Loi de comportement hyper-élastique : matériau presque incompressible

Résumé :

On décrit ici la formulation adoptée pour une loi de comportement hyper-élastique de Signorini. Cette loi est une version généralisée des lois de Mooney-Rivlin souvent adoptées pour les élastomères. Les paramètres caractérisant le matériau sont définis dans DEFI_MATERIAU avec le mot-clé ELAS_HYPER.

Ce modèle est choisi dans la commande STAT_NON_LINE ou DYNA_NON_LINE par l'intermédiaire du mot-clé RELATION ='ELAS_HYPER' sous le mots-clé COMPORTEMENT. Cette relation s'étend à des grandes transformations ; cette fonctionnalité est choisie par l'intermédiaire du mot-clé DEFORMATION = 'GROT_GDEP'. Elle est disponible pour les éléments 3D, 3D_SI, C_PLAN et D_PLAN.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Potentiel de déformation

1.1 Cinématique

On considère un solide Ω soumis à des grandes déformations. Soit $\mathbf{F}$ le tenseur du gradient de la transformation faisant passer la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle déformée Ω_t. On note $\mathbf{X}$ la position d'un point dans Ω_0 et $\mathbf{x}$ la position de ce même point après déformation dans Ω_t. $\mathbf{u}$ est alors le déplacement entre les deux configurations. On a donc :

$$\mathbf{x}=\mathbf{X}+\mathbf{u} \tag{1}$$

Le tenseur du gradient de la transformation s'écrit :

$$\mathbf{F}=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}=\mathbf{I}+\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} \tag{2}$$

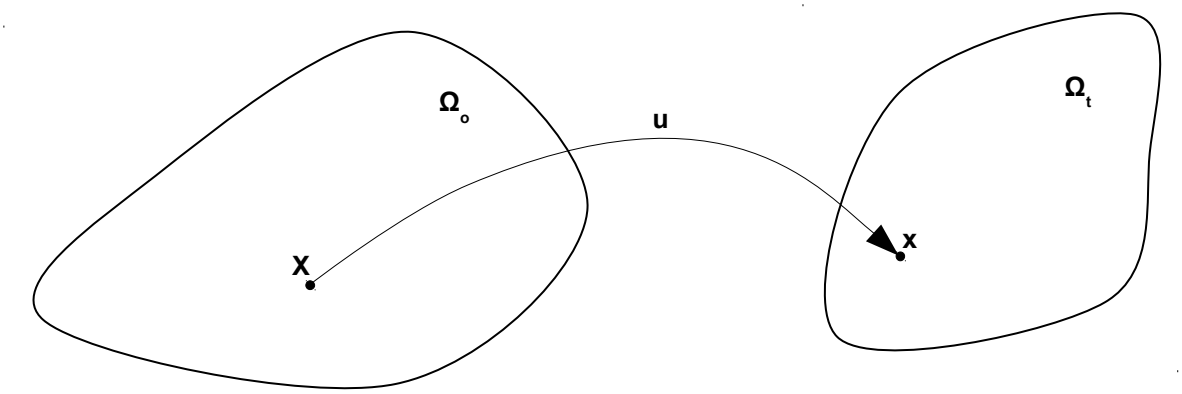


Figure 1.1-1: Transformation de la configuration initiale à finale

Ce tenseur n'est pas le meilleur candidat pour décrire la déformation de la structure. En particulier, il ne vaut pas zéro pour des mouvements de corps rigide et il décrit toute la transformation : le changement de longueur des éléments infinitésimaux mais aussi leur orientation. Or un mouvement de rotation pure n'engendre pas de contraintes et il est donc préférable d'utiliser une mesure des déformations qui ne prend pas en compte cette rotation rigide. Considérons un élément de longueur infinitésimale noté $\mathrm{d}\,\mathbf{X}$ dans la configuration initiale et $\mathrm{d}\,\mathbf{x}$ dans la configuration finale. Si le mouvement est une rotation rigide $\mathbf{R}$, on a :

$$\mathrm{d}\,\mathbf{x}=\mathbf{R}.\mathrm{d}\,\mathbf{X} \tag{3}$$

La norme de ce vecteur après transformation vaut donc

$$d\,\mathbf{x}.d\,\mathbf{x}=\mathbf{R}.d\,\mathbf{X}.\mathbf{R}.d\,\mathbf{X}=\mathbf{R}^{T}.\mathbf{R}.d\,\mathbf{X}.d\,\mathbf{X} \tag{4}$$

Comme la transformation est purement rigide, on a :

$$\mathbf{R}^{T}.\mathbf{R}=\mathbf{I} \tag{5}$$

$\mathbf{R}$ est donc un tenseur orthogonal. Le tenseur gradient de déformation peut être écrit comme le produit d'un tenseur orthogonal et d'un tenseur défini positif (factorisation polaire) :

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}.\mathbf{U} \tag{6}$$

Le tenseur $\mathbf{U}$ (appelé tenseur d'allongement) est donc une première mesure de grandes déformations. Par contre, il nécessite la factorisation polaire de $\mathbf{F}$, ce qui est opération coûteuse. On préfère donc utiliser le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit :

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}.\mathbf{F}=\mathbf{U}^{2} \tag{7}$$

Ce tenseur est symétrique. Les trois invariants du tenseur de Cauchy-Green $\mathbf{C}$ sont donnés par[1] :

1 On note $\mathrm{tr}(\mathbf{C})=C_{11}+C_{22}+C_{33}$ la trace du tenseur $\mathbf{C}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$I_c = \mathrm{tr}(\mathbf{C}) \tag{8}$$

$$II_c = \frac{1}{2}.\left((\mathrm{tr}(\mathbf{C}))^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{C}^2)\right) \tag{9}$$

$$III_c = \det(\mathbf{C}) \tag{10}$$

Le dernier invariant III_c décrit le changement de volume, on peut l'écrire aussi :

$$III_c = (\det \mathbf{F})^2 = J^2 \tag{11}$$

1.2 Potentiel de déformation – cas compressible

Un modèle hyper-élastique suppose l'existence d'un potentiel densité d'énergie interne Ψ, fonction scalaire de la mesure des déformations. Si l'on considère un comportement isotrope, la fonction Ψ doit l'être aussi. On montre que si la fonction Ψ ne dépend que des invariants du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}$, alors elle décrit un comportement isotrope. Le potentiel est donc une fonction de ces trois invariants :

$$\Psi = \Psi\left(I_c, II_c, III_c\right) \tag{12}$$

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est obtenu par dérivation de ce potentiel par rapport aux déformations (voir [R5.03.20]) :

$$\mathbf{S} = 2.\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \tag{13}$$

La forme la plus générale d'un potentiel est polynomiale. Elle s'écrit en fonction des invariants du tenseur de Cauchy-Green droit et des paramètres matériaux C_{pqr} selon Rivlin :

$$\Psi = \sum_{(p,q,r)=0}^{\infty} C_{pqr}.\left(I_c - 3\right)^p.\left(II_c - 3\right)^q.\left(III_c - 1\right)^r \tag{14}$$

avec $C_{000} = 0$.

Il existe des formes particulières de ce potentiel qui sont utilisées très fréquemment, avec $r = 0$:

	p		q
	1	2	1
	C_{10}	C_{20}	C_{01}
Signorini	OUI	OUI	OUI
Mooney-Rivlin	OUI	NON	OUI
Néo-Hookéen	OUI	NON	NON

1.3 Potentiel de déformation – cas incompressible

1.3.1 Principe

La plupart des matériaux hyper-élastiques (comme les élastomères) sont incompressibles, c'est-à-dire :

$$\det \mathbf{F} = 1 \tag{15}$$

Et donc le troisième invariant III_c vaut donc :

$$III_c = 1 \tag{16}$$

Le potentiel hyper-élastique en mode incompressible se ré-écrit donc :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Psi = \sum_{(p,q)=0}^{\infty} C_{pq} . \left(I_c - 3 \right)^p . \left(II_c - 3 \right)^q \tag{17}$$

Malheureusement, une telle écriture conduit à des problèmes numériques sévères (sauf pour le cas des contraintes planes). Nous allons donc proposer une nouvelle écriture qui permet de résoudre de manière plus efficace le cas de l'incompressibilité et qui a en plus le bon goût d'être aussi valable en mode compressible, avec un choix judicieux (et facile) des coefficients.

1.3.2 Tenseur de Cauchy-Green droit modifié

On commence par définir un nouveau tenseur de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}^*$ (dilatations déviatoriques pures ou isochores) tel que :

$$\mathbf{C}^* = J^{-\frac{2}{3}} . \mathbf{C} \tag{18}$$

En effet, $J^{\frac{1}{3}} . \mathbf{I}$ désigne la déformation volumique pure. Ce tenseur reste symétrique. Ses invariants sont :

$$I_c^* = J^{-\frac{2}{3}} . I_c \tag{19}$$

$$II_c^* = J^{-\frac{4}{3}} . II_c \tag{20}$$

$$III_c^* = 1 \tag{21}$$

Sachant que :

$$J = \left(C_{11} . C_{22} . C_{33} - C_{12}^2 . C_{33} - C_{23}^2 . C_{11} + 2 . C_{12} . C_{13} . C_{23} - C_{13}^2 . C_{22} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

Avec :

$$I_c^* = \frac{C_{11} + C_{22} + C_{33}}{J^{2/3}} \tag{23}$$

Et :

$$II_c^* = \frac{C_{22} . C_{33} + C_{11} . C_{33} + C_{11} . C_{22}}{J^{4/3}} \tag{24}$$

Ces invariants sont aussi appelé invariants **réduits** de $\mathbf{C}$.

1.3.3 Potentiel de déformation modifié

Si on exprime le potentiel de déformation à l'aide des invariants réduits de $\mathbf{C}$, on peut décomposer le potentiel en deux parties :

$$\Psi = \Psi^{iso} + \Psi^{vol} \tag{25}$$

Il y a la partie Ψ^{iso} qui correspond aux déformations isochores ($J = 1$) :

$$\Psi^{\text{iso}} = \sum_{p,q=0}^{\infty} C_{pq} . \left(I_c^* - 3 \right)^p . \left(II_c^* - 3 \right)^q \tag{26}$$

Et la partie Ψ^{vol} qui correspond aux déformations volumiques ($J \neq 1$) :

$$\Psi^{\text{vol}} = \frac{K}{2} . \left(J - 1 \right)^2 \tag{27}$$

K est le coefficient de compressibilité. Cette formulation permet de tenir compte des effets incompressible et compressible :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1. Dans le cas incompressible, et dans le cadre d'une formulation par éléments finis le paramètre K joue le rôle d'un coefficient de pénalisation de la condition d'incompressibilité ;
2. Dans le cas compressible ce même coefficient traduit une propriété matérielle : la compressibilité hydrostatique.

Si le modèle caractérisant le matériau est de type Mooney-Rivlin ($p=q=1$), K peut être donné par :

$$K=\frac{4\left(C_{01}+C_{10}\right)\left(1+\nu\right)}{3\left(1-2\nu\right)} \tag{28}$$

Dans le cas des petites déformations, $E=4(C_{01}+C_{10})(1+\nu)$ représente le module de Young tandis que $G=2\left(C_{01}+C_{10}\right)$ représente le module de cisaillement.

1.3.4 Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2

Le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff 2, représentant les contraintes mesurées dans la configuration initiale, s'écrit :

$$\mathbf{S}=2.\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} \tag{29}$$

Le facteur 2 permet de retrouver l'expression habituelle en petites déformations. On peut le séparer en deux parties :

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}^{\mathrm{iso}}+\mathbf{S}^{\mathrm{vol}} \tag{30}$$

Avec :

$$\mathbf{S}^{\mathrm{iso}}=2.\frac{\partial\Psi^{\mathrm{iso}}}{\partial\mathbf{C}} \tag{31}$$

Et :

$$\mathbf{S}^{\mathrm{vol}}=2.\frac{\partial\Psi^{\mathrm{vol}}}{\partial\mathbf{C}} \tag{32}$$

$\mathbf{S}^{\mathrm{iso}}$ est le tenseur des contraintes isochores et $\mathbf{S}^{\mathrm{vol}}$ est celui des contraintes volumiques ou hydrostatiques.

1.3.5 Tenseur d'élasticité Lagrangien

Le tenseur de raideur élastique (matrice « tangente » pour le problème de Newton) est donné par la double dérivation du potentiel :

$$\mathbf{K}=4.\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{C}.\partial\mathbf{C}}=4.\frac{\partial^2\Psi^{\mathrm{iso}}}{\partial\mathbf{C}.\partial\mathbf{C}}+4.\frac{\partial^2\Psi^{\mathrm{vol}}}{\partial\mathbf{C}.\partial\mathbf{C}} \tag{33}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Expressions analytiques

2.1 Cas des contraintes

Nous allons détailler l'expression analytique des contraintes de Piola-Kirchhoff pour le potentiel hyper-élastique de Signorini ($p=2$ et $q=1$) dans le cas incompressible. On a donc le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff 2, représentant les contraintes mesurées dans la configuration initiale qui s'écrit :

$$\mathbf{S}=2.\frac{\partial \Psi^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}}+2.\frac{\partial \Psi^{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} \tag{34}$$

Avec les deux potentiels :

$$\begin{aligned}\Psi^{\text{iso}}&=C_{10}.\left(I_c^*-3\right)+C_{01}.\left(II_c^*-3\right)+C_{20}.\left(I_c^*-3\right)^2\\ \Psi^{\text{vol}}&=\frac{K}{2}.\left(J-1\right)^2\end{aligned} \tag{35}$$

Pour obtenir les contraintes, il faut dériver le potentiel :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{ij}^{iso}&=2\frac{\partial \Psi^{iso}}{\partial I_c^*}.\frac{\partial I_c^*}{\partial \mathbf{C}_{ij}}+2\frac{\partial \Psi^{iso}}{\partial II_c^*}.\frac{\partial II_c^*}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\\ \mathbf{S}_{ij}^{vol}&=2\frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J}.\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\end{aligned} \tag{36}$$

Avec :

$$\frac{\partial \Psi^{iso}}{\partial I_c^*}=C_{10}+2.C_{20}.\left(I_c^*-3\right)\quad\frac{\partial \Psi^{iso}}{\partial II_c^*}=C_{01}\quad\frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J}=K.\left(J-1\right) \tag{37}$$

Ainsi que les dérivées des invariants réduits (*cf.* page 26 de [5] pour les dérivées des invariants d'un tenseur) :

$$\frac{\partial I_c^*}{\partial \mathbf{C}_{ij}}=III_c^{-\frac{1}{3}}.\left(\delta_{ij}-\frac{1}{3}.\mathbf{C}_{ij}^{-1}.I_c\right) \tag{38}$$

$$\frac{\partial II_c^*}{\partial \mathbf{C}_{ij}}=III_c^{-\frac{2}{3}}.\left(I_c.\delta_{ij}-\mathbf{C}_{ij}-\frac{2}{3}.\mathbf{C}_{ij}^{-1}.II_c\right) \tag{39}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}_{ij}}=\frac{1}{2}.III_c^{\frac{1}{2}}.\mathbf{C}_{ij}^{-1} \tag{40}$$

Voici donc l'expression analytique des contraintes volumiques :

$$\mathbf{S}_{ij}^{vol}=K.\left(J-1\right).J.\mathbf{C}_{ij}^{-1} \tag{41}$$

Et des contraintes isochores :

$$\mathbf{S}_{ij}^{iso}=2\left(\left(C_{10}+2.C_{20}.\left(I_c^*-3\right)\right).J^{-\frac{2}{3}}.\left(\delta_{ij}-\frac{1}{3}.\mathbf{C}_{ij}^{-1}.I_c\right)+C_{01}.J^{-\frac{4}{3}}.\left(I_c.\delta_{ij}-\mathbf{C}_{ij}-\frac{2}{3}.\mathbf{C}_{ij}^{-1}.II_c\right)\right) \tag{42}$$

2.2 Cas de la matrice élastique

Nous allons détailler l'expression analytique de la matrice élastique pour le potentiel hyper-élastique de Signorini ($p=2$ et $q=1$) dans le cas incompressible. On a donc :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{K}=4.\frac{\partial^2\Psi^{\text{iso}}}{\partial\mathbf{C}.\partial\mathbf{C}}+4.\frac{\partial^2\Psi^{\text{vol}}}{\partial\mathbf{C}.\partial\mathbf{C}} \tag{43}$$

Il faut donc dériver (deux fois) le potentiel :

$$\mathbf{K}_{ijkl}^{iso}=\frac{\partial^2\Psi^{iso}}{\partial^2 I_c^*}.\frac{\partial^2 I_c^*}{\partial\mathbf{C}_{ij}.\partial\mathbf{C}_{kl}}+\frac{\partial^2\Psi^{iso}}{\partial^2 II_c^*}.\frac{\partial^2 II_c^*}{\partial\mathbf{C}_{ij}.\partial\mathbf{C}_{kl}}$$
$$\mathbf{K}_{ijkl}^{vol}=\frac{\partial^2\Psi^{vol}}{\partial^2 J}.\frac{\partial^2 J}{\partial\mathbf{C}_{ij}.\partial\mathbf{C}_{kl}} \tag{44}$$

Les constantes matériaux sont supposées constantes. On a donc :

$$\frac{\partial^2\Psi^{iso}}{\partial^2 I_c^*}=2.\mathrm{C}_{20}\quad\frac{\partial^2\Psi^{iso}}{\partial^2 II_c^*}=0\quad\frac{\partial^2\Psi^{vol}}{\partial^2 J}=K \tag{45}$$

On voit que le coefficient K est bien un coefficient de pénalisation et que son choix impacte le conditionnement de la matrice. Les dérivées des invariants réduits :

$$\frac{\partial^2 I_c^*}{\partial\mathbf{C}_{ij}.\partial\mathbf{C}_{kl}}=III_c^{-\frac{1}{3}}.\left(\mathbf{C}_{ki}^{-1}.\mathbf{C}_{lj}^{-1}.I_c-\mathbf{C}_{ij}^{-1}.\delta_{kl}-\mathbf{C}_{kl}^{-1}.\delta_{ij}+\frac{1}{3}.\mathbf{C}_{kl}^{-1}.\mathbf{C}_{ij}^{-1}.I_c\right) \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 II_c^*}{\partial\mathbf{C}_{ij}.\partial\mathbf{C}_{kl}}=\begin{array}{c}-\frac{2}{3}.III_c^{-\frac{2}{3}}.\mathbf{C}_{kl}^{-1}.\left(I_c.\delta_{ij}-\mathbf{C}_{ij}-\frac{2}{3}.\mathbf{C}_{ij}^{-1}.II_c\right)+\\ III_c^{-\frac{2}{3}}.\left(\delta_{kl}.\delta_{ij}-\delta_{ik}.\delta_{jl}+\frac{2}{3}.\mathbf{C}_{ki}^{-1}.\mathbf{C}_{lj}^{-1}.II_c-\frac{2}{3}.\mathbf{C}_{ij}^{-1}.\left(I_c.\delta_{kl}-\mathbf{C}_{kl}\right)\right)\end{array} \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\mathbf{C}_{ij}.\partial\mathbf{C}_{kl}}=\frac{1}{4}.III_c^{\frac{1}{4}}.\left(\mathbf{C}_{kl}^{-1}.\mathbf{C}_{ij}^{-1}-2.\mathbf{C}_{ki}^{-1}.\mathbf{C}_{lj}^{-1}\right) \tag{48}$$

3 Références bibliographiques

[1] G. A. Holzapfel – « Nonlinear solid mechanics » – Wiley – 2001.

[2] J. Bonet – « Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis » – Cambridge University Press – 1997.

[3] M. A. Crisfield – « Nonlinear finite element analysis of solid and structures » – Wiley – 1991.

[4] A. Delalleau – « Analyse du comportement mécanique de la peau *in vivo* » – Thèse de doctorat Université Jean Monnet de Saint Étienne – 2007.

[5] C. Truesdell, W. Nool - The Non-Linear Field Theories of Mechanics, vol. 3, Springer, 2004.

4 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
8.4	M. Abbas, T. Baranger EDF-R&D/AMA, UCBL	texte inital
8.5	M.Abbas, EDF-R&D/AMA	Correction page 2, cf. fiche REX 11026
10.1	J.M.Proix EDF-R&D/AMA	Remplacement de GREEN par GROT_DEP
10.2	M. Abbas, EDF-R&D/AMA	Ré-écriture complète, expressions analytiques des contraintes et de la matrice tangente

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)