# Relations de comportement non linéaires 1D

**Résumé :**
Ce document décrit les quantités calculées par l'opérateur STAT_NON_LINE nécessaires à la mise en œuvre de l'algorithme non linéaire quasi statique décrit en [R5.03.01] dans le cas des comportements élastoplastiques ou viscoplastiques monodimensionnels. Ces comportements, sauf mention contraire, sont applicables aux éléments de BARRE, aux éléments de poutre et poutres multifibres (direction axiales seulement) et aux éléments d'armature de béton (modélisation GRILLE).

Les comportements décrits dans ce document sont :
- le comportement de Von Mises à écrouissage isotrope linéaire : VMIS_ISOT_LINE, et quelconque VMIS_ISOT_TRAC,
- le comportement de Von Mises à écrouissage cinématique linéaire : VMIS_CINE_LINE,
- le comportement de Von Mises à écrouissage linéaire, non symétrique en traction et compression : avec restauration du centre du domaine élastique : VMIS_ASYM_LINE. Ce dernier a été développé pour modéliser l'action du sol sur les Câbles à Isolation Gazeuse,
- le comportement de PINTO-MENEGOTTO qui permet de représenter le comportement élasto-plastique uniaxial des armatures du béton armé. Ce modèle traduit la non linéarité de l'écrouissage des barres sous chargement cyclique et prend en compte l'effet Bauschinger. Il permet de plus de simuler le flambement des armatures en compression. Cette relation est disponible dans le *Code_Aster* pour les éléments de barre et les éléments de grille,
- les comportements viscoplastiques avec effet de l'irradiation : VISC_IRRA_LOG, GRAN_IRRA_LOG.
- le comportement de MAZARS dans sa version 1D. La version 1D du modèle de MAZARS permet de rendre compte de la restauration de rigidité en cas de refermeture des fissures.
- le comportement pour modéliser la relaxation des câbles pré-contraints.

La résolution est faite cas par une méthode d'intégration implicite, sauf mention contraire, à partir de l'instant de calcul précédent, on calcule le champ de contraintes résultant d'un incrément de déformation, et le comportement tangent qui permet de construire les matrices tangentes.
On décrit enfin une méthode, similaire à la méthode due à R.de Borst [R5.03.03] permettant d'utiliser tous les comportements disponibles en 3D dans les éléments 1D.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des Matières

1 Utilisation des relations de comportement 1D....4
1.1 Relations de comportement 1D dans le Code_Aster....4
1.2 Notations générales....4
1.3 Changement de variables....4
1.3.1 Calcul des déformations (petites déformations)....5
1.3.2 Calcul des efforts généralisés (contraintes intégrées)....5
2 Comportement de Von-Mises à écrouissage isotrope linéaire : VMIS_ISOT_LINE ou VMIS_ISOT_TRAC....6
2.1 Équations du modèle VMIS_ISOT_LINE....6
2.2 Intégration de la relation VMIS_ISOT_LINE....7
2.3 Variables internes....8
3 Comportement de Von Mises, écrouissage cinématique linéaire 1D : VMIS_CINE_LINE....9
3.1 Équation du modèle VMIS_CINE_LINE....9
3.2 Intégration de la relation VMIS_CINE_LINE....10
3.3 Variables internes....11
4 Comportement de Von Mises, écrouissage cinématique linéaire 1D : vmis_CINE_gc....12
4.1 Équation du modèle VMIS_CINE_GC....12
4.2 Intégration de la relation VMIS_CINE_GC....12
4.3 Variables internes....12
5 Comportement de Von Mises à écrouissage linéaire asymétrique : VMIS_ASYM_LINE....13
5.1 Équations du modèle VMIS_ASYM_LINE....13
5.1.1 Comportement asymétrique en traction et en compression....13
5.2 Intégration du comportement VMIS_ASYM_LINE....14
5.3 Variables internes....15
6 Modèle de PINTO_MENEGOTTO....16
6.1 Formulation du modèle....16
6.1.1 Chargement monotone....16
6.1.2 Chargement cyclique....17
6.1.3 Cas du flambage inélastique....20
6.2 Implantation dans Code_Aster....22
6.3 Variables internes....23
7 Comportements VISC_IRRA_LOG et GRAN_IRRA_LOG....24
7.1 Formulation du modèle....24
7.2 Variables internes....24
7.3 Intégration implicite....24
8 Modèle de MAZARS en 1D....26
8.1 Équations du modèle....26
8.2 Variables internes....27



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Loi de comportement RELAX_ACIER....29
9.1 Formulation du modèle....29
9.2 Variables internes....29
9.3 Intégration explicite....29
9.4 Identification des paramètres....30
9.5 Résultat d'une identification....30
9.6 Utilisation dans code_aster....31
10 Méthode pour utiliser en 1D tous les comportements 3D....32
11 Bibliographie....34



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Utilisation des relations de comportement 1D

## 1.1 Relations de comportement 1D dans le *Code_Aster*

Les relations traitées dans ce document sont :

| | |
|---|---|
| VMIS_ISOT_LINE | Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire symétrique |
| VMIS_ISOT_TRAC | Von Mises avec écrouissage isotrope quelconque |
| VMIS_CINE_LINE | Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire symétrique. |
| ECRO_CINE_1D | Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire symétrique. |
| GRILLE_ISOT_LINE | Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire symétrique |
| GRILLE_CINE_LINE | Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire symétrique |
| PINTO_MENEGOTTO | Comportement des armatures de béton armé |
| GRILLE_PINTO_MEN | Comportement des armatures de béton armé |
| VMIS_ASYM_LINE | Von Mises avec écrouissage linéaire asymétrique et restauration |
| VISC_IRRA_LOG, GRAN_IRRA_LOG | Comportement viscoplastique des assemblages combustibles : Modèles issus des essais REFLET et FLETAN |
| MAZARS | Comportement de MAZARS dans sa version $1\mathrm{D}$ . |
| RELAX_ACIER | Comportement pour modéliser la relaxation des câbles pré-contraints. |

Ces relations de comportement (incrémentales) sont données dans l'opérateur STAT_NON_LINE [U4.51.03] sous le mot clé facteur COMPORTEMENT, par le mot clé RELATION [U4.51.03]. Elles ne sont valables qu'en petites déformations. n décrit pour chaque relation de comportement le calcul du champ de contraintes à partir d'un incrément de déformation donné (cf. algorithme de Newton [R5.03.01]), le calcul des forces **nodales** $R$ et de la matrice tangente $K_i^n$ .

## 1.2 Notations générales

Toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $-$ .

Les quantités évaluées à l'instant $t+\Delta t$ ne sont pas indicées.

Les incréments sont désignés par $\Delta$ . On a ainsi :

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(t+\Delta t)=\mathbf{Q}^{-}(t)+\Delta\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{-}+\Delta\mathbf{Q}$$

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{\sigma}$ | tenseur des contraintes (en 1D, on ne s'intéresse qu'à l'unique composante non nulle uniaxiale). |
| $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ | opérateur déviateur : $\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ . |
| $(\ )eq$ | valeur équivalente de Von Mises, égale en 1D à la valeur absolue |
| $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ | incrément de déformation. |
| $\mathbf{A}$ | tenseur d'élasticité, égal en 1D au module d'Young E |
| $\lambda, \mu, E, K$ | coefficients de l'élasticité isotrope. |
| $\alpha$ | coefficient de dilatation thermique sécant. |
| $T$ | température. |
| $(\ )_+$ | partie positive. |
| $P$ | déformation plastique cumulée |
| $\varepsilon^p$ | déformation plastique |

## 1.3 Changement de variables



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Quel que soit le type d'élément fini faisant référence à une loi de comportement 1D, il faut effectuer un changement de variables pour passer des quantités élémentaires (efforts, déplacements) aux contraintes et déformations.

### 1.3.1 Calcul des déformations (petites déformations)

Pour chacun des éléments finis de *Code_Aster*, dans STAT_NON_LINE, l'algorithme global (Newton) fournit à la routine élémentaire, qui intègre le comportement, un accroissement du champ de déplacement.
Pour les éléments de barre, on calcule la déformation (une seule composante axiale) par :

$$\varepsilon = \frac{u(l)-u(0)}{l},$$

et l'accroissement de déformation par :

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta u(l)-\Delta u(0)}{l},$$

Pour les éléments de grille (modélisations GRILLE et GRILLE_MEMBRANE), on calcule la déformation membranaire comme pour les éléments de coques DKT. Simplement, une seule direction correspond physiquement aux directions d'armatures. On se retrouve donc en présence d'un comportement 1D.
D'autre part, en petites déformations, pour tous les modèles décrits dans ce document, on écrit pour tout instant la partition des déformations sous la forme d'une contribution élastique, de dilatation thermique, et de déformation plastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}(t)+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}(t)+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}(t) \text{ avec}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}(t)=\mathbf{A}^{-1}(T(t))\boldsymbol{\sigma}(t)=\frac{1}{E(T)}\boldsymbol{\sigma}(t)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}(t)=\boldsymbol{\alpha}(T(t))(T(t)-T_{ref})\mathbf{Id}$$

### 1.3.2 Calcul des efforts généralisés (contraintes intégrées)

Après intégration du comportement 1D, il faut intégrer la composante de contraintes obtenue, pour fournir à l'algorithme global (Newton) un vecteur contenant les efforts généralisés.
Pour les éléments de barre, on calcule l'effort (uniforme dans l'élément, en supposant que la section est constante) par : $N = S\,\sigma$,

et le vecteur force nodale équivalente (comme pour les éléments de poutre, [R3.08.01]) par :

$$F=\begin{bmatrix}-N\\ N\end{bmatrix}$$

Pour les éléments de GRILLE , on calcule les efforts comme pour les éléments de coques DKT (efforts membranaires) par intégration des contraintes dans l'épaisseur (une seule couche et un seul point d'intégration).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Comportement de Von-Mises à écrouissage isotrope linéaire : VMIS_ISOT_LINE ou VMIS_ISOT_TRAC

## 2.1 Équations du modèle VMIS_ISOT_LINE

Elles sont la restriction du comportement 3D [R5.03.02] au cas uniaxial :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\dot{\bar{p}}\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} = \dot{\bar{p}}\frac{\sigma}{|\sigma|} \\ \frac{\sigma}{E} = \varepsilon - \varepsilon^p - \varepsilon^{th} \\ \sigma_{eq} - R(p) = |\sigma| - R(p) \le 0 \\ \begin{cases} \dot{\bar{p}} = 0 \; si \; \sigma_{eq} - R(p) < 0 \\ \dot{\bar{p}} \ge 0 \; si \; \sigma_{eq} - R(p) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

avec :

- $\dot{\varepsilon}^p$ vitesse de déformation plastique,
- $p$ déformation plastique cumulée,
- $\varepsilon^{th} = \alpha(T - T_{ref})$ déformation thermique,
- $R(p) = \frac{E E_T}{E - E_T} p + \sigma_y$ fonction d'écrouissage linéaire isotrope, ou $R(p)$ bien affine par morceaux, déduite de la courbe de traction.

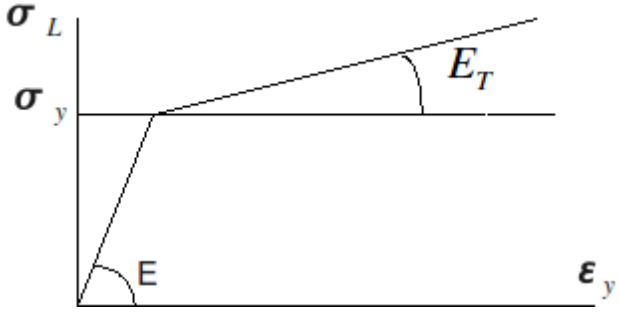
Dans le cas VMIS_ISOT_LINE, les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_LINE ou ECRO_LINE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

/ ECRO_LINE = ( D_SIGM_EPSI = $E_T$ , SY = $\sigma_y$ )
/ ECRO_LINE_FO = ( D_SIGM_EPSI = $E_T$ , SY = $\sigma_y$ )

Dans le cas VMIS_ISOT_TRAC, les données des caractéristiques des matériaux sont fournies sous le mot clé facteur TRACTION de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

TRACTION = _F (SIGM = courbe_traction)

courbe_traction représente la courbe de traction, point par point. Le premier point permet de définir la limite d'élasticité $\sigma_y$ et le module d'Young $E$ [R5.03.02].




ECRO_LINE_FO correspond au cas où $E_T$ et $\sigma_y$ dépendent de la température et sont alors calculés pour la température du point de Gauss courant. Le module d'Young $E$ et le coefficient de Poisson $v$


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

sont ceux fournis sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO. Dans ce cas la courbe de traction est la suivante :

$$\begin{cases} \sigma_L = E\,\varepsilon_L & si\ \varepsilon_L < \dfrac{\sigma_y}{E} \\ \sigma_L = \sigma_y + E_T\left(\varepsilon_L - \dfrac{\sigma_y}{E}\right) & si\ \varepsilon_L \geq \dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$

Lorsque le critère est atteint on a :

$\sigma_L - R(p) = 0$ , donc $\sigma_L - R\left(\varepsilon_L - \dfrac{\sigma_L}{E}\right) = 0$ d'où :

$$R(p) = \frac{E_T E}{E - E_T}\,p + \sigma_y = H\,p + \sigma_y$$

Dans le cas d'une courbe de traction, la démarche est identique à [R5.03.01].

## 2.2 Intégration de la relation VMIS_ISOT_LINE

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, de façon analogue à l'intégration 3D [R5.03.02] on obtient :

$$\begin{cases} \left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| - R(p^- + \Delta p) \leq 0 \\ E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) - \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^- = E\,\Delta p\,\dfrac{\sigma^- + \Delta\sigma}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right|} \\ \Delta p \geq 0 \quad si \quad \left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| = R\left(p^- + \Delta p\right) \\ \Delta p = 0 \quad si \quad \left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| < R\left(p^- + \Delta p\right) \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- $\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| < R\left(p^- + \Delta p\right)$

  dans ce cas $\Delta p = 0$ soit $\sigma = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^-$

  donc $\left|\sigma^- \dfrac{E}{E^-} + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)\right| < R(p^-)$

- $\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| = R(p^- + \Delta p)$

  dans ce cas $\Delta p \geq 0$

  donc $\left|\dfrac{\sigma^- E}{E^-} + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)\right| \geq R(p^-)$ .

On en déduit l'algorithme de résolution :

posons $\sigma^e = \dfrac{E\,\sigma^-}{E^-} + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)$

si $\left|\sigma^e\right| \leq R(p^-)$ alors $\Delta p = 0$ et $\Delta\sigma = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)$

si $\left|\sigma^e\right| > R(p^-)$ alors il faut résoudre :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma^e=\sigma^-+\Delta\sigma+E\Delta p\frac{\sigma^-+\Delta\sigma}{\left|\sigma^-+\Delta\sigma\right|}$$

$$\sigma^e=\left(1+\frac{E\Delta p}{\left|\sigma^-+\Delta\sigma\right|}\right)\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)$$

donc en prenant la valeur absolue :

$$\left|\sigma^e\right|=\left(1+\frac{E\Delta p}{\left|\sigma^-+\Delta\sigma\right|}\right)\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)$$

soit, en utilisant $\begin{aligned}\left|\sigma^-+\Delta\sigma\right|&=R\left(p^-+\Delta p\right)\\ \left|\sigma^e\right|&=R\left(p^-+\Delta p\right)+E\Delta p\end{aligned}$.

On en déduit donc :

- dans le cas d'un écrouissage linéaire : $\Delta p=\frac{\left|\sigma^e\right|-\left(\sigma_y+Hp^-\right)}{E+H}$
- et dans le cas d'un écrouissage quelconque, la courbe $R(p)$ étant affinée par morceaux, on résout directement l'équation en $\Delta p$ : de la même façon $E\Delta p+R\left(p^-+\Delta p\right)=\left|\sigma^e\right|$ qu'en 3D [R5.03.02].

Remarquons au passage que : $\frac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}=\frac{\sigma}{R(p)}$

alors $\sigma=\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)=\frac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}R(p)=\frac{\sigma^e}{1+\frac{E\Delta p}{R(p)}}$

De plus, l'option FULL_MECA permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_i^n$ à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

si $\left|\sigma^e\right|>R\left(p^-\right)$ $\quad\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E_T$

sinon $\quad\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E$

**Remarque :**

*L'option RIGI_MECA_TANG qui permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_i^0$ utilisée dans la phase de prédiction de l'algorithme de Newton, tient compte de l'indicateur de plasticité à l'instant précédent :*

*si* $\chi=1$ $\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E_T$ *si* $\chi=0$ $\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E$

## 2.3 Variables internes

La relation de comportement VMIS_ISOT_LINE produit deux variables internes : $p$ et $\chi$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Comportement de Von Mises, écrouissage cinématique linéaire 1D : VMIS_CINE_LINE

## 3.1 Équation du modèle VMIS_CINE_LINE

Pour des raisons de performances la relation est écrite en 1D. Elles sont la restriction du comportement 3D ([R5.03.02] et [R5.03.16]) au cas uniaxial. Le comportement 3D s'écrit :

$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}\right)$ avec $\mathbf{K}$ opérateur d'élasticité

$\mathbf{X} = C\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$

$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}, \mathbf{X}) = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{\mathbf{eq}} - \sigma_y$ avec $\mathbf{A}_{\mathbf{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}}$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} = \dot{p}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\mathbf{p}\frac{\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{\mathbf{eq}}} \quad \begin{cases} \text{si } F < 0 & \dot{p} = 0 \\ \text{si } F = 0 & \dot{p} \geq 0 \end{cases}$$

Dans le cas uniaxial, les tenseurs s'écrivent :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma\,\mathbf{D} \qquad \mathbf{X} = X\,\mathbf{D} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \frac{3}{2}\varepsilon^{p}\mathbf{D} \text{ avec } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2/3 & & \\ & -1/3 & \\ & & -1/3 \end{bmatrix}$$

Tant que le chargement est monotone, on obtient immédiatement les relations suivantes :

$$p = \varepsilon^{p} \qquad X = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^{p} \qquad \sigma = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^{p} + \sigma_y \qquad \sigma = F(\varepsilon) = \sigma_y + \frac{E \cdot E_T}{E - E_T}p$$

C est déterminée par : $C = \frac{2}{3}\frac{E\,E_T}{E - E_T}$ . On pose : $H = \frac{E\,E_T}{E - E_T} = \frac{3}{2}C$

La relation de comportement 1D s'écrit alors :

$$\begin{cases} \left|\sigma^{-} + \Delta\sigma - X^{-} - \Delta X\right| \\ E\,\Delta\varepsilon^{p} = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) - \left(\sigma^{-} + \Delta\sigma\right) + \frac{E}{E^{-}}\sigma^{-} \\ X = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^{p} = H\,\varepsilon^{p} \\ \left|\sigma - X\right| - \sigma_y \leq 0 \\ \begin{cases} \dot{p} = 0 \; si \left|\sigma - X\right| - \sigma_y < 0 \\ \dot{p} \geq 0 \; si \left|\sigma - X\right| - \sigma_y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_LINE ou ECRO_LINE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01] :

/ ECRO_LINE = ( D_SIGM_EPSI = $E_T$ , SY = $\sigma_y$ )

/ ECRO_LINE_FO = ( D_SIGM_EPSI = $E_T$ , SY = $\sigma_y$ )



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.2 Intégration de la relation VMIS_CINE_LINE

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, de façon analogue à l'intégration 3D ([R5.03.02] et [R5.03.16]) on obtient :

$$\begin{cases} \left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| - \sigma_y \leq 0 \\ E\,\Delta\varepsilon^p = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) - \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^- \\ \Delta\varepsilon^p = \Delta p \dfrac{\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right|} \\ \dfrac{X}{H} - \dfrac{X^-}{H^-} = \Delta\varepsilon^p \\ \Delta p \geq 0 \quad si \quad \left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| = \sigma_y \\ \Delta p = 0 \quad si \quad \left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| < \sigma_y \end{cases}$$

avec $\Delta\varepsilon^{th} = \alpha\left(T - T_{ref}\right) - \alpha^-\left(T^- - T_{ref}\right)$

Deux cas se présentent :

- $\left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| < \sigma_y$ dans ce cas $\Delta p = 0$ soit $\sigma = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^- - \dfrac{H}{H^-}X^-$ donc $\left|\sigma^- \dfrac{E}{E^-} - X^- \dfrac{H}{H^-} + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)\right| < R(p^-)$,
- sinon $\Delta p \geq 0$.

Pour simplifier les écritures on posera : $\sigma^e = \dfrac{E}{E^-}\sigma^- - \dfrac{H}{H^-}X^- + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)$.

On en déduit l'algorithme de résolution :

1) si $\left|\sigma^e\right| \leq \sigma_y$ alors $\Delta p = 0, \quad X = X^- \dfrac{H}{H^-}, \quad \sigma = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^-$

2) sinon il faut résoudre :

$$\begin{cases} E\,\Delta\varepsilon^p = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}) - \Delta\sigma = \sigma^e - \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right) + X^- \dfrac{H}{H^-} \\ \Delta\varepsilon^p = \Delta p \dfrac{\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right|} = \Delta p \dfrac{\sigma - X}{\left|\sigma - X\right|} \\ X - \dfrac{H}{H^-}X^- = H\,\Delta\varepsilon^p \\ \left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| - \sigma_y = 0 \end{cases}$$

Remarquons que : $\dfrac{H}{H^-}X^- = X - H\,\Delta\varepsilon^p$.

On déduit alors de la première équation : $\sigma^e = \sigma - X + (E + H)\Delta\varepsilon^p$

On obtient donc, en éliminant $\sigma - X$ de la deuxième équation :

$$\Delta\varepsilon^p = \sigma^e \frac{\Delta p}{(E + H)\Delta p + \sigma_y}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En remplaçant $\Delta\varepsilon^p$ dans la relation entre $\sigma^e$ et $\sigma - X$, on obtient :

$$\sigma - X = \sigma^e \left( \frac{\sigma_y}{(E+H)\Delta p + \sigma_y} \right)$$

En prenant la valeur absolue des deux membres de l'équation précédente, on trouve $\Delta p$ :

$$(E+H)\Delta p + \sigma_y = \left|\sigma^e\right|$$

Une fois $\Delta p$ déterminé , on peut calculer :

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta p \frac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}$$

$$X = X^- + \Delta X = \frac{H X^-}{H^-} + H\Delta p \frac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}$$

et en utilisant : $\frac{\sigma - X}{\sigma_y} = \frac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}$ , on obtient directement : $\sigma = \sigma_y \frac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|} + X$

De plus, l'option FULL_MECA permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_i^n$ à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

si $\left|\sigma^e\right| > R\left(p^-\right)$ $\quad \frac{\delta\partial}{\delta\varepsilon} = E_T$

sinon $\quad \frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E$

L'option RIGI_MECA_TANG qui permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_i^0$ utilisée dans la phase de prédiction de l'algorithme de Newton est obtenue à l'aide de l'indicateur de plasticité $\chi^-$ de l'instant précédent :

- si $\chi^- = 1$ alors $\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E_T$
- si $\chi^- = 0$ alors $\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E$

## 3.3 Variables internes

La relation de comportement VMIS_CINE_LINE produit deux variables internes : $X$ .et $\chi$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Comportement de Von Mises, écrouissage cinématique linéaire 1D : VMIS_CINE_GC

## 4.1 Équation du modèle VMIS_CINE_GC

Pour des raisons de performances la relation est également écrite en 1D pour une utilisation avec des éléments finis de type poutre multifibre. Les équations sont issues de la restriction du comportement 3D ([R5.03.02] et [R5.03.16]) au cas uniaxial.
Les équations du modèle sont les mêmes que celles du § 3.1.

Les données des matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_LINE de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01] :

```
/ ECRO_LINE = _F(
      ♦ D_SIGM_EPSI   =  E_T                          [Réel]
      ♦ SY            =  σ_y                          [Réel]
     ◊ SIGM_LIM       = sigmlim                       [Réel]
     ◊  EPSI_LIM      = epsilim                      [Réel]
)
```

Les opérandes SIGM_LIM et ESPI_LIM permettent de définir les bornes qui correspondent aux états limites de service et ultime, classiquement utilisées lors d'étude en génie civil.

◊ SIGM_LIM = sigmlim
Définition de la contrainte limite.

◊ EPSI_LIM = epslim
Définition de la déformation limite.

Ces bornes sont obligatoires lorsque l'on utilise le comportement VMIS_CINE_GC (Cf. [U4.51.11] Comportements non-linéaires, [U4.42.07] DEFI_MATER_GC). Dans les autres cas elles ne sont pas prises en compte.

## 4.2 Intégration de la relation VMIS_CINE_GC

La méthode d'intégration est identique à celle présentées au § 3.2.

## 4.3 Variables internes

La modélisation supportée est 1D, le nombres de variables internes est de 6.

- $V1$ : Cette variable représente la contrainte divisée par la contrainte limite sigmlim.
- $V2$ : Cette variable représente la déformation totale divisée par la déformation limite epslim.
- $V3$ : Écrouissage cinématique : XCINXX. En 1D seul un scalaire est nécessaire.
- $V4$ : Indicateur plastique : INDIPLAS. Indique si le matériau a dépassé le critère élastique.
- $V5$ : dissipation non récupérable : DISSIP. Lors de calculs sismiques il peut être utile à l'utilisateur de connaître l'énergie dissipée non récupérable. La variable DISSIP représente le cumul d'énergie non récupérable. L'incrément d'énergie non récupérable s'écrit sous la forme :

$$\Delta Eg = \frac{1}{2}\left(E^{+}\Delta\varepsilon - \left(\sigma^{+} - \sigma^{-}\right)\right)\Delta\varepsilon$$

- $V6$ : dissipation thermodynamique : DISSTHER. L'incrément de dissipation thermodynamique s'écrit sous la forme : $\Delta Eg = \sigma_y \dot{p}$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Comportement de Von Mises à écrouissage linéaire asymétrique : VMIS_ASYM_LINE

## 5.1 Équations du modèle VMIS_ASYM_LINE

### 5.1.1 Comportement asymétrique en traction et en compression

C'est un comportement découplé en traction et compression, construit à partir de VMIS_ASYM_LINE, mais avec des limites d'élasticité et des modules d'écrouissage différents en traction et en compression. Nous adoptons un indice $T$ pour la traction et $C$ pour la compression. Le comportement élastique en traction et compression est identique et caractérisé par le même module d'Young. Il y a deux domaines d'écrouissage isotrope définis par $R_T$ et $R_C$. Les deux domaines sont indépendants l'un de l'autre.

| | |
|---|---|
| $YT$ | limite d'élasticité en traction. En valeur absolue. |
| $YC$ | limite d'élasticité en compression. En valeur absolue. |
| $p_T$ | Variable interne en traction. Valeur algébrique. |
| $p_C$ | Variable interne en compression. Valeur algébrique. |
| $E_{TT}$ | Pente d'écrouissage en traction. |
| $E_{TC}$ | Pente d 'écrouissage en compression. |

Les équations du modèle de comportement sont :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} - \mathrm{E}^{-1}\dot{\sigma} - \dot{\varepsilon}^{th} \\ \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}_C^p + \dot{\varepsilon}_T^p \\ \dot{\varepsilon}_C^p = \dot{\varepsilon}_C \dfrac{\sigma}{|\sigma|} \\ \dot{\varepsilon}_C^p = \dot{\varepsilon}_T \dfrac{\sigma}{|\sigma|} \\ \sigma - R_T(p_T) \le 0 \\ -\sigma - R_C(p_C) \le 0 \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} \dot{p}_C = 0 \quad si \quad -\sigma - R_C(p_C) < 0 \\ \dot{p}_C \ge 0 \quad si \quad -\sigma = R_C(p_C) \\ \dot{p}_T = 0 \quad si \quad \sigma - R_T(p_T) < 0 \\ \dot{p}_T \ge 0 \quad si \quad \sigma = T_T(p_T) \end{cases}$$

$\dot{\varepsilon}_C^p$ : vitesse de déformation plastique en compression,

$\dot{\varepsilon}_T^p$ : vitesse de déformation plastique en traction,

$\dot{\varepsilon}^{th}$ : déformation d'origine thermique : $\dot{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_{ref})$

On remarque que l'on ne peut avoir simultanément plastification en traction et en compression : soit $\dot{p}_C = 0$ , soit $\dot{p}_C = 0$ , soit les deux sont nulles.

Les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_ASYM_LINE de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

```
ECRO_ASYM_LINE = _F (
    DT_SIGM_EPSI =  E_TT  ,  SY_T = σ_yT  ,
   DC_SIGM_EPSI =  E_TC  ,   SY_C = σ_yC  ,)
```

Le module d'Young E est fourni sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On calcule les fonctions d'écrouissage par :

$$R_T(p)=\frac{E_{TT}E}{E-E_{TT}}p_T+\sigma_{yT}=H_T\cdot p_T+\sigma_{yT}$$
$$R_C(p)=\frac{E_{TC}E}{E-E_{TC}}p_C+\sigma_{yC}=H_C\cdot p_C+\sigma_{yC}$$

## 5.2 Intégration du comportement VMIS_ASYM_LINE

Par discrétisation implicite directe de la relation de comportement asymétrique, de façon analogue à la précédente, on obtient :

$$\Delta\varepsilon^p=\Delta\varepsilon_T^p+\Delta\varepsilon_C^p$$
$$\Delta\varepsilon^p=\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}-\frac{\Delta\sigma}{E}$$
$$\Delta\varepsilon_T^p=\Delta p_T\frac{\sigma^-+\Delta\sigma}{\left|\sigma^-+\Delta\sigma\right|}$$
$$\Delta p_T\geq 0 \quad si \quad (\sigma^-+\Delta\sigma)-R_T\left(\bar{p}_T+\Delta\bar{p}_T\right) \leq 0$$
$$\Delta p_T=0 \quad si \quad \left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)-R_T\left(\bar{p}_T+\Delta\bar{p}_T\right) < 0$$

$$\Delta\varepsilon_C^p=\Delta p_C\frac{\sigma^-+\Delta\sigma}{\left|\sigma^-+\Delta\sigma\right|}$$
$$-\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)-R_C\left(\bar{p}_C+\Delta\bar{p}_C\right)\leq 0$$
$$\Delta p_C\geq 0 \quad si \quad -\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)-R_C\left(\bar{p}_C+\Delta\bar{p}_C\right) = 0$$
$$\Delta p_C=0 \quad si \quad -\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)-R_C\left(\bar{p}_C+\Delta\bar{p}_C\right) < 0$$

L'intégration est similaire à celle de VMIS_ISOT_LINE pour chacune des directions de traction et de compression. Il faut bien voir que les centres des domaines d'élasticité sont des données (calculées explicitement au pas précédent) pour le problème incrémental à résoudre.

Quatre cas se présentent :

- $\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}>0$ on pose $\sigma_T^e=\sigma^-+E\left(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}\right)$
  - si $\sigma_T^e<R_T\left(\bar{p}_T\right)$ dans ce cas $\Delta p_T = 0$ donc $\sigma=\sigma_T^e$ et $\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E$
  - sinon : $\Delta p_T=\frac{\left|\sigma_T^e\right|-\left(\sigma_{yT}+H_T p_T^-\right)}{E+H_T}$, $\Delta p_C=0$ $\sigma=\frac{\sigma_T^e}{1+\frac{E\Delta p_T}{R_T\left(p_T\right)}}=\frac{\sigma_T^e}{\left|\sigma_T^e\right|}R_T\left(p_T\right)$ $\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E_{TT}$
- $\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}<0$ on pose $\sigma_C^e=\sigma^-+E\left(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}\right)$
  - si $-\sigma_C^e<R_C\left(\bar{p}_C\right)$ dans ce cas $\Delta p_C = 0$ donc $\sigma=\sigma_C^e$ et $\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

◦ sinon : $\Delta p_C = \dfrac{\left|\sigma_C^e\right| - \left(\sigma_{yC} + H_C p_C^-\right)}{E + H_C}$ , $\Delta p_T = 0$

$$\sigma = \frac{\sigma_C^e}{1 + \dfrac{E \Delta p_C}{R_C(p_C)}} = \frac{\sigma_C^e}{\left|\sigma_C^e\right|} R_C(p_C)$$

$$\frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} = E_{TC}$$

**Remarque :**

*La matrice tangente initiale (option `RIGI_MECA_TANG`) est prise égale à la matrice élastique.*

## 5.3 Variables internes

La relation de comportement `VMIS_ASYM_LINE` produit 2 variables internes : $p_C$ $p_T$.
Elle n'est pas utilisable pour les éléments de grille.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Modèle de PINTO_MENEGOTTO

Le modèle présenté dans ce chapitre décrit le comportement 1D des aciers d'armatures du béton armé [bib 1]. La loi constitutive de ces aciers est composée de deux parties distinctes : le chargement monotone composé de trois zones successives (élasticité linéaire, palier plastique et écrouissage) et le chargement cyclique dont la formulation analytique a été proposée par A. Giuffré et P. Pinto en 1973 [bib 2] et a été ensuite développée par M. Menegotto [bib 3].

Au cours des cycles, le trajet de chargement entre deux points d'inversion (demi-cycle) est décrit par une courbe d'expression analytique du type $\sigma = f(\varepsilon)$ . L'intérêt de cette formulation est que la même équation pilote les courbes de charge et de décharge (voir par exemple les figures [Figure 6.1.1-a] et [Figure 6.1.2-a]). Les paramètres attachés à la fonction $f$ sont réactualisés après chaque inversion de chargement. La réactualisation de ces paramètres dépend du trajet effectué dans la zone plastique au cours du demi-cycle précédent.

Par ailleurs, ce modèle peut traiter le flambage inélastique des barres (G. Monti et C. Nuti [bib 4]). L'introduction de nouveaux paramètres dans l'équation des courbes permet alors de simuler l'adoucissement de la réponse contrainte-déformation en compression.

## 6.1 Formulation du modèle

### 6.1.1 Chargement monotone

Ce chapitre décrit le premier chargement que subit la barre, c'est à dire la partie précédant l'activation de la courbe de Giuffré [Figure 6.1.1-a].
La courbe de traction monotone de l'acier est typiquement décrite par les trois zones successives suivantes :

- L'élasticité linéaire, définie par le module d'Young $E$ et la limite d'élasticité $\sigma_y$. $\sigma = E\varepsilon$ (zone 1, [Figure 6.1.1-a])
- Le palier plastique, compris entre la déformation élastique limite $\varepsilon_y^0$ et la déformation d'écrouissage $\varepsilon_h$, limite supérieure du plateau en déformation. Au cours du palier la contrainte reste constante. $\sigma = \sigma_y^0$ (zone 2, [Figure 6.1.1-a])
- L'écrouissage, décrivant la courbe de traction jusqu'au point ultime de contrainte et de déformation, $(\varepsilon_u, \sigma_u)$. Cette partie est représentée par un polynôme du quatrième degré : $\sigma = \sigma_u - (\sigma_u - \sigma_y^0)\left(\frac{\varepsilon_u - \varepsilon}{\varepsilon_u - \varepsilon_h}\right)^4$ (zone 2, [Figure 6.1.1-a])

La pente d'écrouissage (utilisée par la suite, pour le comportement cyclique) est ici définie par : $E_h = \frac{\sigma_u - \sigma_y^0}{\varepsilon_u - \varepsilon_y^0}$ . C'est la pente moyenne des zones 2 et 3 de la figure suivante.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

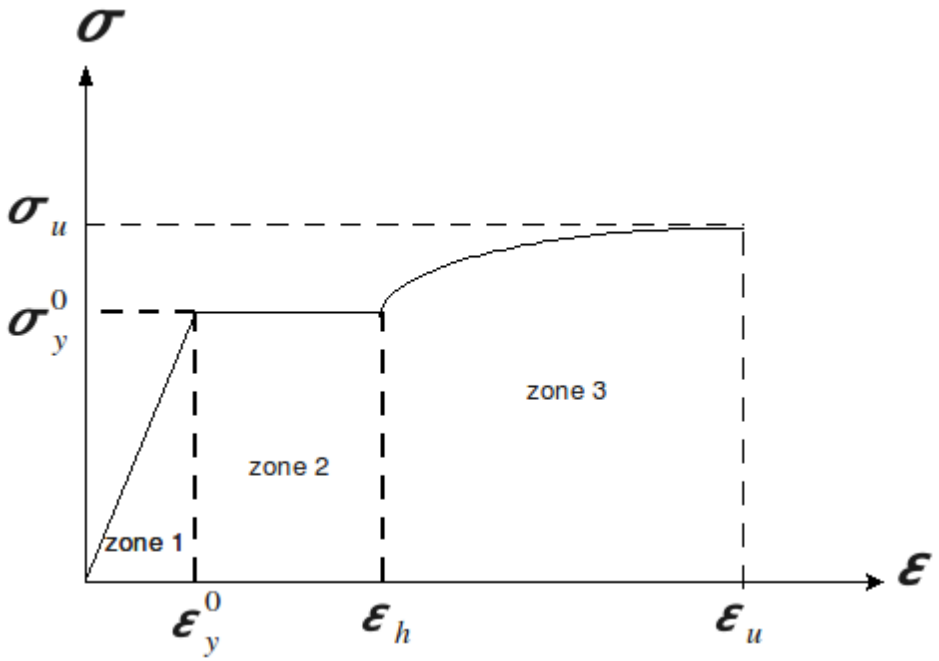



**Figure 6.1.1-a : Courbe de comportement.**

## 6.1.2 Chargement cyclique

On se place maintenant dans le cas où la barre subit une décharge consécutive au premier chargement. Deux cas se présentent alors :

- la position de départ se situe dans la zone élastique. La décharge reste dans ce cas élastique,
- la position de départ se situe dans la zone plastique ( $\varepsilon \geq \varepsilon_y^0$ ). La réponse est tout d'abord élastique, puis, pour une certaine valeur de la déformation, la décharge devient non linéaire [Figure 6.1.2-a] (ceci est vrai pour une décharge à partir de la zone 2 ou de la zone 3).

La relation que doit satisfaire la déformation pour que la courbe de Giuffré soit activée est la suivante :

$$\left| \varepsilon_{max} - \varepsilon \right| > \frac{\left| \varepsilon_y^0 \right|}{3.0}$$ , avec $\varepsilon_{max}$ la déformation maximale atteinte en charge.

Dès que l'on a franchi cette limite à la première décharge, c'est le comportement cyclique (courbe de Giuffré [Figure 6.1.2-a]) qui est activé.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

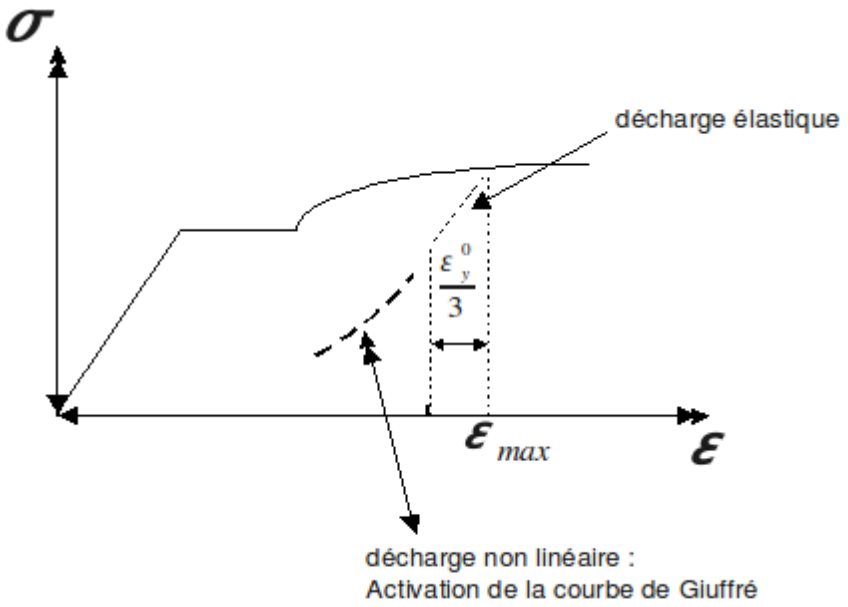



**Figure 6.1.2-a : Courbe de comportement avec décharge.**

### 6.1.2.1 Présentation du n-ième demi-cycle

L'allure de la courbe du n-ième demi-cycle dépend de l'excursion plastique effectuée au cours du demi-cycle précédent. On définit les quantités suivantes [Figure 6.1.2.1-a] :

- $\sigma_y^n$ : Limite d'élasticité du n-ième demi-cycle. (Calcul explicité au [§5.1.2.2])
- $\sigma_r^{n-1}$ : Contrainte au dernier point d'inversion (contrainte maximale atteinte au n-1ième demi-cycle).
- $\varepsilon_r^{n-1}$ : Déformation au dernier point d'inversion (déformation maximale atteinte au n-1ième demi-cycle).
- $\varepsilon_y^n$ : Déformation correspondant à $\sigma_y^n$ : $\varepsilon_y^n = \varepsilon_r^{n-1} + \frac{\sigma_y^n - \sigma_r^{n-1}}{E}$
- $f(t)$ : Excursion plastique du n-ième cycle



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

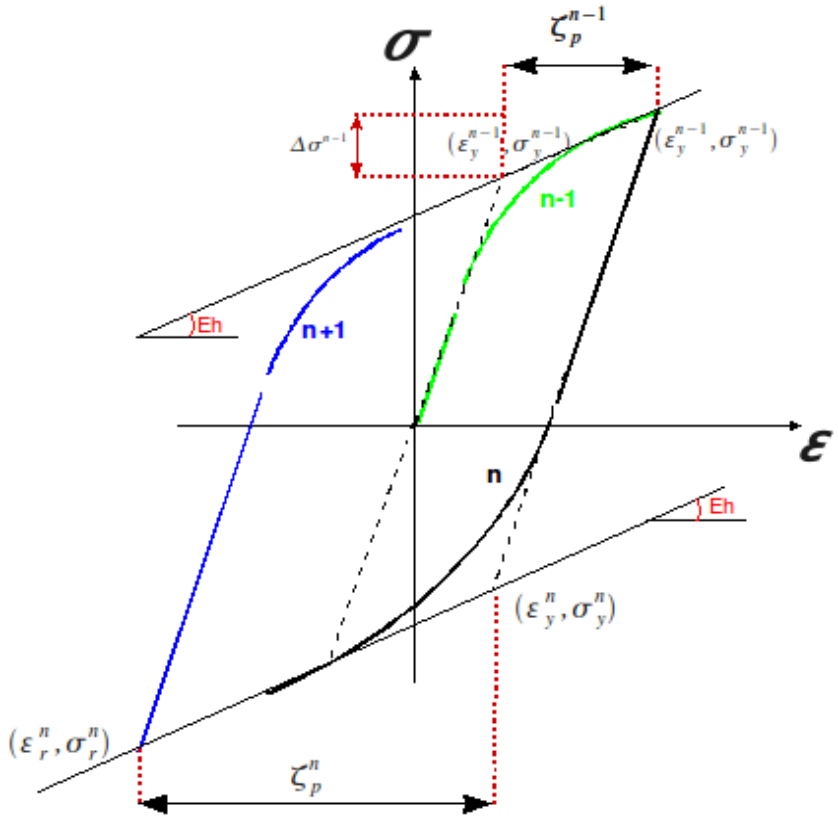



**Figure 6.1.2.1-a : Comportement cyclique.**

### 6.1.2.2 Loi d'écrouissage

Le modèle est basé sur une loi d'écrouissage cinématique. Les branches des demi-cycles sont comprises entre deux asymptotes de pente $E_h$ (pente d'écrouissage asymptotique).

On détermine donc $\sigma_y^n$ de la façon suivante : $\sigma_y^n = \sigma_y^{n-1}.sign\left(-\zeta_p^{n-1}\right)+\Delta\sigma^{n-1}$ où la fonction $sign(x) = -1$ si $x<0$ et $1$ si $x>0$ et où $\Delta\sigma^{n-1}$ est l'incrément de contrainte plastique du demi-cycle précédent [Figure 6.1.2.1-a] qui est défini par : $\Delta\sigma^{n-1} = E_h\zeta_p^{n-1}$.

Pour chaque demi-cycle on détermine donc $\sigma_y^n$ en fonction de $\sigma_y^{n-1}$ et $\zeta_p^{n-1}$, on en déduit, $\varepsilon_y^n$ puis on calcule le demi-cycle suivant (par la loi de comportement ci-dessous). La déformation maximale (en valeur absolue) atteinte avant de changer de sens permettra de calculer l'excursion plastique $\zeta_p^n = \varepsilon_r^n - \varepsilon_y^n$.

### 6.1.2.3 Description analytique des courbes $\sigma = f(\varepsilon)$

L'expression choisie dans le modèle pour décrire les courbes de chargement est la suivante :

$$\sigma^* = b\varepsilon^* + \left(\frac{1-b}{\left(1+\left(\varepsilon^*\right)^R\right)^{1/R}}\right)\varepsilon^*$$

Avec $b = \frac{E_h}{E}$ rapport de la pente d'écrouissage sur la pente d'élasticité.


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\varepsilon^{*}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_r^{n-1}}{\varepsilon_y^{n}-\varepsilon_r^{n-1}}$$
$$\sigma^{*}=\frac{\sigma-\sigma_r^{n-1}}{\sigma_y^{n}-\sigma_r^{n-1}}$$
$$\xi_p^{n-1}=\frac{\zeta_p^{n-1}}{\varepsilon_y^{n}-\varepsilon_r^{n-1}}$$

La grandeur $R$ permet de décrire l'allure de la courbure des branches. Elle est fonction du trajet plastique effectué au cours du demi-cycle précédent :

$$R(\xi)=R_0-g(\xi) \text{ où } g(\xi)=\frac{A_1.\xi}{A_2+\xi}$$

Les paramètres $R_0, A_1$ et $A_2$ sont des constantes sans unité dépendant des propriétés mécaniques de l'acier. Leurs valeurs sont obtenues expérimentalement et Menegotto [bib 3] propose :

$$R_0=20.0 \qquad A_1=18.5 \qquad A_2=.015$$

### 6.1.3 Cas du flambage inélastique

Monti et Nuti [bib 4] montrent que pour un rapport entre la longueur $L$ et le diamètre $D$ de la barre inférieur à 5, la courbe de compression est identique à celle de traction. Par contre, lorsque $L/D>5$ on observe un flambement de la barre. Dans ce cas la courbe de compression dans la zone plastique a un comportement adoucissant. Le modèle disponible dans *Code_Aster* permet de décrire également ce phénomène.

On définit les variables suivantes [Figure 6.1.3-a] :

- $E_0$ : Module d'Young élastique initial (correspondant à E sans flambage).
- $b_c$ : Rapport de la pente d'écrouissage sur la pente élastique en compression.
- $b_t$ : Rapport de la pente d'écrouissage sur la pente élastique en traction (recharge après compression avec flambage).
- $E_r$ : Module d'Young réduit en traction (pente de la courbe de recharge après compression avec flambage).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

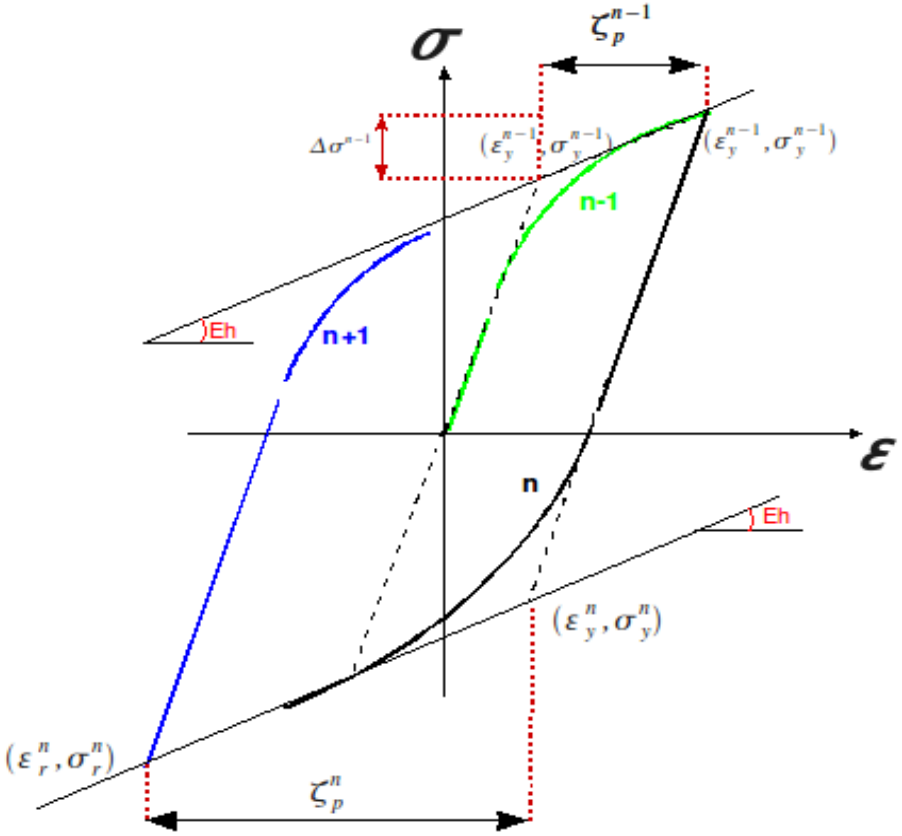



**Figure 6.1.3-a : Courbe de comportement cyclique.**

### 6.1.3.1 Compression

On introduit une pente négative $b_c \times E$, où $b_c$ est défini par :

$$b_c = a(5.0 - L/D)e\left(b\zeta' \frac{E}{\sigma_y^0 - \sigma^\infty}\right)$$

Avec $\sigma_\infty = 4.0\frac{\sigma_y^0}{L/D}$ et $\zeta' = \max\left(\left|\zeta_p^n\right|\right)$ le plus grand trajet plastique effectué au cours du chargement.

Il faut ensuite, comme dans le modèle sans flambage, déterminer $\sigma_y^n$. La méthode est identique, mais on ajoute une contrainte complémentaire $\sigma_s^*$ afin de positionner correctement la courbe par rapport à l'asymptote [Figure 6.1.3-a].

$$\sigma_s^* = \gamma_s b E \frac{b - b_c}{1 - b_c} \qquad \text{où } \gamma_s \text{ est donné par : } \gamma_s = \frac{11.0 - L/D}{10\left(e^{cL/D} - 1.0\right)}$$

Et on a donc : $\sigma_y^n = \left(\sigma_y^n\right)_{\text{sans flambage}} + \sigma_s^*$

Ceci modifie aussi la valeur de $\varepsilon_y^n = \varepsilon_r^{n-1} + \frac{\sigma_y^n * \sigma_r^{n-1}}{E}$

### 6.1.3.2 Traction

Lors du demi-cycle en traction suivant on adopte un module d'Young réduit définit par :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$E_r = E_0\left(a_5 + \left(1.0 - a_5\right)e^{\left(-a_6 \zeta_p^2\right)}\right) \text{ avec } a_5 = 1.0 + (5.0 - L/D)/7.5$$

**Remarque :**

*Les paramètres $a, c$ et $a_6$ sont des constantes (sans unité) dépendant des propriétés mécaniques de l'acier et sont déterminées expérimentalement. Les valeurs adoptées par Monti et Nuti [bib 4] sont : $a = 0.006 \quad c = 0.500 \quad a_6 = 620.0$*

## 6.2 Implantation dans *Code_Aster*

Ce modèle est accessible dans *Code_Aster* à partir du mot clé COMPORTEMENT (RELATION = 'PINTO_MENEGOTTO') ou (RELATION = 'GRILLE_PINTO_MEN') de la commande STAT_NON_LINE [U4.51.03]. L'ensemble des paramètres du modèle sont donnés via la commande DEFI_MATERIAU (mot clé facteur PINTO_MENEGOTTO) [U4.43.01]. On répertorie ici les paramètres intervenant dans le modèle :

| Paramètres du modèle | Intervient dans | valeur adoptée par défaut dans *Aster* |
|---|---|---|
| $\sigma_y^0$ | Premier chargement | – |
| $\varepsilon_u$ | Premier chargement | – |
| $\sigma_u$ | Premier chargement | – |
| $\varepsilon_h$ | Premier chargement | – |
| $b = \frac{E_h}{E}$ | Cycles | Si aucune valeur n'est entrée on prend la valeur calculée au premier chargement |
| $R_0$ | Cycles | 20 |
| $a_1$ | Cycles | 18.5 |
| $a_2$ | Cycles | 0.15 |
| $L/D$ | Cycles avec flambage (si $L/D > 5$ ) | 4 (pour être par défaut hors flambage) |
| $a_6$ | Flambage | 620 |
| $c$ | Flambage | 0.5 |
| $a$ | Flambage | 0.006 |

Les paramètres $R_0, a_1, a_2, a_6, c$ et $a$ dépendent des propriétés mécaniques de l'acier et sont déterminés expérimentalement. Les valeurs adoptées par défaut dans *Code_Aster* sont celles proposées dans la littérature [bib 1].

On donne en [Figure 6.2-a] une comparaison du modèle suivant la valeur de $b = \frac{E_h}{E}$ pour deux valeurs : $b = 0.01$ et $b = 0.001$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

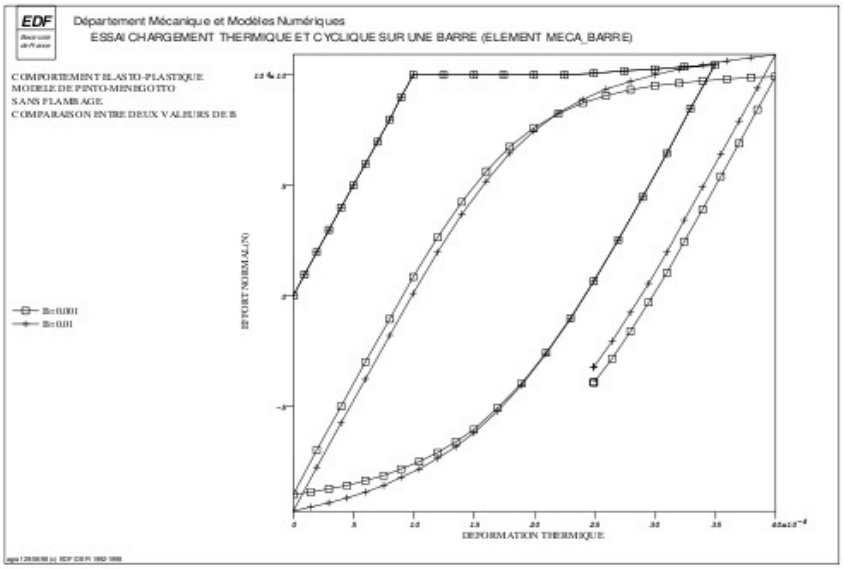



**Figure 6.2-a : Comparaison de 2 jeux de paramètres.**

On donne en [Figure 6.2-b] une comparaison du modèle sans flambage et du modèle avec flambage.

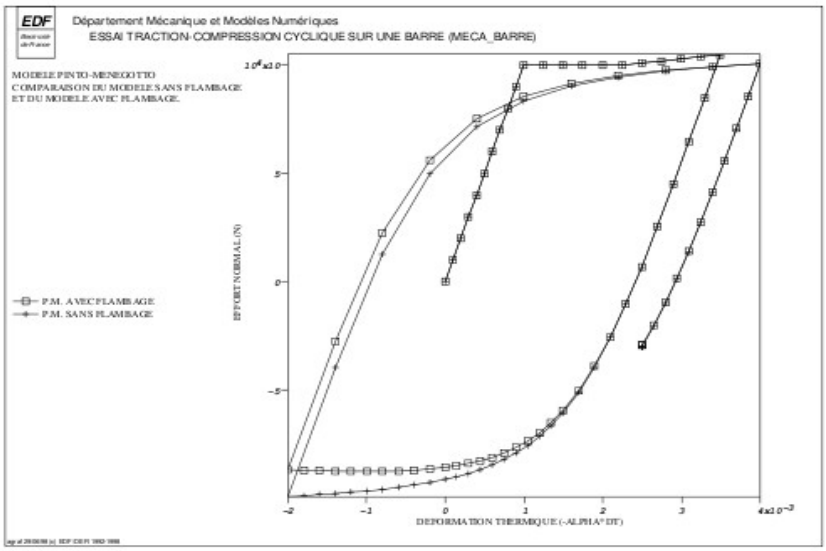



**Figure 6.2-b : Comparaison avec et sans flambage.**

## 6.3 Variables internes

Elles sont au nombre de 8, et définies par :

$V1 = \varepsilon_r^{n-1}$

$V2 = \varepsilon,_r^n$

$V3 = \sigma_r^n$

$V4 = \varepsilon^- + \Delta\varepsilon - \alpha\left(T - T^-\right)$ $V5 = \Delta\varepsilon + \alpha\left(T - T^-\right)$

$V6$ = cycl = 0 si le comportement cyclique n'est pas activé
= 1 dans le cas contraire

$V7 = \chi$ = 0 si le pas de temps correspond à une évolution linéaire
= 1 dans le cas contraire (indicateur de plasticité

$V8$ = indicateur de flambage



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 7 Comportements VISC_IRRA_LOG et GRAN_IRRA_LOG

Le modèle présenté dans ce chapitre décrit les comportements viscoplastiques 1D VISC_IRRA_LOG et GRAN_IRRA_LOG (fluage et grandissement sous irradiation des alliages M5 et Zircaloy-4) pour la modélisation des assemblages combustibles, et applicable aux éléments de barres et poutres multi-fibres.

## 7.1 Formulation du modèle

Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\varepsilon}\,\dfrac{\sigma}{|\sigma|} \\ \dot{\varepsilon} = |\sigma|.\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\dot{\Phi}\left(\dfrac{A\omega}{1+\omega\Phi} + B - C\omega e^{-\omega t}\right) \\ \dfrac{\dot{\sigma}}{E} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{vp} - \dot{\varepsilon}^{g} - \dot{\varepsilon}^{th} \end{cases}$$

Ces relations sont déduites des essais de fluage FLETAN et REFLET [8] pour diverses valeurs de flux neutronique.

Les coefficients sont fournis sous le mot clé VISC_IRRA_LOG ou GRAN_IRRA_LOG de DEFI_MATERIAU et $\Phi$ est la fluence neutronique (intégrale du flux par rapport au temps).

$\varepsilon^g$ représente la déformation de grandissement sous flux. Elle n'est prise en compte que dans le comportement GRAN_IRRA_LOG et s'exprime sous la forme :

$\varepsilon^g(t) = f\left(T, \Phi_t(x, y, z)\right)$

**Remarques :**

1) *La fluence neutronique $\Phi_t(x, y, z)$ s'exprime obligatoirement en $10^{20} n/cm^2$. Par convention dans DEFI_MATERIAU [U4.43.01], si la valeur fournie sous le mot-clé FLUX_PHI est égale à 1, c'est le champ de fluence qui est utilisé pour le comportement. Dans le cas contraire, la valeur fournie dans DEFI_MATERIAU est utilisée comme flux neutronique constant.*
2) *C'est un champ aux nœuds défini comme variable de commande dans la commande AFFE_MATERIAU.*
3) *Attention : Le champ d'irradiation est incrémental et correspond à l'historique d'irradiation (stockée en variable interne – cf ci-dessous) auquel on ajoute l'incrément du champ de fluence venant de la variable de commande.*

## 7.2 Variables internes

Trois variables internes :

- $V1$ : la déformation viscoplastique cumulée : $\varepsilon_p$ ;
- $V2$ : mémorisation de l'historique d'irradiation (fluence).
- $V3$ : la déformation de grandissement : $\varepsilon^g$ .

## 7.3 Intégration implicite

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, on obtient :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases}\Delta\varepsilon^{vp}=\Delta p\dfrac{\sigma\left(t^{-}+\Delta t\right)}{\left|\sigma\left(t^{-}+\Delta t\right)\right|}\\ \Delta p=\left|\sigma\left(t^{-}+\Delta t\right)\right|\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\left(\dfrac{A\omega}{1+\omega\Phi\left(t^{-}+\Delta t\right)}+B-C\omega e^{-\omega t}\right)\Delta\Phi\\ \dfrac{\sigma}{E}-\dfrac{\sigma^{-}}{E^{-}}=\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{vp}-\Delta\varepsilon^{g}-\Delta\varepsilon^{th}\\ \text{avec}\\ \Delta\varepsilon^{th}=\alpha(T)\left(T-T_{ref}\right)-\alpha\left(T^{-}\right)\left(T-T_{ref}\right)\\ \Delta\varepsilon^{g}=f\left(T^{+},\Phi_{t}^{+}\right)-f\left(T^{-},\Phi_{t}^{-}\right)\end{cases}$$

On peut résoudre explicitement ces équations en posant : $\sigma^{e}=\dfrac{E}{E^{-}}\sigma^{-}+E(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{g}-\Delta\varepsilon^{th})$

alors le système se réduit à : $\sigma=\sigma^{e}-E\sigma\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\left(\dfrac{A\omega}{1+\omega\Phi}+B-C\omega e^{-\omega t}\right)\Delta\Phi$

donc la solution s'obtient immédiatement : $\sigma=\dfrac{\sigma^{e}}{1+E\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\left(\dfrac{A\omega}{1+\omega\Phi}+B-C\omega e^{-\omega t}\right)\Delta\Phi}$

et l'opérateur tangent s'écrit : $\dfrac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}=\dfrac{E}{1+E\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\left(\dfrac{A\omega}{1+\omega\Phi}+B-C\omega e^{-\omega t}\right)\Delta\Phi}$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 8 Modèle de MAZARS en 1D

## 8.1 Équations du modèle

L'objectif de cette modélisation est de rendre compte de la refermeture des fissures. Ce modèle n'est utilisé qu'avec les poutres multifibres. Les équations présentées dans le document [R7.01.08] "Modèle d'endommagement de MAZARS"sont reprises et réécrites en $1\mathrm{D}$.

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=(1-D_t)\,E\,\langle\varepsilon^e_{xx}\rangle_+\\ \sigma_{xx}=(1-D_c)\,E\,\langle\varepsilon^e_{xx}\rangle_-\end{cases} \quad \textbf{[éq 8.1-1 ]}$$

avec :

- $E$ : module d'Young,
- $D_t$ : la variable d'endommagement en traction.
- $D_c$ : la variable d'endommagement en compression.
- $\varepsilon^e_{xx}$ : la déformation élastique $\varepsilon^e_{xx}=\varepsilon-\varepsilon^{th}$
- $\varepsilon^{th}=\alpha(T-T_{ref})$ : la dilatation thermique

La seule modification est d'avoir un endommagement de traction et de compression. Le couplage $\alpha_t^{\beta}\,D_t+(1-\alpha_t)^{\beta}\,D_C$ n'existe plus. L'endommagement reste toujours piloté par les extensions.

Les endommagements de traction et de compression sont définis par les équations suivantes si $\varepsilon_{eq}\geq\varepsilon_{d0}$ :

$$D_c=1-\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_c)}{\varepsilon_{eq}}-\frac{A_c}{\exp\left[B_c(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0})\right]}\qquad D_c\in[0,1[ \quad \textbf{[éq 8.1-2]}$$

$$D_t=1-\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_t)}{\varepsilon_{eq}}-\frac{A_t}{\exp\left[B_t(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0})\right]}\qquad D_t\in[0,1[ \quad \textbf{[éq 8.1-3]}$$

où $A_c, A_t, B_c, B_t, \varepsilon_{d0}$ sont des paramètres matériaux à identifier.

L'endommagement est piloté par la déformation équivalente $\varepsilon_{eq}$. Les extensions sont primordiales dans le phénomène de fissuration du béton, la déformation équivalente introduite est définie à partir des valeurs positives des déformations, soit :

$$\begin{cases}si\ \varepsilon^e_{xx}\geq 0\ alors\ \varepsilon_{eq}=|\varepsilon^e_{xx}|\\ si\ \varepsilon^e_{xx}\leq 0\ alors\ \varepsilon_{eq}=\sqrt{2}\,\nu\,|\varepsilon^e_{xx}|\end{cases} \quad \textbf{[éq 8.1-4]}$$

**Remarque :**

Dans le cas où $\varepsilon^e_{xx}\leq 0$, en $1\mathrm{D}$ les déformations principales dans les autres directions sont $\varepsilon^e_{yy}=\varepsilon^e_{zz}=-\nu\,\varepsilon^e_{xx}$. En utilisant la formule $\varepsilon_{eq}=\sqrt{\langle\varepsilon_1\rangle_+^2+\langle\varepsilon_2\rangle_+^2+\langle\varepsilon_3\rangle_+^2}$ on obtient bien l'expression précédente.

La matrice tangente à pour expression : $\frac{d\,\sigma_{xx}}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=(1-\tilde{D})\,E-\frac{d\,\tilde{D}}{d\,\varepsilon^e_{xx}}\,E\,\varepsilon^e_{xx}$ avec :

$$si\ \varepsilon^e_{xx}\geq 0\ et\ \varepsilon_{eq}\geq\varepsilon_{d0}\quad \frac{d\,\tilde{D}}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=\frac{d\,D_t}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=\left(\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_t)}{\varepsilon_{eq}^2}+\frac{A_t B_t}{\exp\left[B_t(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0})\right]}\right)$$

$$si\ \varepsilon^e_{xx}<0\ et\ \varepsilon_{eq}\geq\varepsilon_{d0}\quad \frac{d\,\tilde{D}}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=\frac{d\,D_c}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=-\sqrt{2}\,\nu\left(\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_c)}{\varepsilon_{eq}^2}+\frac{A_c B_c}{\exp\left[B_c(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0})\right]}\right)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les cas test [V6.02.120], [V6.02.119], [V5.02.130] mettent en œuvre la loi de comportement de MAZARS dans sa version 1D .

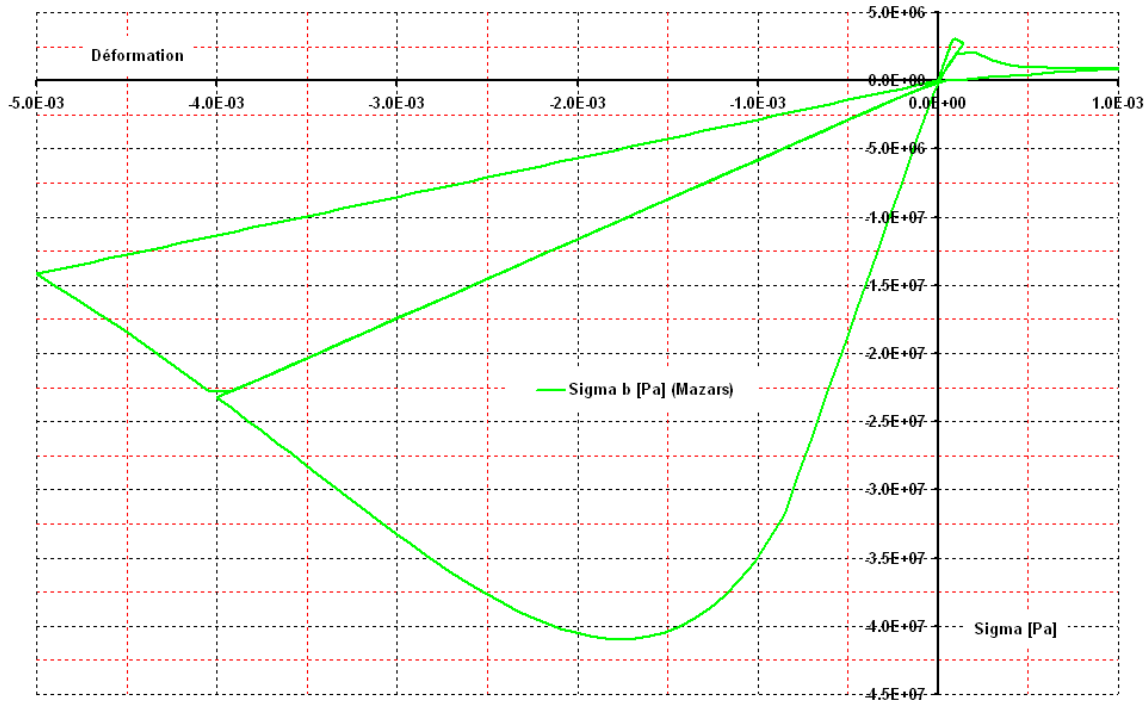



**Figure 8.1-a : Comportement de Mazars dans sa version 1D .**

## 8.2 Variables internes

La loi de comportement est écrite en découplant les endommagements de traction et de compression, les 2 endommagements ne sont plus des variables internes [R7.01.08].

Cette loi est dédiée aux calculs de génie civil. Pour faciliter les interprétations des résultats 2 variables sont créées pour décrire l'état "limite" du matériau béton, conformément à ce qui ce fait dans les règlements de calcul de béton armé aux états limites.

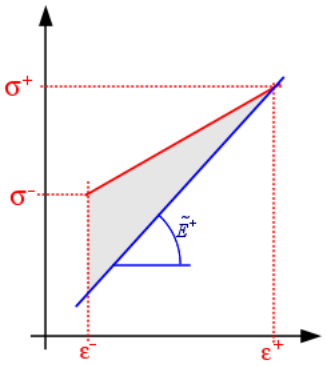
- La variable CRITSIG donne des informations par rapport à l'état de contrainte. Cette variable représente la contrainte divisée par la contrainte limite du béton donnée par l'utilisateur SIGM_LIM.
- La variable CRITEPS donne des informations par rapport à l'état de déformation. Cette variable représente la déformation équivalente $\varepsilon_{eq}$ divisée par la déformation limite donnée par l'utilisateur à l'aide du mot clef EPSI_LIM.

Les valeurs de la contrainte limite SIGM_LIM et de la déformation limite EPSI_LIM sont modifiables par l'utilisateur au moment de la définition du matériau : DEFI_MATERIAU [U4.43.01], DEFI_MATER_GC [U4.42.07].

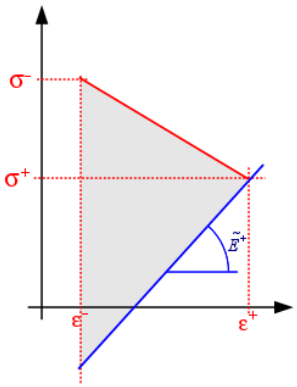
L'écriture de la loi de MAZARS ne permet pas de calculer une dissipation intrinsèque au modèle. Mais, lors de calculs sismiques il peut être utile à l'utilisateur de connaître l'énergie dissipée non récupérable. La variable DISSIP représente le cumul d'énergie non récupérable. L'incrément d'énergie non récupérable s'écrit $\Delta Eg = \frac{1}{2}\left(E(1-D^+)\Delta\varepsilon - \left(\sigma^+ - \sigma^-\right)\right)\Delta\varepsilon$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)




Matériau non-adoucissant




Matériau adoucissant

Les variables internes pour la loi de MAZARS en 1D :

- *V1* CRITSIG : Critère en contrainte
- *V2* CRITEPS : Critère en déformation.
- *V3* ENDO : Endommagement [R7.01.08].
- *V4* EPSEQT : Déformation équivalente de traction
- *V5* EPSEQC : Déformation équivalente de compression
- *V6* RSIGMA : Rapport de tri-axialité.
- *V7* TEMP_MAX Température maximale atteinte dans le matériau
- *V8* DISSIP : Énergie non récupérable.


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 9 Loi de comportement RELAX_ACIER

Le phénomène de relaxation des aciers utilisés en précontrainte est réglementé. Les principaux règlements sont : BPEL83, NF-EN-1992-1-1 Octobre 2005, AFCEN-ETCC-2010,

On souhaite pouvoir modéliser des déformations qui vont varier lentement au court du temps, notamment pour la prise en compte du fluage du béton et des variations de température . On souhaite également prendre en compte l'influence de la température sur le phénomène de relaxation.
Réglementairement, il serait possible de tenir compte de l'effet du fluage du béton, de la déformation thermique en faisant une combinaison linéaire des différents phénomènes (Cf règlements pour plus de détails). Cette démarche est incompatible avec un calcul aux éléments finis .

Ces règlements permettent également de corriger la relaxation après un « saut » de déformation, pouvant être dû à une variation de la contrainte issue d'un chargement extérieur (par exemple lors d'un essai décennal sur une enceinte). En aucun cas ce « saut » ne peut évoluer dans le temps, ce ne peut être qu'un Dirac. La méthode utilisée dans ce cas est celle du temps équivalent qui, par construction, est incompatible avec un code aux éléments finis.

## 9.1 Formulation du modèle

Pour que la loi de relaxation soit utilisable dans un code aux éléments finis pour des calculs de structure avec des variations de chargements tels que : fluage du béton, reprise de tension des câbles, prise en compte de l'influence de la thermique,… elle doit être incrémentale et thermodynamiquement correcte.

Plusieurs formulations pour la modélisation de la déformation liée à la relaxation existent dans la littérature.
La formulation adoptée est basée sur celle proposée par J.Lemaitre :

$$\sigma = E.\varepsilon^{e} \qquad \varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{an}$$

$$\dot{\varepsilon}^{an} = \left\langle \frac{\sigma - R\left(\varepsilon^{an}\right)}{f_{prg}.k} \right\rangle^{n} \quad \text{avec} \quad R\left(\varepsilon^{an}\right) = \frac{f_{prg}.c.\varepsilon^{an}}{\left(1+\left(b.\varepsilon^{an}\right)^{nr}\right)^{\frac{1}{nr}}} \qquad \text{[éq 9.1-1 ]}$$

La loi de comportement est 1D, et uniquement disponible pour les modélisations de type BARRE, qui sont utilisées pour modéliser les câbles de précontrainte dans l'opérateur DEFI_CABLE_BP.
Pour tenir compte de l'influence de la température sur la relaxation, tous les coefficients de la loi peuvent être des fonctions de la température.

***Remarque :***

Les paramètres $c$ , $b$ , $n$ et $nr$ sont sans unité, et donc indépendant des unités utilisées pendant l'étude. $k$ est adimensionné par rapport à $f_{prg}$ donc par rapport aux contraintes, mais pas par rapport au temps. En effet $\dot{\varepsilon}^{an}$ est homogène à $[s]^{-1}$ , si l'unité de temps est en seconde. Donc si l'on connaît $k$ pour une vitesse de déformation dans une unité de temps, il est nécessaire de convertir sa valeur par rapport à l'unité de temps utilisée lors de l'étude.

## 9.2 Variables internes

Deux variables internes :

- $V1$ : la déformation anélastique cumulée : $\varepsilon^{an}$ .
- $V2$ : mémorisation de la raideur tangente au comportement.

## 9.3 Intégration explicite

L'intégration se fait par une méthode de type Runge-Kutta d'ordre cinq à pas variables.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 9.4 Identification des paramètres

Plusieurs solutions sont possibles :

- Un travail analytique permet de déterminer des relations entre les coefficients présents dans les formules réglementaires et celle de la loi de comportement : tangente au début de la relaxation, asymptote pour un temps « infini », …
- Simulation à l'aide des formules réglementaires de plusieurs « essais de relaxation ». Pour un type de câble donné qui correspond à un jeu de paramètres (k1, k2, $\rho_{1000}$, $f_{prg}$). Différentes valeur de $\mu$ vont permettre d'obtenir un faisceau « d'essais » sur lequel une identification des paramètres peut être réalisée.
- Étude bibliographique pour retrouver le travail expérimental et théorique réalisé sur la relaxation des câbles de précontrainte, afin d'utiliser directement les essais et d'identifier les paramètres.

## 9.5 Résultat d'une identification

Cette identification a été réalisée par rapport à la simulation d'un essai de relaxation obtenu avec les formules réglementaires.
On se place dans le cas $\rho_{1000}=2.5\%$ ($k1=6.0E-03$, $k2=1.1$) avec $f_{prg}=1800\,MPa$, $E=190000\,MPa$. La déformation initiale correspond à un taux de chargement de $\mu=0.75$. La simulation ainsi que l'identification sont réalisées sur [0h, 4000h].

Les figures ci-dessous comparent le résultat de l'identification avec la courbe réglementaire.

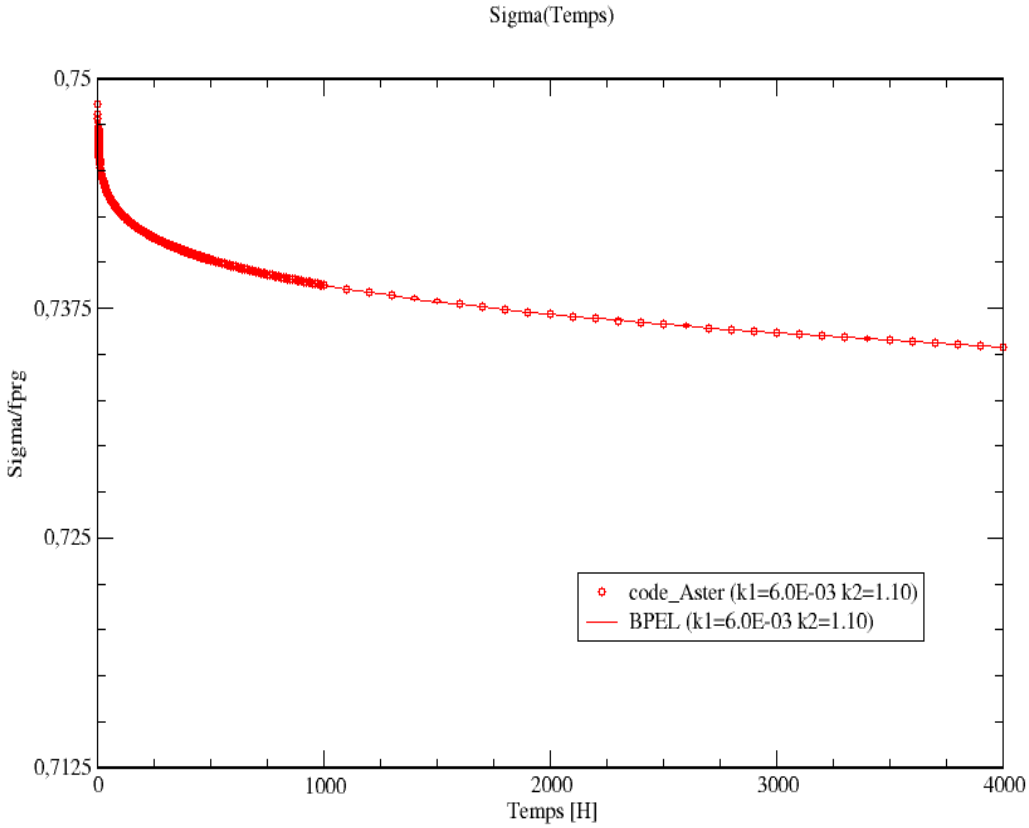



**Figure 9.5-a :** Évolution de la contrainte au cours du temps : référence et code_aster.


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

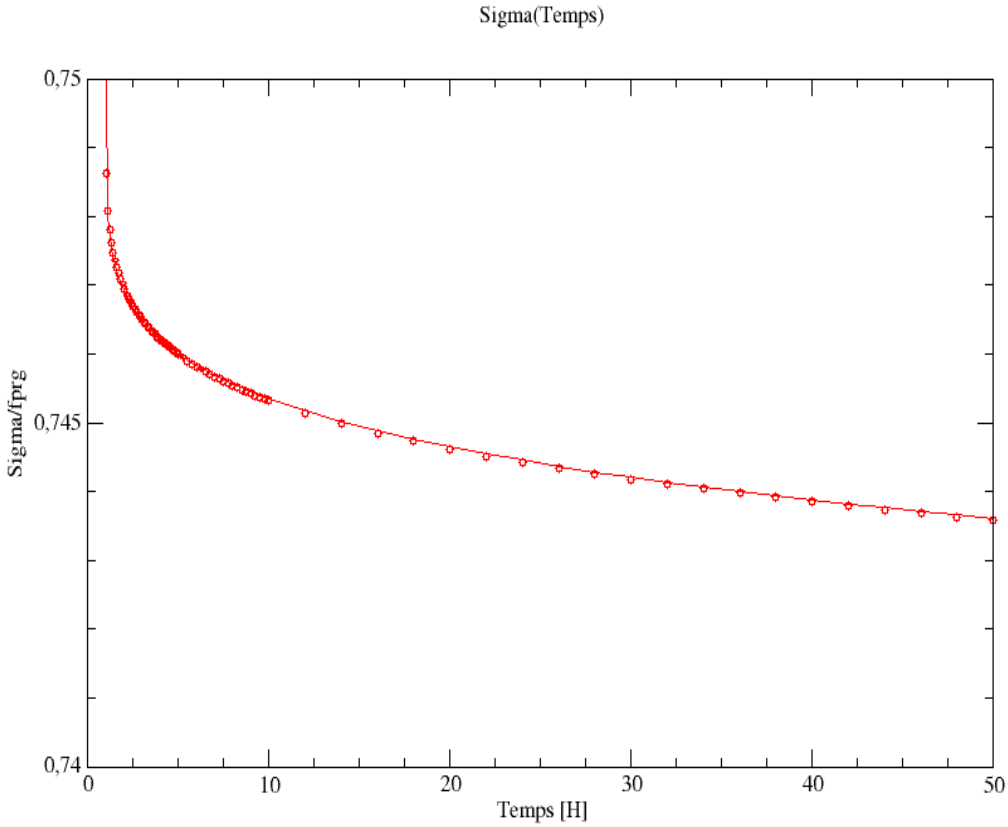



**Figure 9.5-b :** Zoom sur les 10 premières heures, de l'é volution de la contrainte au cours du temps.

Les observations vis-à-vis de l'identification :
- Très bonne correspondance entre la loi identifiée et la loi réglementaire.
- Très bonne identification de la pente à l'origine et de l'asymptote.

La loi proposée est donc apte à décrire correctement la relaxation d'un câble de précontrainte, si sa relaxation suit les courbes réglementaires.

## 9.6 Utilisation dans code_aster

La définition des paramètres matériaux se fait classiquement dans la commande DEFI_MATERIAU, mot clef RELAX_ACIER, tous les paramètres peuvent dépendre de la température.

| | |
|---|---|
| $f_{prg}$ | Contrainte à rupture du câble. Cette grandeur est facultative, car elle peut être également définie dans les matériaux BPEL_ACIER ou ETCC_ACIER et dans ce cas $f_{prg}$ est une constante. La valeur/fonction donnée sous RELAX_ACIER_CABL est prioritaire. |
| ECOU_K<br>ECOU_N | Correspond au coefficient k, dans l'équation 9.1-1.<br>Correspond au coefficient n, dans l'équation 9.1-1. |
| ECRO_N<br>ECRO_B<br>ECRO_C | Correspond au coefficient nr, dans l'équation 9.1-1.<br>Correspond au coefficient b, dans l'équation 9.1-1.<br>Correspond au coefficient c, dans l'équation 9.1-1. |


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 10 Méthode pour utiliser en 1D tous les comportements 3D

Comme pour le traitement des contraintes planes [R5.03.03] , il est possible de bénéficier pour les modélisations 1D des comportements disponibles en 3D . On étend pour cela la méthode due à R.de Borst au cas 1D , en traitant cette condition (champ de contraintes unidimensionnel) non pas au niveau de la loi de comportement mais au niveau de l'équilibre. On obtient ainsi au cours des itérations de l'algorithme de STAT_NON_LINE des champs de contraintes qui tendent vers un champ unidirectionnel. On vérifie, à convergence des itérations de Newton globales, que les champs de contraintes sont effectivement unidirectionnels, à une précision près, sinon on continue les itérations. La méthode consiste à décomposer les champs de déformations et de contraintes en une partie purement unidirectionnelle (direction x) et une partie relative aux autres directions, et d'effectuer une condensation statique en écrivant que les composantes des contraintes relatives aux autres directions sont nulles. On ne considère dans les tenseurs (d'ordre 2) que les termes diagonaux, écrits sous forme de vecteurs à 3 composantes. La direction x correspond à la direction de l'élément (barre, poutre multifibre) ou à la direction des armatures de grille. A un instant quelconque de la résolution du comportement incrémental, l'opérateur tangent $D$ relie l'accroissement de contraintes à l'accroissement de déformation par :

$$d\sigma=\left[\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right]d\varepsilon=D\,d\varepsilon \quad \text{que l'on réécrit} \quad \begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

En écrivant ces accroissements comme la différence entre les itérations $n$ et $n+1$ de Newton, on obtient :

$$d\sigma=\sigma^{n+1}-\sigma^{n}=\Delta\sigma^{n+1}-\Delta\sigma^{n}\ ,\ d\varepsilon=\Delta\varepsilon^{n+1}-\Delta\varepsilon^{n}$$

A convergence, cet écart doit tendre vers zéro.
En introduisant les conditions $\sigma_y^{n+1}=0$ et $\sigma_z^{n+1}$ (comportement unidirectionnel), on obtient, pour l'itération $n+1$ :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_x^{n+1}-\sigma_x^{n} \\ \sigma_y^{n+1}-\sigma_y^{n} \\ \sigma_z^{n+1}-\sigma_z^{n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_x^{n+1}-\sigma_x^{n} \\ -\sigma_y^{n} \\ -\sigma_z^{n} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Les deux dernières équations permettent d'exprimer $d\varepsilon_y$ et $d\varepsilon_z$ en fonction de $d\varepsilon_x$ :

$$\begin{cases} d\varepsilon_y=\dfrac{1}{D_{22}}\left(-\sigma_y^{n}-D_{21}\,d\varepsilon_x-D_{23}\,d\varepsilon_z\right) \\ d\varepsilon_z=\dfrac{1}{D_{33}}\left(-\sigma_z^{n}-D_{31}\,d\varepsilon_x-D_{32}\,d\varepsilon_y\right) \end{cases}$$

soit

$$d\varepsilon_y=\frac{1}{\Delta}\left(-D_{33}\sigma_y^{n}+D_{23}\sigma_z^{n}+D_y\,d\varepsilon_x\right)$$

$$d\varepsilon_z=\frac{1}{\Delta}\left(-D_{32}\sigma_y^{n}+D_{22}\sigma_z^{n}+D_z\,d\varepsilon_x\right)$$

avec $\Delta=D_{33}D_{22}-D_{23}D_{32},\quad D_y=D_{23}D_{31}-D_{21}D_{33},\quad D_z=D_{32}D_{21}-D_{31}D_{22}$

en reportant ces expressions dans la première équation, on obtient :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma_x^{n+1}=\sigma_x^n+\left(D_{11}+\frac{D_{12}D_y+D_{13}D_z}{\Delta}\right)d\varepsilon_x+\frac{D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13}}{\Delta}\sigma_z^n+\frac{D_{12}D_{32}-D_{12}D_{33}}{\Delta}\sigma_y^n$$

L'équilibre à l'itération $n+1$ s'écrit :

$$\int D^T\sigma^{n+1}dv=\int B^T\sigma_x^{n+1}dv=\int B^T\left(D_{11}+\frac{D_{12}D_y+D_{13}D_z}{\Delta}\right)d\varepsilon_x$$
$$+\int B^T\left(\sigma_x^n+\frac{D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13}}{\Delta}\sigma_z^n+\frac{D_{12}D_{32}-D_{12}D_{33}}{\Delta}\sigma_y^n\right)dv$$
$$=K^n du^{n+1}+\int B^T\left(\sigma_x^n+\frac{D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13}}{\Delta}\sigma_z^n+\frac{D_{12}D_{32}-D_{12}D_{33}}{\Delta}\sigma_y^n\right)dv$$

On constate que la prise en compte du comportement unidimensionnel intervient à deux niveaux :

- dans la matrice tangente, par le terme correctif :

$$\int B^T\frac{D_{12}D_y+D_{13}D_z}{\Delta}B\ dv$$

- dans l'écriture du second membre, par le terme correctif :

$$\frac{\int B^T}{\Delta}\left((D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13})\sigma_z^n+(D_{12}D_{32}-D_{12}D_{33})\sigma_y^n\right)dv$$

Pour mettre en œuvre cette méthode, il suffit de calculer ces termes correctifs et de les ajouter aux contraintes et matrice tangente obtenue de la résolution 3D du comportement. Pour cela il est nécessaire de stocker des informations d'une itération de Newton à l'autre, par le biais de 4 variables internes supplémentaires. Les étapes de la résolution sont :

- à l'itération $n+1$, les données sont : $\Delta u^{n+1},\sigma^-,\alpha^-$ et les 4 variables internes (calculées à l'itération $n$) :

$$V1=\Delta\varepsilon_y^n+\frac{1}{\Delta}\left(D_{23}\sigma_z^n-D_{33}\sigma_y^n-D_y\Delta\varepsilon_x^n\right),V2=\frac{D_y}{\Delta}$$

$$V3=\Delta\varepsilon_z^n+\frac{1}{\Delta}\left(D_{32}\sigma_z^n-D_{22}\sigma_z^n-D_z\Delta\varepsilon_x^n\right),V4=\frac{D_z}{\Delta}$$

- avant d'effectuer l'intégration du comportement (effectué en axisymétrique) on calcule :

$$\Delta\varepsilon_y^{n+1}=\Delta\varepsilon_y^n+\frac{1}{\Delta}\left(-D_{33}\sigma_y^n+D_{23}\sigma_z^n+D_y d\varepsilon_x\right)$$
$$\Delta\varepsilon_z^{n+1}=\Delta\varepsilon_z^n+\frac{1}{\Delta}\left(-D_{32}\sigma_y^n+D_{22}\sigma_z^n+D_z d\varepsilon_x\right)$$

- l'intégration du comportement fournit les contraintes $\sigma^{n+1}$ et l'opérateur tangent $D$,
- on modifie le second membre et la matrice tangente comme indiqué ci-dessus,
- on stocke les nouvelles variables internes et on vérifie si $\left|\sigma_z^{n+1}\right|<\eta$ et $\left|\sigma_y^{n+1}\right|<\eta$, avec $\eta=\xi\left|\sigma_x^{n+1}\right|$, $\xi=$ RESI_INTE_RELA

**Remarque :**

*Les quatre variables internes supplémentaires sont ajoutées après les variables internes de la loi de comportement.*



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 11 Bibliographie

[1] J.GUEDES, P.PEGON, P.E.PINTO : ”A Fibre/Timoshenko Beam Element in Castem 2000”, Joint Research Centre, European Commission, Institute for Safety Technology,1994.

[2] A.GIUFFRE, P.E.PINTO : ”Il Comportemento del Cemento Armatoper Sollecitazioni Cicliche di Forte Intensita’”, Giornale del Genio Civile, Maggio 1970.

[3] M.MENEGOTTO, P.E.PINTO : ”Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-elastic Behaviour of Elements under Combined Normal Force and Bending”, IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted On by Well-Defied Repeated Loads, Final Report, Lisbon, 1973.

[4] G.MONTI, C.NUTI : ”Non-linear Cyclic Behaviour of Reinforcing Bars Including Buckling”, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No 12, December 1992.

[5] P.DE BONNIERES, M.ZIDI : « Introduction de la viscoplasticité dans le modules de thermomécanique de CYRANO3 : principe, description et validation » Note HI-71/8334.

[6] J.M.PROIX, B.QUINNEZ, P.MASSIN, P.LACLERGUE : « Assemblages combustibles sous irradiation. Étude de faisabilité ». Note HI-75/97/017/0.

[7] I. LE PICHON, P. GEYER : « Modélisation du comportement viscoplastique anisotrope des tubes de gainage des crayons combustibles » Note HT-B2/95/018/A

[8] L. RANCŒUR : « Comportement en fluage axial sous irradiation des tubes guides en M5 et Zircaloy-4 recristallisés » note MMC HT25-C2004-192/LRC du 25/10/2004.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)