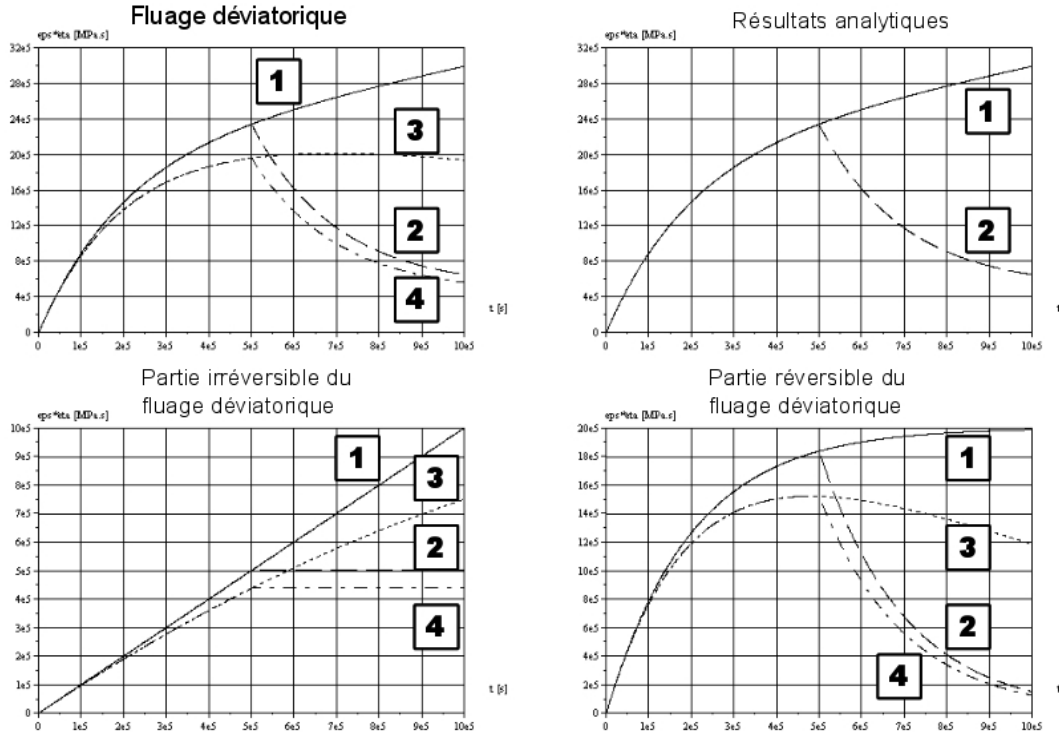


Figure 4.2-1 : Réponses numériques obtenues en utilisant les expressions discrétisées [éq 4.2-1] à [éq 4.2-7] pour quatre histoires de chargement : 1 échelon de contrainte unitaire à humidité constante (100%), 2 échelon de contrainte unitaire à humidité linéairement décroissante de 100% à 50%, 3 échelon de contrainte unitaire pendant la moitié de la durée du calcul suivi d'une recouvrance à la moitié de la contrainte initiale sur la seconde partie du calcul ; l'humidité est supposée constante (100%), 4 le chargement mécanique est identique à 3 ; humidité varie linéairement décroissante de 100% à 50%.

Pour réaliser les simulations de la Figure 4.2-1, les paramètres suivants ont été retenus : $k_r^d = 5{,}0\text{e+}4$ [MPa] ; $\eta_r^d = 1{,}0\text{e+}10$ [MPa.s] ; $\eta_i^d = 1{,}0\text{e+}11$ [MPa.s]. Le calcul comporte 1000 intervalles de 1000 [s].

4.3 Discrétisation des équations du fluage de dessiccation

Les termes liés à la prise en compte du fluage de dessiccation se décomposent suivant le même concept que les termes de fluage propre réversible [bib3] :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{fdess} = \underline{\underline{a}}_n^{fdess} + b_n^{fdess} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_n + c_n^{fdess} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \qquad \text{éq. 4.3-1}$$

L'expression des différents termes est la suivante :

$$\begin{cases} \underline{\underline{a}}_n^{fdess} &= 0 \\ b_n^{fdess} &= \dfrac{\Delta h_n}{2 \cdot \eta^{fd}} \\ c_n^{fdess} &= \dfrac{\Delta h_n}{2 \cdot \eta^{fd}} \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Matrice tangente

En introduisant le module de cisaillement élastique μ , le déviateur des contraintes à l'instant $n+1$ s'écrit en fonction du déviateur des déformations élastiques :

$$\underline{\sigma}^{d}_{n+1}=2\mu\,\underline{\varepsilon}^{ed}_{n+1}=\underline{\sigma}^{d}_{n}+2\mu\Delta\,\underline{\varepsilon}^{d}_{n}-2\mu\Delta\,\underline{\varepsilon}^{f,d}_{n} \qquad \text{éq 5-1}$$

En substituant la partie déviatorique de la déformation de fluage propre par l'expression [éq 4.2-1], il découle la relation suivante :

$$\underline{\sigma}^{d}_{n+1}\left(1+2\mu c^{d}\right)=\underline{\sigma}^{d}_{n}\left(1-2\mu b^{d}\right)+2\mu\Delta\,\underline{\varepsilon}^{d}_{n}-2\mu a^{d}\,\underline{1} \qquad \text{éq 5-2}$$

Expression qui induit par dérivation par rapport à $\underline{\varepsilon}^{d}_{n+1}$:

$$\frac{\partial\,\underline{\sigma}^{d}_{n+1}}{\partial\,\underline{\varepsilon}^{d}_{n+1}}\left(1+2\mu c^{d}\right)=2\mu\,\underline{\underline{1}} \qquad \text{éq 5-3}$$

En effectuant une démarche similaire pour la partie sphérique et en introduisant le module de rigidité à la dilatation K, il suit les trois relations suivantes :

$$tr\ \underline{\sigma}_{n+1}=3\mathrm{K}\ tr\ \underline{\varepsilon}^{e}_{n+1}=tr\ \underline{\sigma}_{n}+3\mathrm{K}\ tr\left(\Delta\,\underline{\varepsilon}_{n}\right)-3\mathrm{K}\ tr\left(\Delta\,\underline{\varepsilon}^{f}_{n}\right) \qquad \text{éq 5-4}$$

$$tr\ \underline{\sigma}_{n+1}\left(1+3\,Kc^{s}\right)=tr\ \underline{\sigma}_{n}\left(1-3\,Kb^{s}\right)+3\mathrm{K}\ tr\left(\Delta\,\underline{\varepsilon}_{n}\right)-Ka^{s} \qquad \text{éq 5-5}$$

$$\frac{\partial\left(tr\ \underline{\sigma}_{n+1}\right)}{\partial\left(tr\ \underline{\varepsilon}_{n+1}\right)}\left(1+3\,Kc^{s}\right)=3\mathrm{K} \qquad \text{éq 5-6}$$

La matrice tangente s'écrit finalement :

$$\frac{\partial\,\underline{\sigma}}{\partial\,\underline{\varepsilon}}=\frac{\partial\,\underline{\sigma}^{d}}{\partial\,\underline{\varepsilon}}+\frac{1}{3}\frac{\partial\left(tr\ \underline{\sigma}\right)}{\partial\,\underline{\varepsilon}}\underline{1}=\frac{\partial\,\underline{\sigma}^{d}}{\partial\,\underline{\varepsilon}^{d}}\frac{\partial\,\underline{\varepsilon}^{d}}{\partial\,\underline{\varepsilon}}+\frac{1}{3}\frac{\partial\left(tr\ \underline{\sigma}\right)}{\partial\left(tr\ \underline{\varepsilon}\right)}\frac{\partial\left(tr\ \underline{\varepsilon}\right)}{\partial\,\underline{\varepsilon}}\underline{1} \qquad \text{éq 5-7}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial\,\underline{\underline{\sigma}}}{\partial\,\underline{\varepsilon}}=\underbrace{\frac{2\mu}{1+2\mu c^{d}}}_{\chi}\left(\underline{\underline{1}}-\frac{1}{3}\underline{1}\otimes\underline{1}\right)+\underbrace{\frac{K}{1+3\,Kc^{s}}}_{\xi}\underline{1}\otimes\underline{1} \qquad \text{éq 5-8}$$

Après linéarisation, la matrice tangente se développe comme suit :

$$\begin{pmatrix}\Delta\sigma_{11}\\ \Delta\sigma_{22}\\ \Delta\sigma_{33}\\ \sqrt{2}\,\Delta\sigma_{12}\\ \sqrt{2}\,\Delta\sigma_{13}\\ \sqrt{2}\,\Delta\sigma_{23}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\xi+\frac{2}{3}\chi & \xi-\frac{1}{3}\chi & \xi-\frac{1}{3}\chi & 0 & 0 & 0\\ \xi-\frac{1}{3}\chi & \xi+\frac{2}{3}\chi & \xi-\frac{1}{3}\chi & 0 & 0 & 0\\ \xi-\frac{1}{3}\chi & \xi-\frac{1}{3}\chi & \xi+\frac{2}{3}\chi & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \chi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}\Delta\varepsilon_{11}\\ \Delta\varepsilon_{22}\\ \Delta\varepsilon_{33}\\ \sqrt{2}\,\Delta\varepsilon_{12}\\ \sqrt{2}\,\Delta\varepsilon_{13}\\ \sqrt{2}\,\Delta\varepsilon_{23}\end{pmatrix} \qquad \text{éq 5-9}$$

6 Description des variables internes

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le tableau suivant donne la correspondance entre le numéro des variables internes accessibles par *Code_Aster* et leur description :

Numéro de la variable	Description
1	Déformation sphérique réversible
2	Déformation sphérique irréversible
3	Déformation déviatorique réversible, composante 11
4	Déformation déviatorique irréversible, composante 11
5	Déformation déviatorique réversible, composante 22
6	Déformation déviatorique irréversible, composante 22
7	Déformation déviatorique réversible, composante 33
8	Déformation déviatorique irréversible, composante 33
9	Retrait de dessiccation, composante 11
10	Retrait de dessiccation, composante 22
11	Retrait de dessiccation, composante 33
12	Déformation déviatorique réversible, composante 12
13	Déformation déviatorique irréversible, composante 12
14	Déformation déviatorique réversible, composante 13
15	Déformation déviatorique irréversible, composante 13
16	Déformation déviatorique réversible, composante 23
17	Déformation déviatorique irréversible, composante 23
18	Retrait de dessiccation, composante 12
19	Retrait de dessiccation, composante 13
20	Retrait de dessiccation, composante 23

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Couplage entre BETON_UMLV et MAZARS

Le modèle BETON_UMLV est un modèle de comportement viscoélastique linéaire. Pour pouvoir représenter la rupture du béton par fluage tertiaire, on propose dans Code_Aster de coupler le modèle de fluage à un modèle d'endommagement à savoir le modèle de MAZARS (cf. [R7.01.08]). Le couplage est réalisé en supposant d'une part, que les déformations de fluage sont engendrées par les contraintes effectives (soit, celles réellement vues par le matériau) et d'autre part, que seule une partie de la déformation de fluage (supposée constante) contribue à l'évolution de l'endommagement. Le schéma est réalisé en maintenant le lien direct entre état de déformations élastiques et état de contraintes.

7.1 Mise en œuvre

7.1.1 Mise à jour des variables internes du fluage

Comme pour le reste du document, on se limite ici à la description du couplage entre l'endommagement et le fluage propre. On suppose donc comme précédemment que la déformation s'écrit suivant l'équation [éq 2-2] :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f$$

où ε^e , déformation élastique, contient aussi la contribution de l'endommagement (micro - fissuration) engendrée par le modèle de MAZARS. En considérant les contributions sphérique [éq 4.1-2] et déviatorique [éq 4.2-1] du fluage propre ansi que celle du fluage de dessiccation, on obtient l'incrément des déformations de fluage $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^f$ entre les instants *n* et *n+1 :*

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^f = \underline{a}_n + b_n \underline{\underline{\sigma}}_n + c_n \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \qquad \text{éq 6.1-1}$$

avec $\underline{a}_n , b_n c_n$ les coefficients de fluage propre total en viscoélasticité linéaire.

Pour introduire l'endommagement dans le modèle, on suppose que les déformations de fluage sont engendrées par les contraintes effectives, notées $\underline{\underline{\sigma}}'$ dans la suite du document. Cela permet d'associer les déformations différées à la partie intègre du matériau, comme proposé dans [bib1].

On rappelle que les contraintes effectives peuvent être écrites en fonction de la variable d'endommagement D ou (voir aussi la documentation [R7.01.08-B]) comme une loi d'élasticité :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{1-D} = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}^e \qquad \text{éq 6.1-2}$$

Par conséquent, l'équation [éq 6.1-1] devient :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^f = \underline{a}_n + b_n \underline{\underline{\sigma}}'_n + c_n \underline{\underline{\sigma}}'_{n+1} \qquad \text{éq 6.1-3}$$

En utilisant la loi d'élasticité [éq 6.1-2] avec l'équation [éq 6.1-3], on obtient la nouvelle relation pour l'incrément de déformation de fluage :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^f = \left(1 + c\, \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}\right)^{-1} \left[\underline{a}_n + b_n \underline{\underline{\sigma}}'_n + c_n \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}_n^f \right) \right] \qquad \text{éq 6.1-4}$$

Ainsi, à partir de toutes les quantités connues à l'instant n , il est possible de calculer avec la relation [éq 6.1-4] la déformation de fluage à l'instant $n+1$. Ensuite, on obtient facilement les contraintes effectives à l'instant $n+1$ grâce à la relation [éq 6.1-2], et les variables internes du fluage avec les équations [éq 4.1-2] et [éq 4.2-1].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.1.2 Evolution de l'endommagement

On ne détaille pas ici le modèle de MAZARS ; le lecteur pourra se référer à la documentation de référence de *Code_Aster* du modèle de MAZARS [R7.01.08].
L'hypothèse de base est que l'endommagement est piloté par la déformation élastique et une quote-part de la déformation de fluage. Le tenseur de déformation qui pilote l'évolution de *D* est donné par la relation suivante :

$$\breve{\underline{\underline{\varepsilon}}}=\underline{\underline{\varepsilon}}^{e}+\chi\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{f} \qquad \text{éq 6.2-1}$$

avec $0\leq\chi\leq 1$ *, coefficient de couplage.*

Le niveau de couplage augmente avec χ croissant. Il existe donc deux cas limites : $\chi=0$ et $\chi=1$.

- Si , $\chi=0$ il y a absence de couplage ; l'évolution de l'endommagement ne dépend que de le déformation élastique et donc on ne peut pas avoir du fluage tertiaire.
- Si $\chi=1$ le couplage est maximal, l'endommagement dépend de la déformation totale. Ce cas conduit généralement à la ruine prématurée de la structure.

Remarquons que l'équation [éq 6.2-1] est équivalente à moyenner les déformations totales et élastiques, en utilisant le coefficient χ comme poids :

$$\breve{\underline{\underline{\varepsilon}}}=\chi\,\underline{\underline{\varepsilon}}+(1-\chi)\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{e} \qquad \text{éq 6.2-2a}$$

ou à soustraire $1-\chi$ fois les déformations de fluage des déformations totales :

$$\breve{\underline{\underline{\varepsilon}}}=\underline{\underline{\varepsilon}}-(1-\chi)\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{f} \qquad \text{éq 6.2-2b}$$

La déformation équivalente ε_{eq} qui pilote l'endommmagement dans la loi couplée n'est plus évaluée à partir des déformations élastiques mais à partir des déformations de couplage $\breve{\underline{\underline{\varepsilon}}}$:

$$\varepsilon_{eq}=\sqrt{\left\langle\breve{\underline{\underline{\varepsilon}}}\right\rangle_{+}:\left\langle\breve{\underline{\underline{\varepsilon}}}\right\rangle_{+}} \qquad \text{éq 6.2-3}$$

$\langle\,\rangle_{+}$ correspondant à la partie positive du tenseur.

L'endommagement en traction D_t et en compression D_c sont calculés comme dans le cas non couplé mais avec la déformation équivalente définie dans l'équation [éq 6.2-3] :

$$D_c=1-\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_c)}{\varepsilon_{eq}}-\frac{A_c}{\exp(B_c(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0}))} \qquad \text{éq 6.2-4a}$$

$$D_t=1-\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_t)}{\varepsilon_{eq}}-\frac{A_t}{\exp(B_t(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0}))} \qquad \text{éq 6.2-4b}$$

($\varepsilon_{d0}, A_c, B_c, A_t, B_t$) étant les paramètres matériaux de la loi de Mazars.

Comme dans le cas non couplé, une moyenne pondérée de ces deux endommagements par le coefficient α_t permet finalement de calculer l'endommagement D_{n+1} :

$$D_{test}=\alpha_t^{\beta}D_t+(1-\alpha_t)^{\beta}D_c \qquad \text{éq 6.2-5a}$$

$$D_{n+1}=\max(D_{n+1},D_{test}) \qquad \text{éq 6.2-5b}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Notons que le choix qui a été fait est de conserver la détermination du coefficient α_t à partir des déformations élastiques (et pas les déformations de couplage) :

$$\alpha_t = \frac{\sum_{i=1}^{3}\left[\left\langle \varepsilon_i^e \right\rangle_+ \varepsilon_{ti}\right]}{\left(\varepsilon_{eq}^e\right)^2} \qquad \text{éq 6.2-6}$$

où ε_i^e sont les déformations propres du tenseur élastique ; les composantes ε_{ti} du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon_t}}$ sont calculées à partir des valeurs propres des contraintes élastiques $\sigma_i^{'}$ avec la relation élastique suivante :

$$\varepsilon_{ti} = \frac{1+\nu}{E}\left\langle \sigma_i^{'} \right\rangle_+ - \frac{\nu}{E}\left(\left\langle \sigma_i^{'} \right\rangle_+\right) \qquad \text{éq 6.2-7}$$

et ε_{eq}^e est la déformation équivalente élastique, calculé à partir du tenseur de déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon^e}}$:

$$\varepsilon_{eq}^e = \sqrt{\left\langle \underline{\underline{\varepsilon^e}} \right\rangle_+ : \left\langle \underline{\underline{\varepsilon^e}} \right\rangle_+} \qquad \text{éq 6.2-8}$$

Remarques :

- En adoptant l'expression élastique [éq 6.2-8], on retrouve les conditions de la loi de MAZARS : $\alpha_t = 1$ pour la traction pure et $\alpha_t = 0$ pour la compression pure.
- Il existe une différence dans le traitement de la dépendance du module d'Young à la température entre la loi de MAZARS et la loi BETON_UMLV (mot-clé ELAS_FO de DEFI_MATERIAU). Dans le premier cas, on utilise la valeur du module correspondante à la température maximale atteinte dans l'histoire du chargement ; dans le deuxième cas, on suit la loi utilisateur. Dans le cas du couplage, c'est la règle de la loi MAZARS qui est suivie.

7.2 Réponse en traction

On propose ici un exemple de réponse obtenue avec le modèle couplé. Il s'agit d'un barreau avec section variable, bloquée à une extrémité et avec une charge de traction appliquée à l'extrémité libre.

Sur la figure 6.4-2, on a représenté la carte de l'endommagement à la fin du calcul pour $\chi = 1$; sur la figure 6.4-1, on montre la réponse force-déplacement obtenu pour deux valeurs de χ (1 et 0.9). On reconnaît bien la courbe du fluage tertiaire, avec la rupture finale de l'échantillon.

On montre ici que, en traction, le coefficient de couplage affecte surtout le temps de la rupture.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

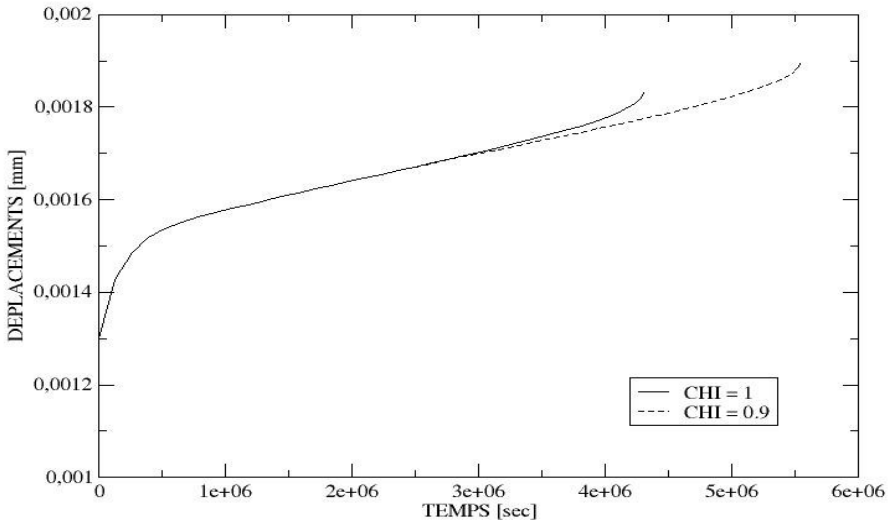


Figure 6.4-1: Réponse en traction sur un barreau pour deux valeurs du coefficient de couplage.

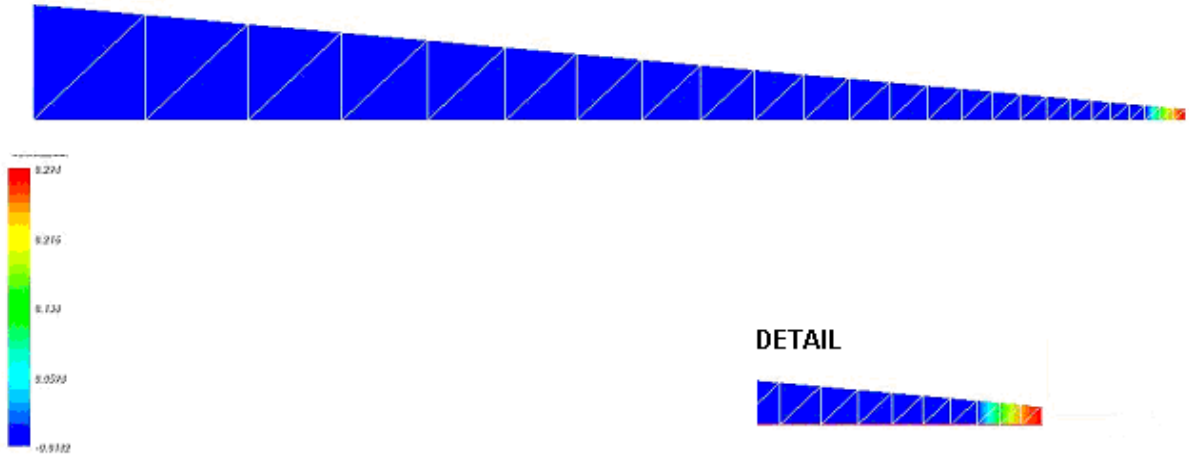


Figure 6.4-2 : Endommagement sur un barreau où on a appliqué une force de traction (χ =1).

8 Notations

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ tenseur des déformations totales

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{f}$ tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{e}$ tenseur des déformations élastiques

$\varepsilon^{fs}\underline{\underline{1}}$ partie sphérique du tenseur des déformations de fluage propre

$\varepsilon_{r}^{fs}\underline{\underline{1}}$ partie sphérique réversible du tenseur des déformations de fluage propre

$\varepsilon_{i}^{fs}\underline{\underline{1}}$ partie sphérique irréversible du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}$ partie déviatorique du tenseur des déformations de fluage propre

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\underline{\underline{\varepsilon}}_r^{fd}$ partie déviatorique réversible du tenseur des déformations de fluage propre (contribution de l'eau absorbée)

$\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{fd}$ partie déviatorique irréversible du tenseur des déformations de fluage propre (contribution de l'eau libre)

$\underline{\underline{\sigma}}$ tenseur des contraintes totales

$\sigma^s \underline{\underline{1}}$ partie sphérique du tenseur des contraintes

$\underline{\underline{\sigma}}^d$ partie déviatorique du tenseur des contraintes

h humidité relative interne

K module élastique de rigidité à la dilatation

k_r^s rigidité apparente associée au squelette formé par des blocs d'hydrates à l'échelle mésoscopique

k_i^s rigidité apparente associée intrinsèquement aux hydrates à l'échelle microscopique

k_r^d rigidité associée à la capacité de l'eau adsorbée à transmettre des charges (*load bearing water*)

μ module de cisaillement élastique

η_i^s viscosité apparente associée au mécanisme de diffusion inter-lamellaire

η_r^s viscosité apparente associée au mécanisme de diffusion au sein de la porosité capillaire

η_i^d viscosité de l'eau libre.

η_r^d viscosité associée à l'eau adsorbée par les feuillets d'hydrates

η^{fd} viscosité du fluage de dessiccation

χ coefficient de couplage fluage-endommagement

$x, \underline{x}, \underline{\underline{x}}$ désignent respectivement un scalaire, un vecteur et un tenseur d'ordre 2.

$x_n, x_{n+1}, \Delta x_n$ désignent respectivement la valeur de la quantité *x* au temps t_n, au temps t_{n+1} et la variation de x pendant l'intervalle $[t_n ; t_{n+1}]$.

9 Bibliographie

1) BENBOUDJEMA F. : Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux bâtiments réacteurs de centrales nucléaires, Mémoire de D.E.A. Matériaux Avancés – Ingénierie des Structures et des Enveloppes, 38 p. (+ annexes) (1999).

2) BENBOUDJEMA F., MEFTAH F., HEINFLING G., LE PAPE Y. : Étude numérique et analytique de la partie sphérique du modèle de fluage propre UMLV pour le béton, note technique HT-25/02/040/A, 56 p (2002).

3) BENBOUDJEMA F., MEFTAH F., TORRENTI J.M., LE PAPE Y. : Algorithme du modèle de fluage propre et de dessiccation UMLV couplé à un modèle élastique, note technique HT-25/02/050/A, 68 p (2002).

4) GRANGER L. : Comportement différé du béton dans les enceintes de centrale nucléaire : analyse et modélisation, Thèse de Doctorat de l'ENPC (1995).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5) Relation de comportement de Granger pour le fluage propre du béton, Documentation *Code_Aster* [R7.01.01], 16 p (2001).

6) BAZANT, Z.P., CHERN, J.C. : Concrete creep at variable humidity: constitutive law and mechanism. *Materials and Structures* (RILEM, Paris), 18, Jan., p. 1-20 (1985).

10 Fonctionnalités et vérification

Ce document concerne la loi de comportement BETON_UMLV (mot clé COMPORTEMENT de STAT_NON_LINE) et son matériau associé BETON_UMLV (commande DEFI_MATERIAU).

Cette loi de comportement est vérifiée par les cas tests suivants :

SSNV163	Calcul de fluage propre	[V6.04.163]
SSNV174	Prise en compte du retrait dans le modèle BETON_UMLV	Non documenté
SSNV180	Prise en compte de la dilatation thermique et du fluage de dessiccation dans le modèle BETON_UMLV	[V6.04.180]
SSNV181	Vérification de la bonne prise en compte du cisaillement dans le modèle BETON_UMLV	[V6.04.181]

Et par les cas tests suivants pour les cas de couplage :

Loi couplée			
ENDO_ISOT_BETON	SSLA103f	Calcul du retrait de dessiccation et du retrait endogène sur un cylindre	[V3.06.103]
ENDO_ISOT_BETON MAZARS	SSNV169	Couplage fluage – endommagement	[V6.04.169]

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
7.1	Y. Le Pape EDF/R&D/MMC	Texte initial
9.4	S. Michel-Ponnelle EDF/R&D/AMA M. Bottoni Univ. de Grenoble	Ajout du couplage UMLV – MAZARS
10 4	A. Foucault EDF/R&D/AMA	Modifications équations §4 - impact fiche anomalie 12519
12.4	M. Bottoni EDF/R&D/AMA	Intégration du fluage de dessiccation.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)