Contact en grands glissements avec X-FEM

Résumé :

Ce document présente une nouvelle approche pour traiter les problèmes de contact en grands glissements avec la eXtended Finite Element Method (X-FEM) [R7.02.12]. On considère la formulation hybride continue de problèmes de contact entre solides [bib2] et la stratégie de résolution est similaire à celle déjà implémentée dans Code_Aster pour le cadre éléments finis classiques [bib3]. Le traitement du contact-frottement en petits glissements fait l'objet du document [R5.03.54]. Un nouveau type d'élément de contact mixte est introduit, spécifique au cadre X-FEM. La procédure de ré-actualisation géométrique et l'algorithme d'appariement, éléments nouveaux pour la X-FEM, sont présentés en détail dans ce document ainsi que les termes matriciels résultant de la linéarisation de la formulation faible du problème.

L'approche est implémentée dans *Code_Aster* en 2D et 3D, et traite à la fois des interfaces complètement coupées par une fissure ainsi que des interfaces avec fond de fissure. Elle est utilisable avec la commande STAT_NON_LINE [U4.51.03]. Le frottement de type Coulomb est pris en compte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1Introduction....3
2Problème de contact avec X-FEM....5
3Élément hybride X-FEM de contact pour l'approche grands glissements....9
3.1Elément hybride de contact X-FEM....10
4Stratégie de résolution....14
4.1Ré-actualisation géométrique et appariement....14
4.2Linéarisation de la formulation variationnelle mixte....17
5Amélioration de l'intégration pour le contact....23
5.1Conflit entre les relations imposées par la condition LBB et les changements de statuts de contact....23
5.1.1Relation linéaire au passage contactant/non contactant....23
5.1.2Relation d'égalité au passage contactant/non contactant....23
5.1.3Résumé....25
5.2Conflit entre les relations d'égalités imposées par la condition LBB et les changements de statuts d'adhérence....25
6Bibliographie....27
7Description des versions du document....28

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Lors de l'implémentation numérique de la X-FEM [bib1,bib5], le problème du contact frottant a été traité par la méthode continue, appelée également « formulation hybride continue » dans la documentation de Code_Aster, sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP). La formulation mathématique de la méthode continue [bib2] a donc été adaptée à la XFEM et on rappelle ici les principales caractéristiques de l'implémentation numérique en HPP [R5.03.54] :

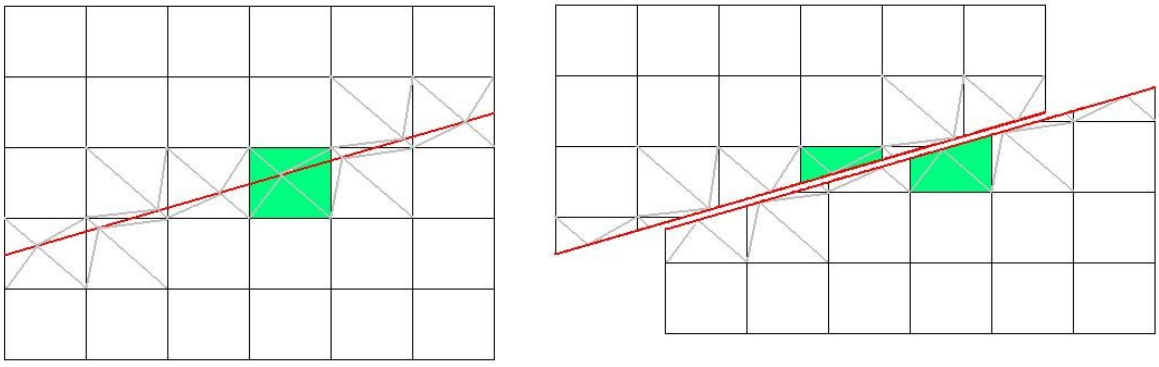
- les lèvres de la fissure sont traitées comme une seule surface géométrique de discontinuité ;
- la ré-actualisation géométrique de la surface de contact et l'appariement maître-esclave ne sont pas effectués (les notions des surface esclave et surface maîtresse n'ont pas de sens ici) ;
- le saut de déplacement est exprimé en fonction des degrés de liberté d'enrichissement discontinus introduits par X-FEM.

Le calcul des contributions de contact est ainsi réalisé au niveau des éléments finis traversés par la fissure et on ne passe pas par des éléments mixtes de contact, supportés par des mailles tardives, comme c'est le cas pour l'approche classique de la méthode continue.
Dans le chapitre suivant on rappelle également la formulation faible du problème de contact avec XFEM, résolue par la méthode continue.

Le traitement du contact lors de la modélisation des grands glissements avec X-FEM a nécessité une nouvelle réflexion pour sa mise en œuvre. Par rapport au cas HPP (Figure 1a), la principale difficulté était de faire communiquer le morceau esclave d'un élément fissuré avec le morceau maître d'un autre élément fissuré (Figure 1b). En effet, dans ce cas deux surfaces de contact doivent être déclarées et des points de contact situés à l'intérieur d'une maille coupée par la fissure vont se retrouver en vis-à-vis avec des points appartenant à une autre maille, elle aussi coupée par la fissure.

La difficulté est due à l'inexistence de nœuds sur l'interface de contact (la fissure ne génère que des points d'intersection avec les bords des mailles). Les mailles tardives de contact (segments esclave et maître dans le cas 2D) générées à partir de ces nœuds pour les maillages FEM ne peuvent plus être générées ici comme c'était le cas pour la formulation classique [bib3].

La solution trouvée a été la création de nouvelles mailles tardives, d'un ordre plus élevé. Ces mailles sont formées des degrés de liberté de la maille esclave contenant le point de contact et des degrés de liberté de la maille maître contenant son projeté. Pour le cas illustré sur la Figure 1b, au lieu d'avoir des mailles tardives SEG2-SEG2, comme c'était le cas pour la formulation classique, en X-FEM grands glissements on a des mailles tardives QUAD4-QUAD4. Les détails sur la création et les caractéristiques de telles mailles tardives, qui représentent les supports du nouvel élément de contact, seront présentés dans le troisième chapitre de ce document.



a) b)

Figure 1. Maillage X-FEM. a) Traitement HPP; b) Traitement grands glissements.

Deux autres étapes importantes doivent ensuite être réalisées avant le calcul des contributions de contact : la ré-actualisation géométrique des surfaces de contact et l'appariement des points de contact. Leur description fait l'objet de la première partie du 4ème chapitre, nommé « Stratégie de

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

résolution ». Dans la deuxième partie de ce chapitre on linéarise la formulation variationnelle mixte pour extraire la formulation discrète des termes élémentaires de contact.

La mise en œuvre informatique de l'approche grands glissements avec X-FEM est décrite dans le document [D9.05.06], pour l'état actuel de l'implémentation numérique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Problème de contact avec X-FEM

Le problème de contact traité dans ce document concerne les fissures modélisées par X-FEM : on considère donc un seul domaine Ω pour le champ de déplacements. Sur une partie de sa frontière, Γ_u, on considère un jeu de conditions de Dirichlet et sur une autre partie, Γ_t, on considère un jeu de conditions de Neumann (Figure 2.a). Les efforts de contact vont apparaître sur la discontinuité interne notée Γ_c.
On décompose la densité d'effort de contact r en une partie normale λ, qui désigne la pression normale, et une autre tangentielle r_τ :

$$r=\lambda n+r_\tau \qquad (1)$$

où n représente le vecteur de la normale entrante à ω_2.

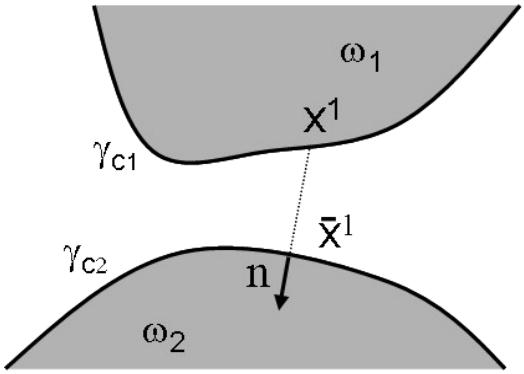


Figure 2. Notations du problème de contact

Pour un problème de contact, comme illustré sur la Figure 2, considérons le champ u appartenant à l'ensemble V_0 des champs de déplacements cinématiquement admissibles :

$$V_0=\left\{v\in H^1, v \text{ discontinu à travers } \Gamma_c, v=0 \text{ sur } \Gamma_u\right\}.$$

En considérant les notations introduites précédemment, la formulation forte des équations locales d'équilibre définies sur la configuration initiale, complétées des conditions initiales et des conditions aux limites du problème considéré, est :

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\Pi+f=0 && \text{dans } \Omega,\\ &u=\bar{u} && \text{sur } \Gamma_u\\ &\Pi\cdot N=t && \text{sur } \Gamma_t\\ &\Pi\cdot N=r && \text{sur } \Gamma_c \end{aligned} \qquad (2)$$

où Π représente le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, f et t sont les densités des efforts internes et surfaciques, respectivement, et $\bar{u}$ représente les conditions de Dirichlet.
Considérons un zoom sur la configuration déformée (Figure 2.b) avec ω_1 la partie esclave et ω_2 la partie maître et les frontières correspondantes, γ_{c1} et γ_{c2}, potentiellement en contact. Le point principal pour le problème de contact est alors l'évaluation du jeu entre un point de contact x^1 considéré sur la frontière esclave et son projeté $\bar{x}^1$:

$$d_n=\left(x^1-\bar{x}^1\right)\cdot n \qquad (3)$$

Le projeté du point de contact est calculé suivant le principe de la distance minimale, représentant donc la projection orthogonale du point de contact x^1 sur la frontière maître γ_{c2}.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour le contact, les lois de Signorini s'écrivent alors:

$$d_n \leq 0 \ , \ \lambda \leq 0 \ , \ \lambda d_n = 0 \tag{4}$$

Pour rendre les équations (4) prêtes pour la formulation faible, on les transforme en une seule équation strictement équivalente selon [3] donnée par la formule (5) :

$$\lambda - \chi(g_n) g_n = 0 \tag{5}$$

Dans (5),

- χ est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^-$ ($\chi = 1$ si contact et $\chi = 0$ si pas de contact),
- $g_n = \lambda - \rho_n d_n$ est le multiplicateur de contact augmenté, avec ρ_n un réel strictement positif.

Une alternative consiste à adopter une stratégie de pénalisation, auquel cas les lois (4) s'écrivent:

$$\lambda + \chi(\lambda - \rho_n d_n) \kappa_n d_n = 0 \tag{6}$$

Dans (6),

- χ est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^-$ ($\chi = 1$ si contact et $\chi = 0$ si pas de contact),
- κ_n est un coefficient de pénalisation grand devant la rigidité de la structure.

Pour les phénomènes de frottement, on utilise les lois de Coulomb qui s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \|r_\tau\| \leq \mu |\lambda| \\ \|r_\tau\| < \mu |\lambda| \Rightarrow v_\tau = 0 \\ \|r_\tau\| = \mu |\lambda| \Rightarrow \exists \alpha \geq 0 \ ; \ v_\tau = -\alpha \cdot r_\tau \end{cases} \tag{7}$$

Dans (7),

- μ est le coefficient de frottement de Coulomb,
- v_τ est la vitesse relative tangente.

Comme pour les lois de contact, on peut écrire la loi de frottement (7) de manière équivalente comme suit:

$$\begin{aligned} r_\tau &= \mu \lambda \Lambda \\ \Lambda - P_{B(0,1)}(g_\tau) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Dans (8),

- Λ est le semi-multiplicateur de frottement,
- $P_{B(0,1)}$ est la projection sur la boule unité,
- $g_\tau = \Lambda + \rho_\tau v_\tau$ est le semi-multiplicateur (vectoriel) de frottement augmenté,
- ρ_τ est un réel strictement positif.

On introduit également le champ de signe $S_f = I_{B(0,1)}(g_\tau)$. Nous avons $S_f = 1$ pour un point adhérent, et $S_f = 0$ pour un point glissant.

On peut également choisir une méthode pénalisée pour écrire cette loi :

$$\Lambda - P_{B(0,1)}(\kappa_\tau v_\tau) = 0 \tag{9}$$

Dans (9),

- κ_τ est le coefficient de pénalisation en frottement.

En 3D, Λ est un vecteur du plan tangent à la surface de la fissure et il faut définir une base covariante du plan tangent dans laquelle il pourra être exprimé comme suit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Lambda=\Lambda^1\tau_1+\Lambda^2\tau_2 \tag{10}$$

Il existe une infinité de couples (τ_1,τ_2) pouvant former cette base.

Pour la méthode de contact X-FEM HPP, on utilise les gradients des level sets pour définir cette base (voir la partie semi-multiplicateur de frottement du chapitre 4 de [bib1]), ce qui assure la continuité de la base (τ_1,τ_2) d'un nœud à l'autre du maillage.

En grands glissements on ne peut plus la définir ainsi puisqu'elle doit être réactualisée à chaque itération géométrique (objet du chapitre 4 de ce document) et dépend alors de la géométrie courante des facettes de contact maîtres.

Pour la méthode de contact FEM en grands glissements, la base choisie est celle orientée par la géométrie courante des mailles surfaciques de contact.

On fait de même pour X-FEM grands glissements en remplaçant la notion de maille surfacique par celle d'une facette de contact. Le problème est que la continuité de la base (τ_1,τ_2) n'est plus assurée comme pour le contact X-FEM HPP.

Pour le contact X-FEM en grands glissements, on décide donc de réorienter les tangentes en utilisant un vecteur fixe dans la base globale, de manière à réduire la discontinuité du champ (τ_1,τ_2) au passage d'un élément à l'autre.

On calcule tout d'abord le vecteur normal n qui est unique, on projette ensuite le vecteur fixe e_1 de la base globale dans le plan de normale n pour construire τ_1 , on construit ensuite τ_2 qui est le produit vectoriel de n et τ_1 :

$$\tau_1=\frac{P_\tau.e_1}{\|P_\tau.e_1\|};\tau_2=n\wedge\tau_1 \tag{11}$$

Dans (11),

- n est le vecteur directeur du plan tangent,
- $P_\tau=(I_d-n\otimes n)$ est l'opérateur de projection sur le plan tangent à n ,
- $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est la direction x dans le repère global,
- (τ_1,τ_2) est la base choisie pour écrire l'équation (8)

Attention, le cas $\|P_\tau.e_1\|=0$ n'est pas traité. Il provoque une erreur. Il faut donc faire attention à ce que le plan de contact ne soit pas orienté perpendiculairement à e_1 .

Les espaces des inconnues de contact sont les suivants :

$$H=\left\{\lambda\in H^{-1/2}(\Gamma_c),\lambda\le 0 \text{ sur } \Gamma_c\right\},$$
$$\mathbf{H}=\left\{r_\tau\in H^{-1/2}(\Gamma_c),\|r_\tau\|\le\mu\lambda_n \text{ sur } \Gamma_c\right\},$$

La formulation faible à trois champs issue de [2] s'écrit alors :

Trouver $(u,\lambda,\Lambda)\in V_0\times H\times\mathbf{H}\quad\forall(u^*,\lambda^*,\Lambda^*)\in V_0\times H\times\mathbf{H}$ tel que (12-14) soient vérifiées :

Équation d'équilibre :

$$\begin{aligned}&\int_M tr(\Pi(\nabla_p(u))(\nabla_p(u^*)))\,dM-\int_{\Gamma_c}\chi(g_n)g_n n\cdot[u^*]\,d\Gamma\\&-\int_{\Gamma_c}\mu\chi(g_n)\lambda P_{B(0,1)}(g_\tau)(I_d-n\otimes n)[u^*]d\Gamma=L_{meca}(u^*)\end{aligned}$$

(12)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Loi de contact :

$$\int_{\Gamma_c} -\frac{1}{\rho_n}\left(\lambda-\chi(g_n)g_n\right)\lambda^* d\Gamma=0 \tag{13}$$

Loi de frottement :

$$\int_{\Gamma_c} \frac{\mu\lambda\chi(g_n)}{\rho_\tau}\left(\Lambda-P_{B(0,1)}(g_\tau)\right)\Lambda^* d\Gamma+\int_{\Gamma_c}\left(1-\chi(g_n)\right)\Lambda\Lambda^* d\Gamma=0 \tag{14}$$

Où :

- $tr(\cdot)$ est l'opérateur trace d'un tenseur,
- Π est le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff,
- $\nabla_p(u^*)$ est le gradient du u^* par rapport aux coordonnées p ,
- $\otimes$ est l'opérateur du produit tensoriel,
- Id est le second tenseur identité,
- $L_{meca}(u^*)$ est le travail virtuel des forces externes.

Dans le cadre d'une formulation pénalisée, les pressions de contact et les contraintes de cisaillement dues au frottement sont explicites en fonction du déplacement. Cependant et comme expliqué dans la documentation [R7.02.12], il est nécessaire de faire intervenir λ dans l'équation d'équilibre pour une satisfaction rigoureuse de la condition LBB. En revanche, l'équation de frottement n'intervient pas dans la résolution, elle n'a qu'un rôle de post-traitement. Les trois équations précédentes (12-14) deviennent alors :
Équation d'équilibre:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega tr(\Pi(\nabla_p(u))(\nabla_p(u^*)))d\Omega-\int_{\Gamma_c}\chi\lambda n\cdot[u^*]d\Gamma\\&-\int_{\Gamma_c}\mu\chi\lambda P_{B(0,1)}(\kappa_\tau v_\tau)(I_d-n\otimes n)[u^*]d\Gamma=L_{meca}(u^*)\end{aligned} \tag{15}$$

Loi de contact:

$$\int_{\Gamma_c} -\frac{1}{\kappa_n}\left(\lambda+\chi\kappa_n d_n\right)\lambda^* d\Gamma=0 \tag{16}$$

Loi de frottement:

$$\int_{\Gamma_c}\chi\left(\Lambda-P_{B(0,1)}(\kappa_\tau v_\tau)\right)\Lambda^* d\Gamma+\int_{\Gamma_c}(1-\chi)\Lambda\Lambda^* d\Gamma=0 \tag{17}$$

La linéarisation ainsi que la discrétisation de cette formulation sont présentées dans le quatrième chapitre pour les éléments hybrides de contact développés afin d'implémenter dans Code_Aster l'approche grands glissements avec XFEM. Auparavant, nous allons introduire dans le chapitre suivant les nouveaux éléments hybrides de contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Élément hybride X-FEM de contact pour l'approche grands glissements

La notion d'élément hybride de contact, appelé également élément mixte de contact, a été pour la première fois introduite dans Code_Aster pour la formulation de contact hybride continue [bib3]. Il s'agit d'un couple formé par un point d'intégration de contact, situé sur la surface esclave, et de l'élément maître contenant le projeté du point de contact sur la surface maîtresse. Le support d'un tel élément, qui dispose de degrés de liberté géométriques et de degrés de liberté de contact (multiplicateurs de contact-frottement) est nommé maille tardive (dénomination utilisée dans Code_Aster). Une maille tardive ne fait pas partie du maillage du modèle de départ. Elle est formée par l'association de la maille esclave contenant le point d'intégration de contact et de la maille maîtresse la plus proche contenant son projeté. Compte tenu de la définition de l'élément de contact, rappelée ci-dessus, pour chaque point d'intégration de contact un nouvel élément de contact sera généré. Sur la Figure 3, on montre un exemple 2D typique de formation d'un élément hybride de contact.

Suite à l'appariement, on trouve pour le point de contact PC qui appartient à la maille esclave N_1N_2, la maille maîtresse N_3N_4. La projection du point de contact sur cette maille va donner ce qu'on appelle le projeté PR. La maille tardive ainsi créée sera de type SEG2-SEG2 et on la nommera $N_1N_2N_3N_4$ pour cet exemple. Les degrés de liberté de déplacement seront stockés en ces 4 nœuds, qui sont aussi des nœuds constitutifs pour les mailles QUAD4 du modèle. Les degrés de liberté de contact-frottement sont stockés, par convention, seulement aux nœuds de la maille esclave N_1N_2.

Pour l'approche grands glissements avec X-FEM, la démarche décrite ci-dessus ne peut plus être appliquée parce que l'interface de contact, issue d'une fissure X-FEM, n'a plus de nœuds mais seulement des points d'intersections qui ne peuvent pas stocker les degrés de liberté de déplacements ou de contact-frottement.

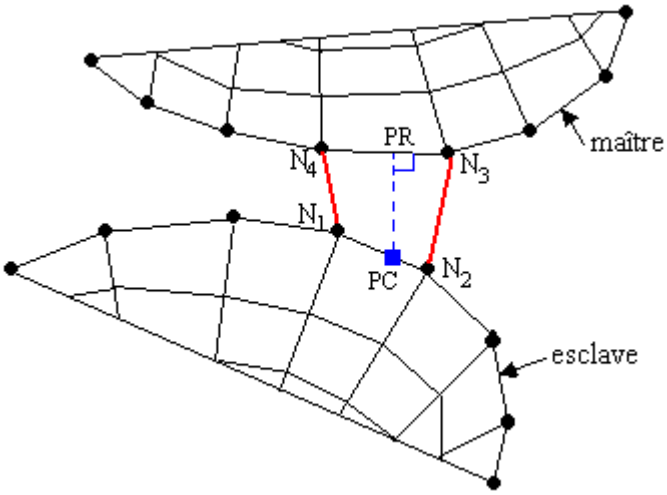


Figure 3. Illustration de la création d'une maille tardive classique pour un modèle 2D.

Étant donné qu'il n'est pas possible de définir des mailles sur la frontière potentielle en contact (segments pour la modélisation 2D ou mailles surfaciques pour celle 3D), la solution trouvée a été d'utiliser les mailles coupées par la fissure pour créer des mailles tardives d'un type nouveau. On s'en sert ensuite pour définir l'élément hybride de contact X-FEM grands glissements en considérant les degrés de liberté de déplacement et de contact-frottement ainsi que des domaines d'intégration numérique pour calculer les contributions de contact frottant. D'autre part pour la méthode de contact X-FEM, le choix a été de faire porter les degrés de liberté de contact par la maille esclave, comme pour la méthode de contact FEM classique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1 Elément hybride de contact X-FEM

Les degrés de liberté de contact sont introduits uniquement aux nœuds portant déjà les degrés de liberté géométriques, conformément à l'algorithme de satisfaction de la condition LBB proposé dans [bib9]. Ainsi sur la Figure 4, définissant une maille tardive (on considère que la maille esclave est celle située en dessous et la maille maître celle au-dessus), la maille esclave est un QUAD4 ($N_1 N_2 N_3 N_4$) dont tous les nœuds stockent à la fois les degrés de liberté de contact et les degrés de liberté géométriques. La maille maître est également un QUAD4 ($N_9 N_{10} N_{11} N_{12}$): ses nœuds ne stockent que des degrés de liberté géométriques.

Il s'agit alors d'apparier deux mailles traversées par la fissure, celle esclave contenant le point de contact PC (sur le segment $P_1^e P_2^e$) et celle maître contenant le projeté du point de contact PR (sur le segment $P_1^m P_2^m$). Pour l'élément hybride de contact montré sur la Figure 4, le segment de contact est $P_1^e P_2^e$, formé à partir des 2 points d'intersection de la lèvre esclave. Le domaine de référence pour les fonctions de forme est figuré à droite de l'image.

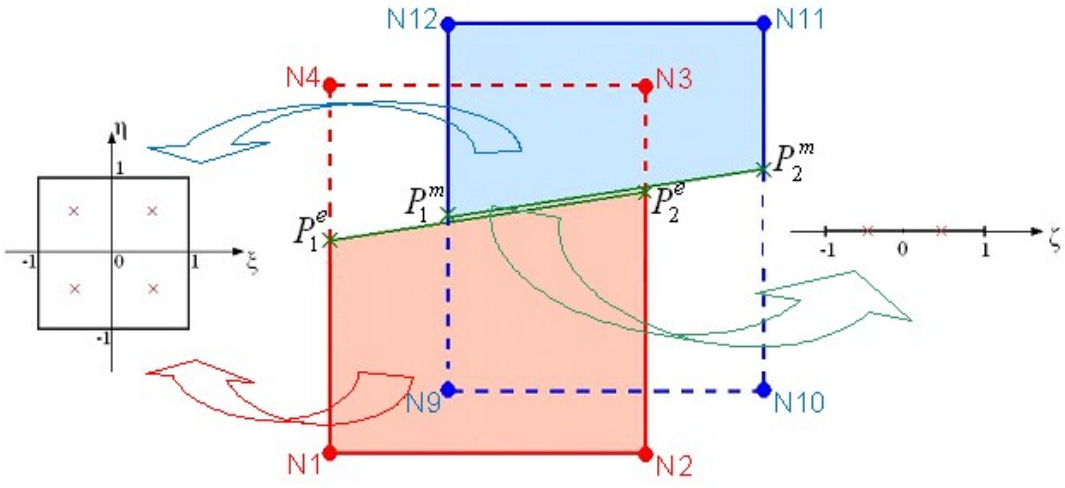


Figure 4. Exemple d'élément hybride de contact grands glissements X-FEM.

Étant donné la particularité de la méthode X-FEM, qui est de considérer les degrés de liberté géométriques de deux types, classiques a_i et enrichis b_i (pour plus de détails sur les caractéristiques des éléments X-FEM on peut se rapporter à [bib1]), il en résulte un élément hybride X-FEM de type QUAD4-QUAD4 dont les degrés de liberté pour chaque nœud sont présentés dans le Tableau 2.

Nœud	*Degré de liberté*													
N1	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4Y	E1X	E1Y	λ	Λ
N2	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4Y	E1X	E1Y	λ	Λ
N3	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4Y	E1X	E1Y	λ	Λ
N4	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4Y	E1X	E1Y	λ	Λ
N9	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4Y	E1X	E1Y		
N10	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4Y	E1X	E1Y		
N11	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4Y	E1X	E1Y		
N12	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4Y	E1X	E1Y		

Tableau 2. Le tableau des degrés de liberté pour un élément hybride de contact, QUAD4-QUAD4.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On s'intéresse maintenant à l'approximation des déplacements pour les points situés sur les lèvres de la fissure. Pour un point situé sur le segment de contact esclave, donc appartenant à la partie pleine de la maille esclave, cette approximation s'écrit:

$$u^e(x)=\sum_{i=1}^{nnes} a_i \varphi_i^e(x)+\sum_{i=1}^{nnes}\sum_{j=1}^{nfhe} He_i^{j,e} b_i^j \varphi_i^e(x)+\sum_{i=1}^{nnes} He_i^{1,e}\sqrt{r_e} c_i^1 \varphi_i^e(x)\ , \qquad (18)$$

Où :

- $nnes$ désigne le nombre de nœuds esclaves sommets,
- $nfhe$ désigne le nombre de degrés de liberté Heaviside présents dans l'élément esclave (1 dans le cas classique, 4 au maximum dans les mailles muti-Heaviside),
- a_i et b_i c_i^1 sont respectivement les degrés de liberté classiques, enrichis Heaviside et Crack-tip (le premier correspondant à des fonctions de formes non nulles sur la lèvre de la fissure),
- $He_i^{j,e}$ correspond à la valeur de la fonction caractéristique du domaine côté esclave, associée au nœud i pour le degré de liberté Heaviside j. La fonction caractéristique de domaine vaut « 0 » si le point de gauss n'appartient pas au domaine correspondant.
- $r_e=\sum_{i=1}^{nnes}\left|lst_i\right|\Phi_i^e(x)$ est la distance du point esclave au fond de fissure,
- le terme $\sum_{i=1}^{nnes}\sqrt{r_e}c_i^1\Phi_i^e(x)$ n'est présent que si l'élément esclave possède des degrés de liberté Crack Tip i.e. l'élément esclave est de type Heaviside Crack-tip, (voir § 3.2 pour les types d'éléments considérés),
- Φ_i^e sont les fonctions de forme de l'élément parent (quadrilatère à 4 nœuds pour l'exemple donné sur la Figure 4 où on montre à gauche de l'image le domaine de référence).

De la même manière, pour un point situé sur la maille maître, on aura:

$$u^m(x)=\sum_{i=1}^{nnm} a_i \varphi_i^m(x)+\sum_{i=1}^{nnm}\sum_{j=1}^{nfhm} He_i^{j,m} b_i^j \varphi_i^m(x)+\sum_{i=1}^{nnm} He_i^{1,m}\sqrt{r_m} c_i^1 \varphi_i^m(x)\ , \qquad (19)$$

Où :

- nnm désigne le nombre de nœuds maîtres,
- $nfhm$ désigne le nombre de degrés de liberté Heaviside présents dans l'élément maître (1 dans le cas classique, 4 au maximum dans les mailles muti-Heaviside).
- $He_i^{j,m}$ correspond à la valeur de la fonction caractéristique de domaine du côté maître, associée au nœud i pour le degré de liberté Heaviside j. La fonction caractéristique de domaine vaut « 0 » si le point de gauss n'appartient pas au domaine correspondant.
- $r_m=\sum_{i=1}^{nnm}\left|lst_i\right|\Phi_i^m(x)$ est la distance du point maître au fond de fissure,
- le terme $\sum_{i=1}^{nnes}\sqrt{r_m}c_i^1\Phi_i^e(x)$ n'est présent que si l'élément maître possède des degrés de liberté Crack Tip i.e. l'élément maître est de type Heaviside Crack-tip (voir § 3.2 pour les types d'éléments considérés),
- Φ_i^m sont les fonctions de forme de l'élément parent.

En utilisant (18) et (19), on peut écrire la relation discrétisée du jeu entre le point de contact (PC) et son projeté (PR):

$$d_n=\left[\sum_{i=1}^{nnes}(a_i+\sum_{j=1}^{nfhe}(He_i^{j,e}b_i)+He_i^{1,e}\sqrt{r_e}c_i^1)\Phi_i^e(x_{CP})-\sum_{i=1}^{nnm}(a_i+\sum_{j=1}^{nfhm}(He_i^{j,m}b_i)+He_i^{1,m}\sqrt{r_m}c_i^1)\Phi_i^m(x_{PR})\right]\cdot n_{PR} \qquad (20)$$

L'approximation des inconnues de contact fait intervenir les Φ_i^e (fonctions de forme de l'élément parent esclave formées par les $nnes$ nœuds esclaves sommets), de sorte que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\lambda(x)=\sum_{k=1}^{nnes}\lambda_k\,\phi_k(x)\,,\qquad \Lambda(x)=\sum_{k=1}^{nnes}\Lambda_k\,\phi_k(x) \tag{21 bis}$$

Autrement dit, les fonctions de formes de contact sont les mêmes que celles des déplacements dans l'élément esclave.

Une autre nouveauté est la possibilité de prendre en compte des fonds de fissure avec contact en grands glissements: c'est pour cela qu'on a représenté dans le tableau 2 en plus des degrés de liberté géométriques classiques (D) et Heaviside (H1), les degrés de liberté crack-tips (E1 seulement car c'est le seul dont la fonction singulière est non nulle sur la discontinuité et qui intervient pour le contact). Néanmoins ces degrés de liberté crack-tips sont facultatifs, que ce soit pour l'élément maître ou pour l'élément esclave. Ainsi dans le tableau, les degrés de liberté en bleu n'apparaissent que si l'élément esclave est Heaviside-crack-tip, et les degrés de liberté en vert n'apparaissent que si l'élément maître est Heaviside-crack-tip. Il est alors possible d'avoir 4 types d'éléments tardifs différents pour les mêmes types de mailles :

- Heaviside – Heaviside,
- Heaviside – Heaviside Crack-tip,
- Heaviside Crack-tip – Heaviside,
- Heaviside Crack-tip – Heaviside Crack-tip,

Sur l'élément contenant la pointe (Crack-tip), l'interface ne subit pas de grands glissements, Il n'est donc pas jugé utile de considérer un ré-appariement pour cette maille. On ne prend donc pas en compte les éléments suivants :

- Heaviside Crack-tip – Crack-tip,
- Crack-tip – Heaviside Crack-tip,
- Crack-tip – Crack-tip.

L'intégration des termes de contact sur l'élément Crack-tip sera traitée de la même manière qu'en petits glissements.

La prise en compte des éléments multi-Heaviside est réalisée avec l'ajout des degrés de liberté Heaviside supplémentaires ($H2\,,H3\,,H4$). Ainsi de la même manière que pour la prise en compte des degrés de liberté crack-tips, ces degrés de liberté supplémentaires sont facultatifs, que ce soit pour l'élément maître ou pour l'élément esclave. Ainsi dans le tableau 2, les degrés de liberté en rouge ne peuvent apparaître que si l'élément esclave est multi-Heaviside et les degrés de liberté en magenta ne peuvent apparaître que si l'élément maître est multi-Heaviside. Il est alors possible d'avoir 15 types d'éléments tardifs supplémentaires pour chaque type de mailles :

- $H1-H2$, $H1-H3$, $H1-H4$,
- $H2-H1$, $H2-H2$, $H2-H3$, $H2-H4$,
- $H3-H1$, $H3-H2$, $H3-H3$, $H3-H4$,
- $H4-H1$, $H4-H2$, $H4-H3$, $H4-H4$,

Par exemple pour la maille tardive QUAD4-QUAD4, l'élément $H4-H2$ possède les ddl du tableau 3.

Nœud	*Degré de liberté*											
N1	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4X	λ	Λ
N2	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4X	λ	Λ
N3	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4X	λ	Λ
N4	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y	H3X	H3Y	H4X	H4X	λ	Λ
N9	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y						
N10	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y						
N11	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y						
N12	DX	DY	H1X	H1Y	H2X	H2Y						

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tableau 3. Le tableau des degrés de liberté pour l'élément hybride de contact H4-H2.

Pour le moment un élément X-FEM ne peut pas être multi-Heaviside et crack-tip à la fois. Cela suppose qu'un fond de fissure doit être relativement éloigné d'une jonction (espacement d'au moins deux mailles). On n'a donc pas envisagé l'appariement entre un élément multi-Heaviside et un élément crack-tip.

Une fois les caractéristiques de l'élément X-FEM hybride de contact définies, on peut passer à la présentation de la stratégie de résolution du problème de contact en grands glissements, stratégie qui fera l'objet du chapitre suivant.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Stratégie de résolution

Les principales étapes de la résolution d'un problème de contact en grands glissements avec la formulation hybride continue peuvent être présentées comme 4 boucles imbriquées pour chaque pas de temps comme il suit :

- ré-actualisation de la géométrie des surfaces de contact et lancement de l'algorithme d'appariement ;
- boucle sur les seuils de frottement (méthode de point-fixe) ;
- boucle sur les statuts de contact (méthode des contraintes actives) ;
- boucle de Newton généralisée.

En méthode de contact XFEM petits glissements, la première étape n'est pas présente pour l'approche HPP : elle a été ajoutée pour l'approche grands glissements. Sa présentation fait l'objet de la première partie de ce chapitre.

Pour les grands glissements avec XFEM, on décide de s'affranchir de la deuxième étape. Plutôt qu'un point fixe sur le seuil de frottement, on préfère traiter la non-linéarité en implémentant les termes linéarisés dans la matrice tangente. Ceci fait partie d'un des nombreux changements qui sont apparus lors de la linéarisation de la formulation mixte variationnelle suite à l'introduction du nouvel élément hybride de contact. Ainsi la deuxième partie de ce chapitre est dédiée à la détermination des nouvelles expressions discrètes pour les termes correspondant aux contributions de contact.

4.1 Ré-actualisation géométrique et appariement

Pour la ré-actualisation géométrique des surfaces de contact issues d'une fissure modélisée par la X-FEM la première opération à faire est la duplication des lèvres de la fissure. Cette opération rend ensuite possible, au début de chaque pas de temps, l'appariement des points de contact situés sur la surface désignée comme esclave. Dans un souci de généralité, on présente les principes de la duplication des lèvres de la fissure à l'aide d'un exemple 3D montré sur la Figure 5.

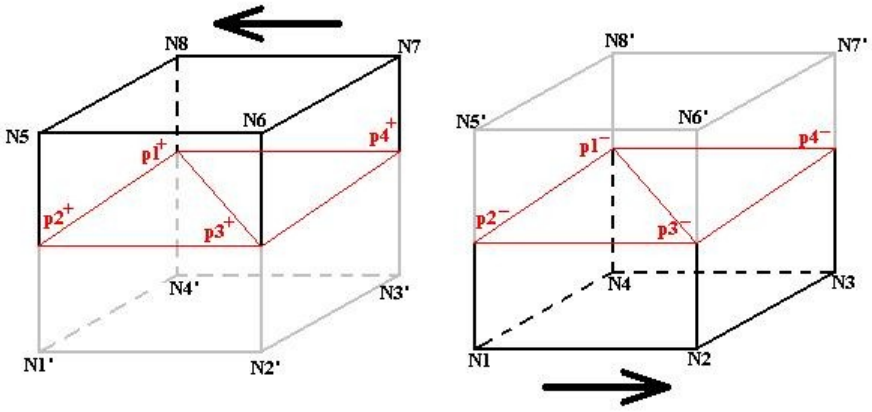


Figure 5. Illustration de la duplication des facettes de contact.

Suite à la duplication des points d'intersection entre les arêtes de la maille et la fissure on obtient, pour chaque élément fissuré, deux séries de facettes de contact (facettes qui sont formées avec ces points): facettes esclaves qui seront attachées à la partie de la maille située en dessous de la fissure (fonction Heaviside associée à la fissure qui génère la facette $H(x,y)=-1$), et facettes maîtresses, situées au-dessus de la fissure (fonction Heaviside associée à la fissure qui génère la facette $H(x,y)=+1$). Par exemple, pour une maille HEXA8 fissurée en grands glissements (Figure 5), on aura les facettes esclaves $p1^- p2^- p3^-$ et $p1^- p3^- p4^-$, ainsi que les facettes maîtresses $p1^+ p2^+ p3^+$ et $p1^+ p3^+ p4^+$. La ré-actualisation géométrique concerne le calcul de la géométrie de ces facettes avant chaque nouvel appariement. Pour chaque facette de contact, les coordonnées géométriques des

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

points d'intersection sont calculées en additionnant aux coordonnées initiales les déplacements réalisés depuis la configuration initiale.

L'algorithme d'appariement qui suit la ré-actualisation géométrique a comme objectif de trouver pour chaque point de contact considéré sur la surface esclave la facette en vis-à-vis située sur la surface maîtresse. Pour illustrer cet algorithme, qui est basé sur les principes de l'algorithme similaire développé pour la formulation continue classique, on utilise l'exemple montré sur la Figure 6.

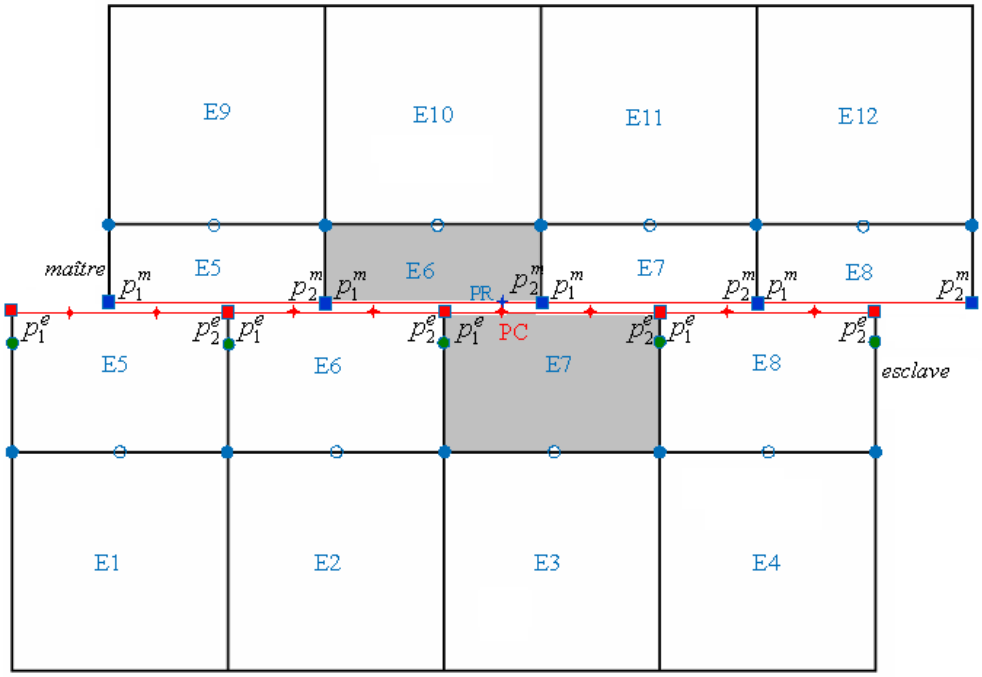


Figure 6. Illustration de l'algorithme d'appariement.

Considérons donc la situation illustrée sur la Figure 6, un maillage 2D contenant des mailles QUAD4, avec 4 mailles traversées par une fissure X-FEM, mailles qui peuvent aussi être rendues quadratiques pour le moment en leur ajoutant des nœuds milieux portant des multiplicateurs de Lagrange de contact-frottement. Après la ré-actualisation géométrique, on cherche à construire la maille tardive correspondante au point de contact PC situé sur le segment de contact $p_1^e p_2^e$ de la maille esclave $E7$. Pour ce faire, on boucle sur toutes les mailles de contact (les mailles fissurées) et ensuite, à l'intérieur de chaque maille, on boucle sur les points d'intersection avec la fissure (côté maître). Le point d'intersection le plus proche du point de contact est retenu (P_2^m de $E6$ sur la figure dans notre cas).On fait ensuite la projection du point de contact sur les facettes maîtres des mailles qui sont connectées au point d'intersection retenu. Dans l'exemple, on projette donc sur les facettes des mailles $E6$ et $E7$ et on vérifie sur laquelle la projection est intérieure. On trouve ainsi que la maille maître $E6$ sera appariée à la maille esclave $E7$ pour le point de contact PC.

Ci-dessous on présente les étapes principales de cet l'algorithme d'appariement:

- boucle sur les mailles de contact esclaves
  - boucle sur les facettes de contact esclaves
    - boucle sur les points d'intégration de contact esclaves
      - calcul des coordonnées réelles du point de contact
      - boucle sur les mailles de contact maîtres
        - boucle sur les points d'intersection maîtres
          - calcul de la distance par rapport aux points d'intersections
          - choix du point d'intersection maître
        - fin de boucle sur les points d'intersection maîtres

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

□ fin de boucle sur les mailles de contact maîtres
- détermination des mailles connectées au point d'intersection maître
□boucle sur les mailles de contact connectées au point d'intersection maître
◘ boucle sur les facettes de contact maîtres
- projection du point de contact sur la facette maître
- calcul du jeu entre le point de contact esclave et la facette maître
- si le jeu est le plus petit : stockage des informations sur l'appariement
◘ fin boucle sur les facettes de contact maîtres
■ fin de boucle sur les points de contact
○ fin de boucle sur les facettes de contact esclaves
• fin de boucle sur les mailles de contact

Suite à l'appariement, une carte de contact est remplie pour chaque point de contact. Cette carte contient les informations nécessaires pour le calcul des contributions de contact au niveau élémentaire. Les détails sur la composition de cette carte sont donnés dans [bib8].

Notons bien que l'algorithme de ré-actualisation géométrique fixe une valeur maximale aux coefficients de pénalisation de contact et de frottement. Pour le comprendre, considérons des éléments parents de taille caractéristique h, une pression de contact dont l'ordre de grandeur est σ, un coefficient de pénalisation de contact κ_n conduisant à une interpénétration typique $\delta=\sigma/\kappa_n$. La convergence est considérée comme atteinte quand le résidu relatif est inférieur à η.

La ré-actualisation géométrique implique le calcul de fonctions de forme des éléments maître et esclaves aux points de contact dans la configuration actuelle. La ré-actualisation géométrique permet de calculer δ avec une précision $\epsilon_{\text{machine}} h$. D'autre part, lorsque la convergence est atteinte, la précision sur cette même quantité doit être inférieure à $\eta\dfrac{\sigma}{\kappa_n}$. Nous avons donc :

$$\epsilon_{\text{machine}} h<\eta\frac{\sigma}{\kappa_n} \text{ soit } \kappa_n<\frac{\eta\sigma}{\epsilon_{\text{machine}} h}$$

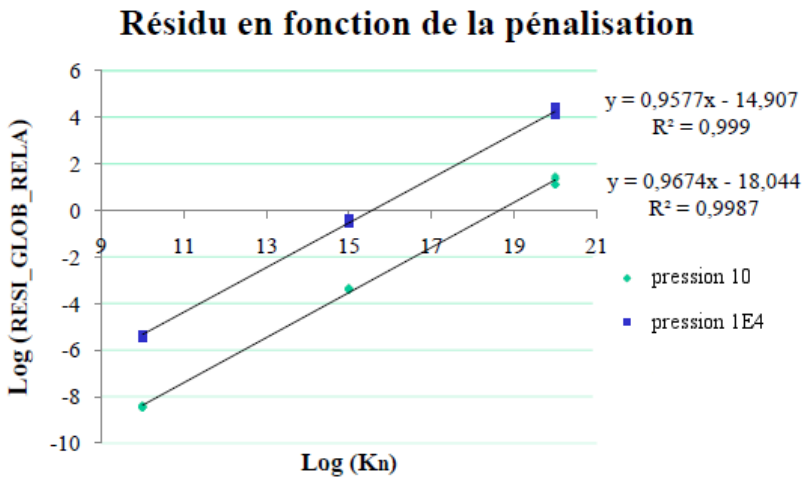
La validité de cette borne supérieure peut être illustrée par des tests numériques. Pour cela, nous considérons un test de compression uniforme SSNV182G adapté en grands glissements pénalisé, pour lequel nous renseignons dans la méthode de Newton une tolérance η' excessivement petite, par exemple $\eta'=1.10^{-20}$. Nous constatons alors que le résidu RESI_GLOB_RELA «plafonne», c'est-à-dire atteint une valeur minimale en deçà de laquelle il ne peut pas descendre du fait de la précision machine. Nous traçons alors cette valeur minimale atteignable du résidu relatif, que nous appelons $\eta_{\min}$ en fonction du coefficient de pénalisation κ_n, pour deux valeurs différentes de la pression de contact. Compte tenu de l'étude effectuée dans le paragraphe précédent nous nous attendons à retrouver :

$$\kappa_n=\frac{\eta_{\min}\sigma}{\epsilon_{\text{machine}} h}$$

Le fait que les coefficients directeurs associés à la représentation de $\log(\eta_{\min})$ en fonction de $\log(\kappa_n)$ soient très proches de 1 confirme la proportionnalité entre η et κ_n. La précision machine de la machine utilisée étant 10^{-14} et $h\sim 1$, on s'attend d'après la formule analytique à trouver des ordonnées à l'origine :

$\log\left(\dfrac{\epsilon_{\text{machine}} h}{\sigma}\right)=\left|\begin{matrix}-15 \text{ si } \sigma=10\\ -18 \text{ si } \sigma=10^4\end{matrix}\right|$, ce qui est proche des valeurs observées numériquement (respectivement $-14{,}90$ et $-18{,}04$) et confirme le raisonnement analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



4.2 Linéarisation de la formulation variationnelle mixte

Considérons une itération de Newton pour laquelle les champs u , λ et Λ sont initialement donnés. On note δu , $\delta\lambda$ et $\delta\Lambda$ leurs variations de sorte que les nouvelles valeurs à la fin de l'itération, u^f , λ^f et Λ^f sont déterminées par:

$$\begin{aligned} u^f &= u+\delta u \ , \\ \lambda^f &= \lambda+\delta\lambda \ , \\ \Lambda^f &= \Lambda+\delta\Lambda \ . \end{aligned} \tag{22}$$

Du fait de la dépendance du seuil de glissement à la pression de contact, la loi de Coulomb est une loi non associée. Ce point est largement développé en [R5,03,50],§2,3 auquel on pourra se référer pour davantage de précisions. Nous pouvons réécrire la condition d'admissibilité des contraintes de la loi de Coulomb (7) sous la forme :

$$f(\boldsymbol{r},\mu) \overset{\text{déf}}{=} \|\boldsymbol{r}_\tau\| - \mu|\lambda| \leq 0$$

La loi d'écoulement s'écrit quand à elle :

$$[\![\boldsymbol{u}]\!] = -\alpha \boldsymbol{r}_\tau \text{ avec } \alpha f(\boldsymbol{r},\mu) = 0$$

Nous voyons alors que la direction d'écoulement, autrement dit la direction de la vitesse relative, n'est pas colinéaire à la normale à la surface seuil. Cette non associativité est source de non-linéarité (dite non linéarité de seuil). On peut traiter le problème avec un seuil de frottement fixe, que l'on réactualise dans une boucle externe. On retrouve alors un pseudo-potentiel (dit critère de Tresca) qui est associé. Cette stratégie a été mise en œuvre dans le contact X-FEM en petits glissements (voir [R7,02,12]).

Nous profitons ici de développements récents dans la méthode de contact continue (voir [R5,03,52]) pour adopter une linéarisation directe. Pour ce faire, nous linéarisons en considérant le seuil λ variable, mis à part lorsqu'on se trouve sur la surface du cône de Coulomb, car cela reviendrait comme nous l'avons vu à préconiser une vitesse relative non tangente, et donc incorrecte. En bref, le seuil est linéarisé pour les points adhérents, pas pour les points glissants. Cette méthode permet notamment de ramener dans le cône d'adhérence des points estimés glissants à tort. Elle a déjà été implémentée en formulation continue, avec des résultats concluants.

La linéarisation de la formulation (12-14), en développant δg_n et δg_τ , donne:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned}&\int_\Omega tr(\Pi(\nabla_p(\delta u)):\nabla_p(u^*))\,d\Omega-\int_{\Gamma_c}\chi\delta\lambda[u^*]\cdot n\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}\chi\rho_n[\delta u]\cdot n[u^*]\cdot n\,d\Gamma\\&-\int_{\Gamma_c}\chi S_f\mu\delta\lambda\,g_\tau[u^*]_\tau d\Gamma\\&-\int_{\Gamma_c}\chi\mu\lambda K(g_\tau)\delta\Lambda[u^*]_\tau\,d\Gamma-\int_{\Gamma_c}\chi\mu\lambda\rho_\tau K(g_\tau)[\delta u]_\tau[u^*]_\tau\,d\Gamma\\&=-\int_\Omega tr(\Pi(\nabla_p(u)):\nabla_p(u^*))\,d\Omega+L_{meca}(u^*)\\&+\int_{\Gamma_c}\chi g_n[u^*]\cdot n\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}\chi\mu\lambda P_B(g_\tau)[u^*]_\tau d\Gamma\end{aligned}\tag{23}$$

$$-\int_{\Gamma^c}\frac{1-\chi}{\rho_n}\delta\lambda\,\lambda^*\,d\Gamma-\int_{\Gamma_c}\chi[\delta u]\cdot n\,\lambda^*\,d\Gamma=+\int_{\Gamma_c}\left(\frac{1-\chi}{\rho_n}\lambda\lambda^*+\chi[u_e-u_m]\cdot n\,\lambda^*\right)d\Gamma\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&-\int_{\Gamma_c}\chi\mu\lambda K(g_\tau)[\delta u]_\tau\Lambda^*\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}\frac{\chi\mu\lambda}{\rho_\tau}(I_d-K(g_\tau))\delta\Lambda\Lambda^*\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}(1-\chi)\delta\Lambda\Lambda^*\,d\Gamma\\&-\int_{\Gamma_c}\chi S_f\mu\delta\lambda\nu_\tau[\delta u]_\tau\Lambda^*\,d\Gamma\\&=-\int_{\Gamma_c}\frac{\mu\lambda\chi}{\rho_\tau}(\Lambda-P_B(g_\tau))\Lambda^*\,d\Gamma-\int_{\Gamma_c}(1-\chi)\Lambda\Lambda^*\,d\Gamma\end{aligned}\tag{25}$$

Avec :

$K(g_\tau)=Id$ si adhérence

$K(g_\tau)=\frac{1}{\|g_\tau\|}\left(Id-\frac{g_\tau\cdot g_\tau^T}{\|g_\tau\|^2}\right)$ si glissement

Notons qu'on résout la non linéarité géométrique par un problème de point fixe, en supposant que n est fixe pendant la variation du déplacement.

En ce qui concerne la formulation pénalisée, une itération de la méthode de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned}&\int_M tr(\Pi(\nabla_p(\delta u)):\nabla_p(u^*))\,dM-\int_{\Gamma_c}\chi\delta\lambda[u^*]\cdot n\,d\Gamma\\&-\int_{\Gamma_c}\chi S_f\mu\delta\lambda\kappa_\tau v_\tau[u^*]_\tau\,d\Gamma-\int_{\Gamma_c}\chi\mu\lambda\kappa_\tau K(\kappa_\tau v_\tau)[\delta u]_\tau[u^*]_\tau d\Gamma\\&=-\int_M tr(\Pi(\nabla_p(u)):\nabla_p(u^*))\,dM+L_{meca}(u^*)\\&+\int_{\Gamma_c}\chi\lambda[u^*]\cdot n\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}\chi\mu\lambda P_B(\kappa_\tau v_\tau)[u^*]_\tau d\Gamma\end{aligned}\tag{26}$$

$$-\int_{\Gamma^c}\frac{1}{\kappa_n}\delta\lambda\,\lambda^*\,d\Gamma-\int_{\Gamma_c}\chi[\delta u]\cdot n\,\lambda^*\,d\Gamma=+\int_{\Gamma_c}\left(\frac{1}{\kappa_n}\lambda\lambda^*+\chi[u]\cdot n\,\lambda^*\right)d\Gamma\tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_c}\delta\Lambda\Lambda^*\,d\Gamma\\&=-\int_{\Gamma_c}\chi(\Lambda-P_B(\kappa_\tau v_\tau))\Lambda^*\,d\Gamma-\int_{\Gamma_c}(1-\chi)\Lambda\Lambda^*\,d\Gamma\end{aligned}\tag{28}$$

En introduisant (20-21) dans la formulation linéarisée du problème (23-25), on obtient un système qui peut être mis sous la forme matricielle suivante:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{bmatrix} K_{meca}+A^u+B^u & A^T+D^T & B_r^T \\ A & C & 0 \\ B_r & E & F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta\lambda \\ \delta\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{meca}+L_{cont}^1+L_{frott}^1 \\ L_{cont}^2 \\ L_{frott}^3 \end{pmatrix} \quad (29)$$

où :

- K_{meca} est la matrice de rigidité mécanique,
- A^u est la matrice de rigidité augmentée due au contact,
- B^u est la matrice de rigidité augmentée due au frottement,
- A est la matrice liant les termes de déplacement à ceux de contact (matrice de la loi de contact),
- B_r est la matrice liant les termes de déplacement à ceux de frottement (matrice de la loi de frottement),
- C est la matrice permettant de déterminer les pressions de contact dans le cas non-contactant,
- D est une matrice liant les termes de déplacement et la pression de contact. Elle provient de la linéarisation du seuil de frottement pour les points adhérents.
- E est une matrice liant pression de contact et multiplicateurs de frottement. Elle provient de la linéarisation du seuil de frottement pour les points adhérents.
- F est la matrice permettant de déterminer les multiplicateurs de frottement dans les cas non contactant, non-frottant, ou contactant frottant glissant,
- L_{meca} est le second membre représentant les forces internes et les incréments de chargements,
- L_{cont}^1 et L_{cont}^2 sont les seconds membres dus au contact,
- L_{frott}^1 et L_{frott}^3 sont les seconds membres liés au frottement.

On constate que le choix d'une linéarisation directe du seuil de frottement conduit à une matrice non symétrique.

On discrétise en gardant seulement les contributions de contact et on obtient:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A+B_{aa} & A+B_{ab} & A+B_{ac} \\ A+B_{ba} & A+B_{bb} & A+B_{bc} \\ A+B_{ca} & A+B_{cb} & A+B_{cc} \end{bmatrix}_{es:es}^{u} & \begin{bmatrix} A_a+D_a \\ A_b+D_b \\ A_c+D_c \end{bmatrix}_{cont}^{es:} & \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \\ B_c \end{bmatrix}_{cont}^{es:} & \begin{bmatrix} A+B_{aa} & A+B_{ab} & A+B_{ac} \\ A+B_{ba} & A+B_{bb} & A+B_{bc} \\ A+B_{ca} & A+B_{cb} & A+B_{cc} \end{bmatrix}_{ma}^{u} \\ \begin{bmatrix} A_a & A_b & A_c \end{bmatrix}_{cont:es} & C & 0 & \begin{bmatrix} A_a & A_b & A_c \end{bmatrix}_{cont:ma} \\ \begin{bmatrix} B_a & B_b & B_c \end{bmatrix}_{cont:es} & E & F & \begin{bmatrix} B_a & B_b & B_c \end{bmatrix}_{cont:ma} \\ \begin{bmatrix} A+B_{aa} & A+B_{ab} & A+B_{ac} \\ A+B_{ba} & A+B_{bb} & A+B_{bc} \\ A+B_{ca} & A+B_{cb} & A+B_{cc} \end{bmatrix}_{es}^{u} & \begin{bmatrix} A_a+D_a \\ A_b+D_b \\ A_c+D_c \end{bmatrix}_{cont}^{ma:} & \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \\ B_c \end{bmatrix}_{cont}^{ma:} & \begin{bmatrix} A+B_{aa} & A+B_{ab} & A+B_{ac} \\ A+B_{ba} & A+B_{bb} & A+B_{bc} \\ A+B_{ca} & A+B_{cb} & A+B_{cc} \end{bmatrix}_{ma}^{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \\ \delta c \end{bmatrix}_{es} \\ \delta\lambda \\ \delta\Lambda \\ \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \\ \delta c \end{bmatrix}_{ma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{bmatrix}_{es}^{1\ cont\ frot} \\ L^2 \\ L^3 \\ \begin{bmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{bmatrix}_{ma}^{1\ cont\ frot} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Les indices es et ma dénotent les contributions esclave et maître, respectivement, tandis que a, b et c dénotent les parties classique, enrichie Heaviside et enrichie Crack Tip, respectivement.

Dans le cas où l'on traite un élément de type exclusivement Crack Tip, on reprend la forme HPP et la matrice devient :

$$\begin{bmatrix} 4[A_{c:c}+B_{c:c}]^u & 2[A_{c:\lambda}+D_{c:\lambda}] & 2[B_{c:\Lambda}] \\ 2[A_{\lambda:c}] & C & 0 \\ 2[B_{\Lambda:c}] & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta c \\ \delta\lambda \\ \delta\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2L_c^{1\ cont}+2L_c^{1\ frot} \\ L^2 \\ L^3 \end{bmatrix}$$

Les expressions des termes présents dans le système sont:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- A^u et B^u , bloc esclave – esclave:

$$[A^u_{es:es}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\rho_n\chi\,\Phi_i^{es}\Phi_j^{es}\,n\otimes n\,[MM]\,d\Gamma$$

$$[B^u_{es:es}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}-\rho_\tau\chi\mu\lambda\Phi_i^{es}\Phi_j^{es}\,[P_\tau]^T\cdot[K(g_\tau)]\cdot[P_\tau][MM]\,d\Gamma$$

où :

$$[MM]=\begin{bmatrix}1 & He_j^{1,e} & -\sqrt{r_e}\\ & He_i^{1,e}He_j^{1,e} & -He_i^{1,e}\sqrt{r_e}\\ sym & & r_e\end{bmatrix}$$ si crack-tip

$[MM]_{1,1}=1$, $[MM]_{1,1+l}=He_j^{l,e}$, $[MM]_{1+k,1}=He_i^{k,e}$ et $[MM]_{1+k,1+l}=He_i^{k,e}He_j^{l,e}$ si multi-Heaviside

On distingue les cas de figure crack-tip et multi-Heaviside car actuellement, un élément ne peut pas être à la fois crack-tip et multi-Heaviside. Notons que dans le cas où l'on disposerait d'un tel élément, les expressions des matrices élémentaires s'obtiendraient facilement par combinaison des termes précédents. Autrement dit il n'y aurait pas grand chose à faire dans les TE d'assemblage de ces termes, tant que l'on a un seul enrichissement crack-tip associé à l'une des fissures de l'élément.

- A^u et B^u , bloc esclave – maître et maître – esclave:

$$[A^u_{es:ma}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\rho_n\chi\,\Phi_i^{es}\Phi_j^{ma}\,n\otimes n\,[MM]\,d\Gamma$$

$$[A^u_{ma:es}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\rho_n\chi\,\Phi_i^{ma}\Phi_j^{es}\,n\otimes n\,[MM]^T\,d\Gamma=[A^u_{es:ma}]^T_{ji}$$

$$[B^u_{es:ma}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}-\rho_\tau\chi\mu\lambda\Phi_i^{es}\Phi_j^{ma}\,[P_\tau]^T\cdot[K(g_\tau)]\cdot[P_\tau][MM]\,d\Gamma$$

$$[B^u_{ma:es}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}-\rho_\tau\chi\mu\lambda\Phi_i^{ma}\Phi_j^{es}\,[P_\tau]^T\cdot[K(g_\tau)]\cdot[P_\tau][MM]^T\,d\Gamma$$

où :

$$[MM]=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -\sqrt{r_m}\\ 1 & 1 & \sqrt{r_m}\\ \sqrt{r_e} & \sqrt{r_e} & \sqrt{r_e}\cdot\sqrt{r_m}\end{bmatrix}$$ si crack-tip

$[MM]_{1,1}=-1$, $[MM]_{1,1+l}=-He_j^{l,m}$, $[MM]_{1+k,1}=-He_i^{k,e}$ et $[MM]_{1+k,1+l}=-He_i^{k,e}He_j^{l,m}$ si multi-Heaviside.

- A^u et B^u , bloc maître – maître

$$[A^u_{ma:ma}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\rho_n\chi\,\Phi_i^{ma}\Phi_j^{ma}\,n\otimes n\,[MM]\,d\Gamma$$

$$[B^u_{ma:ma}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}-\rho_\tau\chi\mu\lambda\Phi_i^{ma}\Phi_j^{ma}\,[P_\tau]^T\cdot[K(g_\tau)]\cdot[P_\tau][MM]\,d\Gamma$$

où :

$$[MM]=\begin{bmatrix}1 & He_j^{1,m} & \sqrt{r_m}\\ & He_i^{1,m}He_j^{1,m} & He_i^{1,m}\sqrt{r_m}\\ sym & & r_m\end{bmatrix}$$ si crack-tip

$[MM]_{1,1}=1$, $[MM]_{1,1+l}=He_j^{l,m}$, $[MM]_{1+k,1}=He_i^{k,m}$ et $[MM]_{1+k,1+l}=He_i^{k,m}He_j^{l,m}$ si multi-Heaviside.

Note

Le terme $n\otimes n$ étant symétrique, de ce fait $[A^u]$ est symétrique. Le terme $[P_\tau]^T\cdot[K(g_\tau)]\cdot[P_\tau]$ est aussi symétrique, de ce fait $[B^u]$ est symétrique.

- A , B et D , blocs esclave – contact et contact – esclave :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$[(A+D)_{es:cont}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\chi\,\phi_i^{es}\,\phi_j^{es}(n+S_f\,\mu\,g_\tau\cdot[P_\tau])[V]\,d\Gamma$$
$$[A_{cont:es}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\chi\,\phi_i^{es}\,\phi_j^{es}\,n^T[V]^T\,d\Gamma$$
$$[B_{es:cont}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\chi\,\mu\,\lambda\,\phi_i^{es}\,\phi_j^{es}[P_\tau]^T\cdot[K(g_\tau)]\cdot[\tau_1,\tau_2][V]\,d\Gamma$$
$$[B_{cont:es}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\chi\,\mu\,\lambda\,\phi_i^{es}\,\phi_j^{es}[\tau_1,\tau_2]^T[K(g_\tau)]\cdot[P_\tau][V]^T\,d\Gamma$$

où :

$$[V]=\begin{bmatrix}-1\\-He_i^{1,e}\\\sqrt{r_e}\end{bmatrix}\text{ si crack-tip}$$
$$[V]_1=-1\ ,\ [V]_{1+k}=-He_i^{k,e}\ \text{ et si multi-Heaviside}$$

- A et B , blocs maître – contact et contact – maître :

$$[(A+D)_{ma:cont}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\chi\,\phi_i^{ma}\,\phi_j^{es}(n+S_f\,\mu\,g_\tau\cdot[P_\tau])[V]\,d\Gamma$$
$$[A_{cont:ma}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\chi\,\phi_i^{ma}\,\phi_j^{es}\,n^T[V]^T\,d\Gamma$$
$$[B_{ma:cont}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\chi\,\mu\,\lambda\,\phi_i^{ma}\,\phi_j^{es}[P_\tau]^T\cdot[K(g_\tau)]\cdot[\tau_1,\tau_2][V]\,d\Gamma$$
$$[B_{cont:ma}]_{ij}=\int_{\Gamma_c}\chi\,\mu\,\lambda\,\phi_i^{ma}\,\phi_j^{es}[\tau_1,\tau_2]^T[K(g_\tau)]\cdot[P_\tau][V]^T\,d\Gamma$$

où :

$$[V]=\begin{bmatrix}1\\He_i^{1,m}\\\sqrt{r_m}\end{bmatrix}\text{ si crack-tip}$$
$$[V]_1=1\ ,\ [V]_{1+k}=He_i^{k,m}\ \text{ si multi-Heaviside}$$

Note

Si le contact a été postulé, A n'est symétrique que s'il n'y a pas de frottement et B est symétrique si et seulement si i $\mu=1$.

- C :

$$[C]_{ij}=-\int_{\Gamma_c}\frac{1-\chi}{\rho_n}\phi_i^{es}\,\phi_j^{es}\,d\Gamma$$

- E :

$$[E]_{ij}=-\int_{\Gamma_c}\chi\,S_f\,\mu\,\phi_i^{es}\,\phi_j^{es}(\nu_\tau\cdot[\tau_1,\tau_2]^T)[\tau_1,\tau_2]\,d\Gamma$$

- F :

$$[F]_{ij}=\int_{\Gamma_c}(1-\chi)\phi_i^{es}\,\phi_j^{es}[\tau_1,\tau_2]^T\cdot[\tau_1,\tau_2]\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}\frac{\chi\,\mu\,\lambda}{\rho_\tau}\phi_i^{es}\,\phi_j^{es}[\tau_1,\tau_2]^T\cdot[I_d-K(g_\tau)]\cdot[\tau_1,\tau_2]\,d\Gamma$$

Note

En l'absence de frottement ou lorsque $\mu=0$, la matrice est symétrique car les termes D , et E ne sont pas assemblés. Avec frottement, elle ne l'est plus.

- L^1 , bloc esclave :

$$[L_{es}^{1,cont}]_i=-\int_{\Gamma_c}\chi\,(\lambda-\rho_n d_n)\,\phi_i^{es}\,n[V]\,d\Gamma$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$[L_{es}^{1,frot}]_i=-\int_{\Gamma_c}\chi\mu\lambda[P_\tau]^T\cdot P_B(\Lambda+\rho_\tau[u_e-u_m]_\tau)\Phi_i^{es}[V]d\Gamma$$

où :

$$[V]=\begin{bmatrix}-1\\-He_i^{1,e}\\\sqrt{r_e}\end{bmatrix}\text{ si crack-tip}$$

$$[V]_1=-1\ ,\ [V]_{1+k}=-He_i^{k,e}\text{ si multi-Heaviside}$$

- L^1 , bloc maître :

$$[L_{ma}^{1,cont}]_i=-\int_{\Gamma_c}\chi(\lambda-\rho_n d_n)\Phi_i^{ma}n[V]d\Gamma$$

$$[L_{es}^{1,frot}]_i=-\int_{\Gamma_c}\chi\mu\lambda[P_\tau]^T\cdot P_B(\Lambda+\rho_\tau[u_e-u_m]_\tau)\Phi_i^{ma}[V]d\Gamma$$

où :

$$[V]=\begin{bmatrix}1\\He_i^{1,m}\\\sqrt{r_m}\end{bmatrix}\text{ si crack-tip}$$

$$[V]_1=1\ ,\ [V]_{1+k}=He_i^{k,m}\text{ si multi-Heaviside}$$

- L^2 :

$$[L^2]_i=\int_{\Gamma_c}(\frac{1-\chi}{\rho_n}\lambda+\chi[u_e-u_m]\cdot n)\Phi_i^{es}d\Gamma$$

- L^3 :

$$[L^3]_i=-\int_{\Gamma_c}(1-\chi)\Phi_i^{es}[\tau_1,\tau_2]^T\cdot[\tau_1,\tau_2]\Lambda d\Gamma-\int_{\Gamma_c}\frac{\chi\mu\lambda}{\rho_\tau}\Phi_i^{es}[\tau_1,\tau_2]^T\cdot[\tau_1,\tau_2](\Lambda-P_B(\Lambda+\rho_\tau[u_e-u_m]_\tau))d\Gamma$$

Note

Attention, dans les routines Fortran calculant les seconds membres, tous les termes L exprimés ci-dessus sont multipliés par -1 parce que dans Code_Aster on considère, historiquement, que le second membre est situé dans la partie gauche du système.

Dans les cas Lagrangien augmenté comme en pénalisation, la matrice est singulière si $\chi=1$ et $\lambda=0$. On considère donc, dans l'équation de frottement uniquement, que $\chi=0$ si $\lambda=0$. Le système linéaire initial prend alors la forme

$$\begin{bmatrix}K_{meca}+A^u+B^u & A^T & 0\\ A & C & 0\\ 0 & 0 & F\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\delta u\\\delta\lambda\\\delta\Lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_{meca}\\0\\0\end{pmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Amélioration de l'intégration pour le contact

5.1 Conflit entre les relations imposées par la condition LBB et les changements de statuts de contact

5.1.1 Relation linéaire au passage contactant/non contactant

Nous avions noté que les relations linéaires introduites sur les degrés de liberté de contact-frottement, afin de satisfaire la condition LBB en X-FEM, posaient un problème en grands glissements. En effet lors du passage contactant/non contactant, elles introduisaient une relation inutile qui était à l'origine d'oscillations sur le profil de pression [bib10]. Ceci engendrait des difficultés pour converger sur les statuts de contact. Pour illustrer ce phénomène, reportons nous à la figure 7.

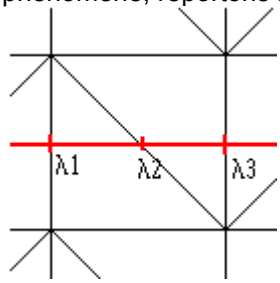


Figure 7 - Les 3 nœuds se voient imposer la relation linéaire $\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0$ par l'algorithme de stabilisation de la LBB.

Dans le cas où les points 1 et 2 sont non contactants et le point 3 est contactant sur cette figure, on a la relation linéaire $\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0$ en plus de $\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}$, ce qui impose $\lambda_3=0$.

Or la contribution au nœud 3 n'est normalement pas nulle. Elle est déterminée par la formulation faible du Principe des Travaux Virtuels.

La pression perdue est alors compensée par un pic sur le Lagrange de contact du nœud contactant suivant. Ce pic est suivi d'oscillations sur le profil de pression. Ces oscillations provoquent des difficultés de convergence sur les statuts de contact.

Pour résoudre ce problème, il ne faut pas tenir compte de la relation linéaire lorsqu'on se retrouve dans un tel cas, ce qui est difficile compte tenu qu'elle a été introduite précédemment via un autre opérateur.

Le choix fait est donc de ne pas assembler dans l'équation de contact la contribution d'un point qui est 'pris' dans une relation linéaire et qui n'est pas contactant.

Sur l'exemple de la figure 7, cela revient à ne plus imposer $\lambda_2=0$ car le point 2 est alors 'pris' dans la relation linéaire. On a donc seulement $\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1=0\end{cases}$, ce qui n'impose plus $\lambda_3=0$.

Avec la nouvelle formulation [bib9] qui consiste à ne stocker les degrés de liberté de contact qu'à des nœuds possédant déjà des degrés de liberté de déplacement, cela revient à ne pas assembler au niveau de la loi de contact un point d'intégration non contactant qui n'est pas sur une arête vitale: on n'assemble alors ni la contribution dans la matrice élémentaire, ni la contribution au second membre de ce point d'intégration (mais l'assemblage est fait pour l'équilibre).

Pour plus de détails sur la définition d'une arête vitale dans Code_Aster, on peut se référer à la partie LBB condition du chapitre 4 de [bib1].

5.1.2 Relation d'égalité au passage contactant/non contactant

De même que pour les relations linéaires, et pour les mêmes raisons, nous avions noté que les relations d'égalité introduites sur les degrés de liberté de contact-frottement afin de satisfaire la condition LBB en X-FEM posaient aussi un problème en grands glissements. Elles introduisaient aussi une relation inutile lors du passage contactant/non contactant, la conséquence finale étant la difficulté de converger sur les statuts de contact. Pour illustrer ce phénomène, reportons nous à la Figure 8.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

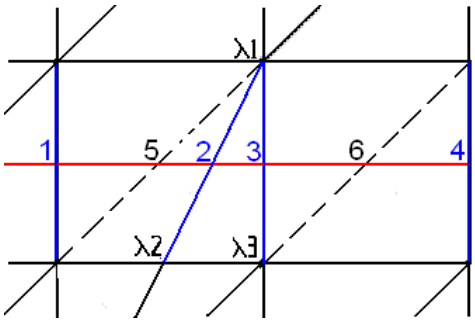


Figure 8 - Les arêtes 5 et 6 (en pointillés) sont non vitales, les arêtes 1, 2, 3 et 4 (en bleu) sont vitales. Sur les arêtes 2 et 3, on a les relations λ1 = λ2 et λ1 = λ3

Dans le cas où le point de contact de l'arête 2 est non contactant, et le point de l'arête 3 contactant sur cette figure, on a les relations $\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_1=\lambda_3\end{cases}$, ce qui impose $\lambda_3=0$ au niveau de la loi de contact.

Or la contribution sur l'arête 3 n'est normalement pas nulle. Elle est déterminée par la formulation faible du Principe des Travaux Virtuels.
Il s'agit en fait du même problème qu'en 5.1.1.
Le choix fait pour résoudre ce problème est le même que pour le problème avec les relations linéaires, i.e. de ne pas assembler dans l'équation de contact la contribution d'un point qui est 'pris' dans une relation d'égalité et qui n'est pas contactant, si un autre point 'pris' dans cette relation d'égalité est contactant.
Dans l'exemple de la Figure 8, cela revient à ne plus imposer $\lambda_2=0$ car le point d'intégration non contactant de l'arête vitale 2 est 'pris' dans la relation d'égalité avec le point contactant de l'arête vitale 3. On a donc seulement $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, ce qui n'impose plus $\lambda_3=0$.
Plus généralement, il ne faut pas assembler dans l'équation de contact les contributions de contact-frottement des points d'intégrations non contactants lorsqu'une relation d'égalité les relie à un point contactant.
Pour faire cela, en formulation aux nœuds sommets [bib9], on définit comme connectant un nœud qui connecte plusieurs arêtes vitales, i.e. le score de ce nœud à la fin de l'algorithme pour satisfaire la condition LBB est strictement supérieur à 1 (sur la Figure 8, le nœud 1 qui connecte les arêtes 2 et 3 est considéré comme connectant).
Ensuite, chaque nœud connectant définit un groupe d'arêtes connectées entre elles. On numérote les groupes d'arêtes de 1 à n_{group} et dans chaque groupe on numérote les arêtes de 1 à $n_{arête}$.
On définit ensuite dans chaque groupe une arête déterminante. Ce sera la seule du groupe dont on assemblera les contributions dans l'équation de contact si aucun point d'intégration du groupe n'est contactant. Par ailleurs si pour le groupe il existe des points d'intégration contactants alors on assemble dans l'équation de contact toutes les contributions contactantes et on n'assemble pas les contributions non contactantes.
On décrit maintenant le choix de l'arête déterminante. Pour la première itération de contact du premier pas de temps, tous les statuts sont identiques, donc on peut choisir arbitrairement l'arête déterminante. Ensuite, à chaque ré-actualisation des statuts de contact, on procède dans la foulée à la ré-actualisation des arêtes déterminantes.
On présente ci-dessous les étapes principales de l'algorithme qui fait cette ré-actualisation et qui est lancé juste après avoir réactualisé les statuts de contact:

- Boucle sur les points d'intégration
  - Si le point d'intégration en cours appartient à un groupe d'arêtes vitales connectées, qu'il devient contactant et qu'il n'est pas sur l'arête déterminante:
    - Boucle sur les points d'intégration du groupe
      On recherche le statut des points sur l'arête déterminante
      - Si le statut des points de l'arête déterminante est non contactant :
        le statut de l'arête en cours devient déterminant à la place de l'autre
      - Fin si
    - Fin de boucle sur les points d'intégration du groupe
  - Fin si

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

• Fin de boucle sur les points d'intégration

5.1.3 Résumé

L'algorithme de sélection détaillé dans les deux paragraphes précédents consiste à intégrer l'équation de contact sur toutes les arêtes contactantes, et à n'intégrer la contribution pour les arêtes non contactantes que si le groupe d'arêtes vitales ne comporte aucune arête contactante. Une seule arête du groupe, dite déterminante, suffit alors.

Ceci s'explique par le fait que la force de contact dans l'équation d'équilibre est implicite dans le cas contactant et explicite dans le cas non-contactant. Dans ce dernier cas, les multiplicateurs de contact n'interviennent nulle part dans l'équilibre: la force est directement mise à 0 par l'intermédiaire des statuts de contact. Étant donné que dans l'équation de contact on ne peut assembler des termes de statuts différents au sein d'un même groupe, on assemble les contributions dues au contact préférentiellement là où elles décrivent une force de réaction intervenant dans l'équilibre, c'est-à-dire sur les arêtes contactantes.

5.2 Conflit entre les relations d'égalités imposées par la condition LBB et les changements de statuts d'adhérence

Si on reprend l'exemple de la figure 7, dans le cas où, cette fois, les 3 points sont contactants, mais où les points 1 et 2 sont glissants et le point 3 est adhérent. On a, en 2D par exemple, la relation linéaire: $\Lambda_1-2\Lambda_2+\Lambda_3=0$ en plus de $\Lambda_1=1;\Lambda_2=1$ ce qui impose $\Lambda_3=1$.
Or la contribution au nœud 3 est normalement strictement inférieure à 1 puisque le point est adhérent (à l'intérieur du cône de frottement), elle est déterminée par la formulation faible du Principe des Travaux Virtuels. On retrouve un risque de non-convergence analogue au contact. Il faut supprimer dans l'équation de frottement au moins l'assemblage de la contribution d'un point qui est 'pris' dans une relation linéaire et qui est glissant dans la loi de frottement. Sur l'exemple de la figure 7, cela revient à ne plus imposer $\Lambda_2=1$ car le point 2 est alors 'pris' dans la relation linéaire.
On a donc seulement $\begin{cases}\Lambda_1-2\Lambda_2+\Lambda_3=0\\ \Lambda_1=1\end{cases}$, ce qui n'impose plus $\Lambda_3=1$.

Avec la nouvelle formulation [bib9] qui consiste à ne stocker les degrés de liberté de contact qu'en des nœuds possédant déjà des degrés de liberté de déplacement, cela revient à ne pas assembler au niveau de la loi de frottement un point d'intégration glissant qui n'est pas sur une arête vitale: on n'assemble alors ni la contribution dans la matrice élémentaire, ni la contribution au second membre de ce point d'intégration (mais l'assemblage est fait pour l'équilibre). La différence majeure avec le cas du statut de contact, est qu'en faisant ainsi pour le frottement, la matrice devient asymétrique. Ce n'est pas un problème car cela rejoint le choix déjà fait au chapitre 4 précédent. Une autre différence avec le contact vient du fait que le point 2 non contactant n'intervient pas dans l'équilibre car χ vaut 0 dans ce cas: si on n'assemble pas sa contribution dans la loi de contact, et que sa valeur normalement nulle n'est pas mise à zéro par l'itération de contact suivante alors elle vaudra $\lambda_2=\lambda_3/2$ car $\lambda_1=0$ par la relation linéaire $\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0$ mais sans que cela ne modifie l'équilibre.

Pour le frottement, le point 2 glissant intervient dans l'équilibre: si on n'assemble pas sa contribution dans la loi de frottement, on n'impose pas que la valeur de Λ soit égale à 1 à l'itération de Newton suivante (elle vaudra $\Lambda_2=(\Lambda_1+\Lambda_3)/2=(1+\Lambda_3)/2<1$ car $\Lambda_3<1$). On risque alors de modifier l'équilibre contrairement au cas du contact. Sachant que la loi de frottement n'impose pas non plus $v_{\tau 2}=0$, deux cas sont alors possibles :

- si ρ_τ est assez grand pour que $g_{\tau 2}=\Lambda_2+\rho_\tau v_{\tau 2}>1$. Le statut du point 2 reste glissant et l'équilibre n'est pas modifié puisqu'on utilise $P_B(g_{\tau 2})$ dans le terme dissipatif associé au frottement;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- si ρ_τ n'est pas assez grand et que $g_{\tau 2}<1$ le statut du point 2 change et devient adhérent.

On assemble à l'itération suivante la loi de frottement qui impose $v_{\tau 2}=0$ et qui conforte le statut adhérent.

De la même façon et pour reprendre l'exemple de la figure 8, dans le cas où, cette fois, les 2 points sont contactants, mais où le point de contact de l'arête 2 est glissant et le point de contact de l'arête 3 est adhérent, on a les relations $\Lambda_1=\Lambda_2=1;\Lambda_1=\Lambda_3$, ce qui impose $\Lambda_3=1$ au niveau de la loi de frottement. Or la contribution sur l'arête 3 est normalement strictement inférieure à 1 puisque le point est adhérent (à l'intérieur du cône de frottement). Le même risque de non-convergence que précédemment est présent.

Comme pour la pression de contact, le semi-multiplicateur de frottement est implicite dans le cas adhérent et explicite dans le cas glissant où nous pouvons l'exprimer sous la forme:

$$\Lambda=-\frac{v_\tau}{\|v_\tau\|} \tag{31}$$

Comme, la différentielle de Λ par rapport à v_τ donnée par:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial v_\tau}=\frac{1}{\|v_\tau\|}\left(Id-\frac{v_\tau\otimes v_\tau}{\|v_\tau\|^2}\right)\underset{v_\tau\to 0}{\to}\infty$$

associée au choix de (31) n'est pas bornée quand la vitesse de glissement devient petite, la formulation purement explicite du glissement n'est pas retenue, et on retient la forme suivante du semi-multiplicateur pour corriger ce défaut :

$$\Lambda=P_{B(0,1)}(\Lambda+\rho_\tau v_\tau)$$

Par conséquent et contrairement à la pression de contact qui n'intervient que dans le cas contactant, le semi-multiplicateur de frottement intervient à la fois en adhérence ou en glissement. Si on assemble sélectivement les arêtes adhérentes dans l'équation de frottement – de la même façon que ce qui a été fait pour les arêtes contactantes dans l'équation de contact – on prend le risque d'observer des oscillations du statut d'adhérence empêchant la convergence car le semi-multiplicateur déterminé par l'équilibre contient les contributions des termes glissants qui ne sont pas prises en compte dans l'équation de frottement (comparativement, dans le cas du contact, toutes les contributions non contactantes n'interviennent pas dans l'équation d'équilibre). On a pu observer de telles oscillations sur le test ssnv209j en implémentant cette technique.

C'est pourquoi il est nécessaire de fixer à priori une arête déterminante par groupe d'arête vitale. Finalement et quel que soit son statut, l'équation de frottement est assemblée sur cette seule arête uniquement (ce qui signifie que l'arête déterminante donne au groupe sa caractéristique glissante ou adhérente et qu'au sein d'un même groupe on ne peut avoir la présence de deux statuts distincts, la valeur résultante du semi-mulitplicateur étant moyennée).

Enfin on récapitule ici l'appel aux algorithmes présentés plus haut :

- Point fixe sur les statuts de contact
  - Itérations de Newton
    -Calcul des contributions de contact-frottement
  - Fin des itération de Newton
  Calcul des des statuts de contact
  Algorithme de ré-actualisation de l'arête déterminante en fonction des statuts de contact
- Fin point fixe sur les statuts de contact

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Bibliographie

1 « eXtended Finite Element Method », Documentation de Référence de *Code_Aster* [R7.02.12].

2 BEN DHIA H., ZARROUG M., "Hybrid frictional contact particles-in elements", Revue Européenne des Eléments Finis, no. 9, pp. 417-430, 2002.

3 « Éléments de contacts dérivés d'une formulation hybride continue », Documentation de Référence de *Code_Aster* [R5.03.52].

4 ALART P., CURNIER A., "A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 9, pp. 353-375, 1991.

5 GENIAUT S., Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles, Thèse de doctorat de l'École Centrale de Nantes, 2006.

6 GUITON M., NISTOR I., MASSIN P., "Réflexion autour des grands glissements avec X-FEM", Compte rendu AMA, CR-AMA-07.031.

7 NISTOR I., GUITON M., MASSIN P., "Compte-rendu de la réunion de 07/03/2007 sur l'implémentation numérique dans *Code_Aster* des grands glissements avec X-FEM", Compte rendu EDF/AMA&IFP, CR-AMA-07.088.

8 « Mise en oeuvre de l'approche grands glissements avec X-FEM », Manuel de descriptif informatique de *Code_Aster* [D90506].

9 BECHET E., MOES N., WOHLMUTH B. I., "A Stable Lagrange Multiplier Space for Stiff Interface Condition within the EXtended Finite Element Method", A paraître

10 SSNP503 – Contact en grands glissements avec X-FEM pour des fissures horizontales, Documentation de Validation de *Code_Aster* n° [V6.03.503]

11 SSNP504 – Contact en grands glissements avec X-FEM pour des fissures obliques, Documentation de Validation de Code_Aster n° [V6.03.504]

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Description des versions du document

Indice doc	Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
A	8.4	I.Nistor EDF/R&D/AMA	Texte initial
B	9.7.4	I.Nistor, P.Massin EDF/R&D/AMA M. SIAVELIS, M. GUITON IFP	Fiche 12608 : éléments triangles, schéma de Simpson et Newton–Cotes, calcul du jeu.
C	10.1.1	P.Massin EDF/R&D/AMA M. SIAVELIS, M. GUITON IFP	Fiche 14123 : introduction des fonds de fissure.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)