Intégration des relations de comportement viscoélastiques dans l'opérateur STAT_NON_LINE

Résumé

Ce document décrit dans le cas des comportements viscoélastiques les ingrédients nécessaires à la mise en œuvre de l'algorithme non-linéaire STAT_NON_LINE décrit en [R5.03.01]. Les données d'entrée de toutes les relations de comportement viscoélastiques intégrées dans *Aster* ont de manière générale la même forme. Seule la façon d'introduire la donnée principale (la fonction vitesse de déformation visqueuse) varie : elle est présentée suivant les différents mot-clés qui permettent à l'utilisateur de choisir la relation de comportement souhaitée.

Ces quantités sont calculées par une méthode d'intégration semi-implicite ou implicite. A partir de l'état initial, ou à partir de l'instant de calcul précédent, on calcule le champ de contraintes résultant d'un incrément de déformation.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1Introduction....3
2Relation continue....3
3Nature de la fonction g pour chacune des relations de comportement....4
3.1Relation LEMAITRE....4
3.2Relation de LEMAITRE dépendant de la fluence(LEMAITRE_IRRA)....4
3.2.1Formulation du modèle....4
3.2.2Traitement de la dépendance vis à vis de la fluence....5
3.3Relation LEMA_SEUIL....5
3.4Relation VISC_IRRA_LOG....5
4Intégration de la relation de comportement....6
4.1Établissement de l'équation scalaire pour le schéma implicite et avec des coefficients élastiques constants....6
4.2Résolution de l'équation scalaire : principe de la routine ZEROF2....9
4.3Calcul de la contrainte à la fin du pas de temps courant....11
4.4Schéma semi-implicite....12
4.5Prise en compte de la variation des coefficients élastiques en fonction de la température....13
5Calcul de l'opérateur tangent....13
6Bibliographie....15
7Description des versions du document....15

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

On décrit ici l'implémentation du modèle de viscoélasticité non-linéaire de Lemaître, qui peut se ramener pour certaines valeurs particulières des paramètres à une relation de comportement viscoélastique de Norton.

Une variante (dépendant de la fluence) de ce modèle de Lemaître a été ajoutée, en vue de la modélisation des assemblages combustibles (mot-clé LEMAITRE_IRRA). Ce modèle a pour particularité de comporter une déformation anélastique supplémentaire : la déformation de grandissement.

Un modèle viscoélastique avec seuil a été ajouté. Il s'agit d'un matériau dont le comportement est purement élastique jusqu'à un seuil puis une fois ce seuil dépassé, la relation de comportement devient un cas particulier de la relation de Lemaître (LEMA_SEUIL).

Enfin, un modèle viscoélastique avec fluage en logarithme de la fluence a été implanté, il est accessible par le mot-clef VISC_IRRA_LOG.

Pour chacun de ces modèles, on suppose que le matériau est isotrope (sauf pour la déformation de grandissement, qui, elle, est uniaxiale). Ils peuvent être utilisés en 3D, en déformations planes (D_PLAN) et en axisymétrique (AXIS).

On présente dans cette note les équations constitutives des modèles et leur implantation dans *Code_Aster*.

2 Relation continue

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et on scinde le tenseur des déformations en une partie élastique, une partie thermique, une partie anélastique (connue) et une partie visqueuse. Les équations sont alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tot} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_v$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A}(T)\boldsymbol{\varepsilon}_e$$
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v = g\left(\sigma_{eq}, \lambda, T\right)\frac{3}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$$

avec :

λ : déformation visqueuse cumulée $\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_v : \dot{\varepsilon}_v}$

$\tilde{\sigma}$: déviateur des contraintes $\tilde{\sigma} = \sigma - \frac{1}{3}Tr(\sigma)I$

σ_{eq} : contrainte équivalente $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\sigma} : \tilde{\sigma}}$

$A(T)$: tenseur d'élasticité

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Nature de la fonction g pour chacune des relations de comportement

3.1 Relation LEMAITRE

Dans ce cas, g s'exprime de façon explicite (σ est ici un scalaire) :

$$g(\sigma,\lambda,T)=\left(\frac{1}{K}\frac{\sigma}{\lambda^{1/m}}\right)^n \text{ avec } \frac{1}{K}\geq 0,\frac{1}{m}\geq 0,n>0$$

Les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous les mots clés facteurs LEMAITRE ou LEMAITRE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU.

LEMAITRE= _F(N=n, UN_SUR_K= $\frac{1}{K}$, UN_SUR_M = $\frac{1}{m}$)

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

3.2 Relation de LEMAITRE dépendant de la fluence (LEMAITRE_IRRA)

Ce paragraphe décrit la dépendance vis à vis de la fluence (et son traitement) de la relation de comportement viscoplastique de J. Lemaître, introduite pour la modélisation des assemblages combustibles et applicable aux éléments 2D et 3D massifs et aux éléments TUYAU, sous le mot-clé LEMAITRE_IRRA..

3.2.1 Formulation du modèle

Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_v=\frac{3}{2}\dot{p}\frac{\sigma^D}{\sigma_{eq}} \\ \dot{p}=\left[\frac{\sigma_{eq}}{p^{1/m}}\right]^n\left(\frac{1}{K}\frac{\phi}{\phi_0}+L\right)^{\beta}e^{-\frac{Q}{R(T+T_0)}} \\ \dot{(A^{-1}(T)\sigma)}=\dot{\varepsilon}_{tot}-\dot{\varepsilon}_v-\dot{\varepsilon}_g-\dot{\varepsilon}_{th} \end{cases}$$

avec :
$T_0=273{,}15\,°C$
$n>0$, $1/K\geq 0$, $1/m\geq 0$
$\phi_0>0$, $Q/R\geq 0$, $L\geq 0$, β réel quelconque

Les coefficients sont fournis sous les mots-clés LEMAITRE_IRRA et ELAS de DEFI_MATERIAU et ϕ est le flux neutronique (quotient de l'incrément de fluence, définie par le mot-clé AFFE_VARC de AFFE_MATERIAU, par l'incrément de temps).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La loi de grandissement est : $\varepsilon_g(t)=f(T,\Phi_t)\varepsilon_g^0$ avec ε_g^0 déformation uniaxiale unité dans un repère R_1 donné par l'utilisateur à l'aide du mot-clé MASSIF (voir [U4.42.01] et [U4.43.01]) et $f(T,\Phi_t)$ .est également une fonction définie par l'utilisateur dans DEFI_MATERIAU ([U4.43.01]).

Remarques :

La fluence, le temps et le flux Φ_0 doivent être exprimés en des unités telles que le rapport Φ/Φ_0 soit sans dimension. Q/R est en Kelvin. T est en $°C$.

3.2.2 Traitement de la dépendance vis à vis de la fluence

Le modèle décrit ci-dessus correspond en fait à une loi de Lemaître normale, définie par les trois coefficients n , $1/K'$ et $1/m$ avec :

$$\frac{1}{K'}=\left(\frac{1}{K}\frac{\Phi}{\Phi_0}+L\right)^{\beta/n} e^{-\frac{Q}{nR(T+T_0)}}$$

Il suffit donc de calculer $1/K'$ et de le fournir comme donnée au calcul à la place de $1/K$.
Par ailleurs, dans le calcul de la contrainte élastique, on ajoute aux déformations anélastiques (nulles par défaut) la déformation de grandissement exprimée ci-dessus, après avoir effectué le changement de repère entre le repère local et le repère R_1 .

3.3 Relation LEMA_SEUIL

Pour ce comportement, g s'exprime aussi de façon explicite (puisqu'il s'agit d'un cas particulier de la relation de LEMAITRE présenté ci dessus) :

Si $D\leq 1$ alors $g(\sigma,\lambda,T)=0$ (comportement purement élastique)

Si $D>1$ alors $g(\sigma,\lambda,T)=A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right)\Phi$ avec $A\geq 0$, $\Phi\geq 0$

Avec : $D=\frac{1}{S}\int_0^t \sigma_{eq}(u)du$

Les données matériaux à renseigner par l'utilisateur doivent être fournies sous le mot clé LEMA_SEUIL ou LEMA_SEUIL_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU :

```
LEMA_SEUIL = _F(A=A,    S=S)
```

Quant au paramètre Φ , il s'agit du flux de neutron qui bombarde le matériau (quotient de l'incrément de fluence, définie par le mot-clé AFFE_VARC de AFFE_MATERIAU, par l'incrément de temps).
Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

3.4 Relation VISC_IRRA_LOG

Pour cette relations, g ne s'exprime pas de façon explicite. Le comportement est représenté par un essai de fluage unidimensionnel, à contrainte constante, qui fait intervenir le temps écoulé depuis l'instant où l'on applique la contrainte. La relation de comportement est ici définie par la donnée de quatre fonctions f_1, g_1, f_2, g_2 décrivant l'évolution de la déformation visqueuse au cours du temps :

$$\varepsilon_v=\lambda=f_1(t)g_1(\sigma,T)+f_2(t)g_2(\sigma,T) \qquad \textbf{éq 3.4-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La fonction g se calcule alors numériquement en éliminant le temps t de la manière suivante :

1) pour un triplet donné (σ, λ, T) , on résout en t l'équation [éq 3.2-1] par la méthode de Newton (voir [bib2]). On trouve une approximation de la solution $t(\sigma, \lambda, T)$,
2) on obtient la valeur de la fonction g en (σ, λ, T) en dérivant par rapport au temps l'équation [éq 3.2-1] (voir [bib1]) :

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\lambda} = g(\sigma, \lambda, T) = f_1'(t)\, g_1(\sigma, T) + f_2'(t)\, g_2(\sigma, T)$$

et en substituant dans cette nouvelle équation la valeur de $t(\sigma, \lambda, T)$ trouvée précédemment. On trouve la formulation uniaxiale suivante :

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\lambda} = g(\sigma, \lambda, T) = f_1'\left(t(\sigma, \lambda, T)\right) g_1(\sigma, T) + f_2'\left(t(\sigma, \lambda, T)\right) g_2(\sigma, T)$$

La forme des quatre fonctions f_1, g_1, f_2, g_2 est prédéfinie et l'utilisateur n'introduit que quelques paramètres dans le fichier de commande.

Pour VISC_IRRA_LOG, on a :

$$f_1(t) = \ln(1 + \omega . \Phi . t)$$
$$g_1(\sigma, T) = A . \sigma . e^{-\frac{Q}{T}}$$
$$f_2(t) = \Phi . t$$
$$g_2(\sigma, T) = B . \sigma . e^{-\frac{Q}{T}}$$

Le paramètre Φ , est le flux de neutrons. Il est doit être renseigné sous le mot-clé facteur AFFE_VARC via la variable de commande IRRA.

Les paramètres A , B , ω et Q sont ceux fournis sous le mot clé facteur VISC_IRRA_LOG de l'opérateur DEFI_MATERIAU.

On notera que, pour toutes les fonctions :

t s'exprime en heures
T s'exprime en $°C$
σ s'exprime en MPa

Il faut donc rentrer des données cohérentes avec ces unités dans le fichier de commande et dans le fichier de maillage.

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots-clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

4 Intégration de la relation de comportement

4.1 Établissement de l'équation scalaire pour le schéma implicite et avec des coefficients élastiques constants

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On désigne par ε_{tot} la déformation totale à l'instant $t+\Delta t$ et par $\Delta\varepsilon_{tot}$ la variation de déformation totale au cours du pas de temps courant.

On appelle ε_o la déformation à l'instant $t+\Delta t$ résultant de la dilatation thermique et des déformations anélastiques (parmi lesquelles figurent éventuellement les déformations de grandissement, cf [§3.2]). On a donc :

$$\Delta\varepsilon_o=\left[\alpha(t+\Delta t)\left(T(t+\Delta t)-T_{ref}\right)-\alpha(t)\left(T(t)-T_{ref}\right)\right]I_3+\varepsilon_a(t+\Delta t)-\varepsilon_a(t)$$

où I_3 est le tenseur identité d'ordre 2 en dimension 3.

On pose $\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon_{tot}-\Delta\varepsilon_o$

Comme on suppose ici que μ est constant, on a la relation suivante entre les déviateurs de $\Delta\sigma$ et $\Delta\varepsilon$:

$$\Delta\tilde{\sigma}=2\mu\left(\Delta\tilde{\varepsilon}-\Delta\varepsilon_v\right) \qquad \textbf{éq 4.1-1}$$

Or, la loi d'écoulement s'écrit, de façon implicite :

$$\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta t}=\frac{3}{2}g\left(\sigma_{eq},\lambda^-+\left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq},T\right)\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} \qquad \textbf{éq 4.1-2}$$

On a donc, en éliminant $\Delta\varepsilon_v$ entre [éq 4.1-1] et [éq 4.1-2] :

$$\begin{aligned}2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}&=\Delta\tilde{\sigma}+3\mu\Delta t\,.\,g\left(\sigma_{eq},\lambda^-+\left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq},T\right)\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}\\ \left(\tilde{\sigma}^-+2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}\right)&=\left(1+3\mu\Delta t\frac{g\left(\sigma_{eq},\lambda^-+\left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq},T\right)}{\sigma_{eq}}\right)\tilde{\sigma}\end{aligned} \qquad \textbf{éq 4.1-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En posant $\tilde{\sigma}^e = \tilde{\sigma}^- + 2\mu\,\Delta\tilde{\varepsilon}$, on a donc :

$$\sigma_{eq}^e = 3\mu\,\Delta t\,.\,g\left(\sigma_{eq}, \lambda^- + \left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq}, T\right) + \sigma_{eq} \qquad \textbf{éq 4.1-4}$$

Or, on a d'après [éq 4.1-2] :

$$\left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq} = \Delta t\,.\,g\left(\sigma_{eq}, \lambda^- + \left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq}, T\right)$$

D'où :

$$\sigma_{eq}^e = 3\mu\left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq} + \sigma_{eq}$$
$$\left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq} = \frac{1}{3\mu}\left(\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}\right)$$

En substituant cette dernière expression dans [éq 4.1-4], on a :

$$\sigma_{eq}^e = 3\mu\,\Delta t\,.\,g\left(\sigma_{eq}, \lambda^- + \frac{1}{3\mu}\left(\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}\right), T\right) + \sigma_{eq}$$

Si l'on pose, $\sigma_{eq}^e, \lambda^-, T$ et Δt étant connus :

$$f(x) = 3\mu\,\Delta t\,.\,g\left(x, \lambda^- + \frac{1}{3\mu}\left(\sigma_{eq}^e - x\right), T\right) + x - \sigma_{eq}^e$$

on peut alors calculer la quantité $\sigma_{eq} = \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right)_{eq}$ comme étant la solution de l'équation scalaire : $f(x) = 0$ où $x = \sigma_{eq}$, convention adoptée pour les paragraphes suivants.
Dans le cas d'une loi de Lemaître avec seuil, `LEMA_IRRA_SEUIL`, les équations précédentes ne sont utiles qu'une fois le seuil franchi. En effet en-deçà du seuil le comportement est élastique.

On discrétise le seuil implicitement :

$$D(\sigma^- + \Delta\sigma) = \frac{1}{S}\int_0^t \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right)_{eq}(u)\,du$$

De la même façon que pour l'intégration des lois de comportement élasto-plastique de Von-Mises, on distingue alors deux cas.

$D(\sigma^- + \Delta\sigma) \leq 1$ alors $g\left(\sigma^- + \Delta\sigma, \lambda, T\right) = 0$

$D(\sigma^- + \Delta\sigma) > 1$ alors $g\left(\sigma^- + \Delta\sigma, \lambda, T\right) = A\,.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{eq}\right)\varphi$

Il en résulte à partir de l'équation ci-dessus :

$g\left(\sigma^- + \Delta\sigma, \lambda, T\right) \neq A\,.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{eq}\right)\varphi$ implique $D(\sigma^- + \Delta\sigma) \leq 1$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Or g ne peut prendre que la valeur 0 ou $A.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{eq}\right)\varphi$ donc

$g\left(\sigma^{-}+\Delta\sigma,\lambda,T\right)\neq A.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{eq}\right)\varphi$ implique $D(\sigma^{-}+\Delta\sigma)\leq 1$ et $\Delta\sigma=A.\Delta\varepsilon$

soit $g\left(\sigma^{-}+\Delta\sigma,\lambda,T\right)=A.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{eq}\right)\varphi$ alors $D(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon)>1$

Le critère de franchissement du seuil peut donc s'écrire $D(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon)>1$

Or $D(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon)=\frac{1}{S}\int_{0}^{t}\left(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon\right)_{eq}(u)du$

En discrétisant le temps, on a alors :

$$D(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon)=\frac{1}{S}\int_{0}^{t^{-}}\left(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon\right)_{eq}(u)du+\frac{1}{S}\int_{t^{-}}^{t}\left(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon\right)_{eq}(u)du$$

$$D(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon)=\frac{1}{S}\left(D^{-}S+\frac{\sigma_{eq}^{-}+\left(\sigma^{-}+A.\Delta\varepsilon\right)_{eq}}{2}\left(t-t^{-}\right)\right)$$

4.2 Résolution de l'équation scalaire : principe de la routine ZEROF2

On montre facilement que, si les conditions requises au paragraphe [§3] sur les caractéristiques des matériaux sont vérifiées, la fonction f est strictement croissante et l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique.

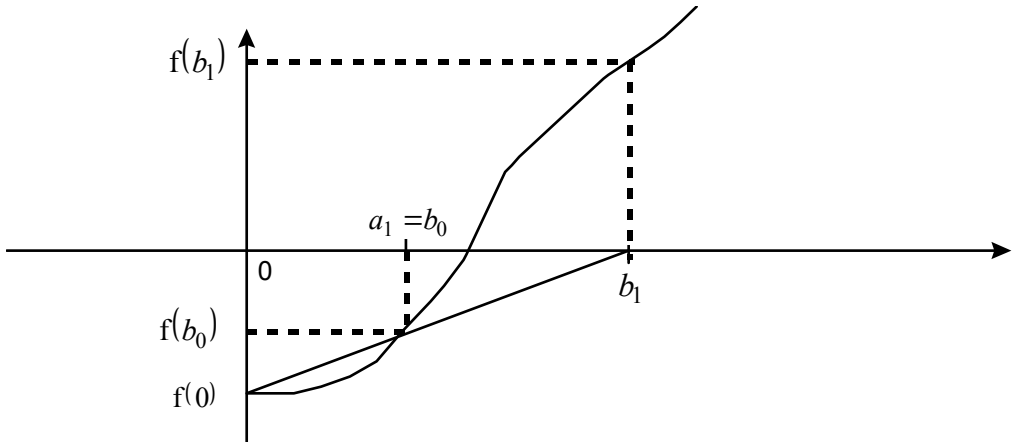
Si $\sigma_{eq}^{e}=0$, alors la solution est $x=0$. Sinon, on a : $f(0)=-\sigma_{eq}^{e}<0$

Le problème consiste donc à trouver pour une fonction f quelconque la solution de l'équation $f(x)=0$ sachant que cette solution existe, que $f(0)<0$ et que f est strictement croissante.

L'algorithme adopté dans ZEROF2 est le suivant :

- on part de $a_0=0$ et $b_0=x_{ap}$ où x_{ap} est une approximation de la solution. Si c'est nécessaire (c'est-à-dire si $f\left(b_0\right)<0$), on se ramène par la méthode des sécantes ($z_n=\frac{a_n f\left(b_n\right)-b_n f\left(a_n\right)}{f\left(b_n\right)-f\left(a_n\right)}$ puis $a_{n+1}=b_n$ et $b_{n+1}=z_n$) en une ou plusieurs itérations au cas où $f(a)<0$ et $f(b)>0$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



(Dans le cas de la figure ci-dessus, cette première phrase s'est faite en une itération : $a_1=b_0$ et $f(b_1)>0$).

- on calcule N_d = partie entière $\left(\sqrt{N_{\max}}\right)$ où $N_{\max}$ est le nombre maximum d'itérations que l'on s'est donné. On résout alors l'équation par la méthode des sécantes en utilisant toutefois la méthode de dichotomie à chaque fois que n est multiple de N_d :

1)
Si N_d divise n

$$z_n=\frac{a_n+b_n}{2}$$

sinon

$$z_n=\frac{a_n f(b_n)-b_n f(a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$$

finsi
$n=n+1$
si $|f(z)|>\varepsilon$
  si $f(z)<0$
    $a_{n+1}=z_n \qquad b_{n+1}=b_n$
  sinon
    $a_{n+1}=a_n \qquad b_{n+1}=z_n$
  finsi
  aller en 1)
sinon
  La solution est : $x=z_n \rightarrow FIN$
finsi

Cette deuxième partie de l'algorithme permet de traiter en un nombre d'itérations raisonnable les cas où f est très fortement non-linéaire, alors que la méthode des sécantes aurait convergé trop lentement. Ces cas de forte non-linéarité se rencontrent notamment avec la loi de LEMAITRE, pour des valeurs de $\frac{n}{m}$ grandes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Calcul de la contrainte à la fin du pas de temps courant

D'après [éq 4.1-3], si x est la solution de l'équation scalaire, en posant :

$$b\left(x,\sigma_{eq}^{e}\right)=\frac{1}{1+3\mu\,\Delta t\,\dfrac{g\left(x,\lambda^{-}+\dfrac{1}{3\mu}\left(\sigma_{eq}^{e}-x\right),T\right)}{x}}=\frac{x}{\sigma_{eq}^{e}}$$

on a :

$$\tilde{\sigma}=b\left(x,\sigma_{eq}^{e}\right)\tilde{\sigma}^{e} \qquad \textbf{éq 4.3-1}$$

Dans le cas où $\sigma_{eq}^{e}=0$, ce qui équivaut d'après l'équation scalaire à $x=0$, on prolonge b par continuité. Pour cela, on pose $y(x)=\lambda^{-}+\dfrac{1}{3\mu}\left(\sigma_{eq}^{e}-x\right)$ et $G(x)=g\left(x,y(x),T\right)$. La dérivée de G s'exprime en fonction des dérivées partielles de g au point $\left(x,y(x),T\right)$:

$$G'(x)=\frac{\partial g}{\partial x}\left(x,y(x),T\right)-\frac{1}{3\mu}\frac{\partial g}{\partial y}\left(x,y(x),T\right)$$

Le prolongement de b par continuité donne alors :

$$b(0,0)=\frac{1}{1+3\mu\,\Delta t\,G'(0)}$$

et on a, toujours dans le cas où $\sigma_{eq}^{e}=0$, $\tilde{\sigma}=0$.

Une fois que l'on a calculé $\tilde{\sigma}$, on obtient σ par la relation (K est ici supposé constant) :

$$\sigma=\sigma^{-}+\Delta\sigma=\tilde{\sigma}+\left(\frac{1}{3}Tr\left(\sigma^{-}\right)+K\,Tr\left(\Delta\varepsilon\right)\right)I_3 \qquad \textbf{éq 4.3-2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.4 Schéma semi-implicite

Avec un schéma numérique implicite [éq 4.1-2], dans le cas, par exemple, où g ne dépend pas de λ, seule intervient par le calcul de $\Delta\varepsilon_v$ la valeur de la contrainte en fin de pas de temps. Il peut en résulter des erreurs numériques importantes si la contrainte varie fortement au cours du temps (voir [bib2]).

Pour remédier à cela et améliorer la résolution, on discrétise la loi d'écoulement de façon semi-implicite :

$$\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta t}=\frac{3}{2}g\left(\left(\sigma^-+\frac{\Delta\sigma}{2}\right)_{eq},\lambda^-+\frac{\left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq}}{2},T^-+\frac{\Delta T}{2}\right)\frac{\left(\tilde{\sigma}^-+\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{2}\right)}{\left(\sigma^-+\frac{\Delta\sigma}{2}\right)_{eq}} \qquad \textbf{éq 4.4-1}$$

Pour transformer de la façon la plus économique ce qui a été programmé précédemment (en suivant la formulation implicite [éq 4.1-2]), il suffit de diviser chaque membre de l'équation [éq 4.4-1] par 2 :

$$\frac{\left(\Delta\varepsilon_v/2\right)}{\Delta t}=\frac{3}{2}\frac{g\left(\left(\sigma^-+\frac{\Delta\sigma}{2}\right)_{eq},\lambda^-+\frac{\left(\Delta\varepsilon_v\right)_{eq}}{2},T^-+\frac{\Delta T}{2}\right)}{2}\frac{\left(\tilde{\sigma}^-+\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{2}\right)}{\left(\sigma^-+\frac{\Delta\sigma}{2}\right)_{eq}}$$

et de faire la même chose avec la relation [éq 4.1-1] :

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{2}=2\mu\left(\frac{\Delta\tilde{\varepsilon}}{2}-\frac{\Delta\varepsilon_v}{2}\right)$$

On constate que ce système est de la même forme que celui constitué par les équations [éq 4.1-1] et [éq 4.1-2], la donnée étant $\frac{\Delta\varepsilon}{2}$ au lieu de $\Delta\varepsilon$, les inconnues étant respectivement $\frac{\Delta\sigma}{2}$ et $\frac{\Delta\varepsilon_v}{2}$ au lieu de $\Delta\sigma$ et $\Delta\varepsilon_v$ et la fonction $\frac{g}{2}$ remplaçant la fonction g.

On peut donc utiliser la résolution des paragraphes [§4.1] à [§4.3] ainsi que l'algorithme correspondant en introduisant $\frac{\Delta\varepsilon}{2}$ et en divisant la fonction g par 2. Il reste alors à multiplier les résultats $\frac{\Delta\sigma}{2}$ et $\frac{\Delta\varepsilon_v}{2}$ par 2 pour obtenir les incréments de contrainte et de déformation visqueuse calculés par le schéma semi-implicite (le $\Delta\sigma$ et le $\Delta\varepsilon_v$ de l'équation [éq 4.4-1]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On remarquera que le calcul de l'opérateur tangent n'est pas affecté par cette modification du schéma numérique. En effet, on a évidemment :

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \left(\frac{\Delta \sigma}{2} \right)}{\partial \left(\frac{\Delta \varepsilon}{2} \right)}$$

4.5 Prise en compte de la variation des coefficients élastiques en fonction de la température

On a, si A est le tenseur d'élasticité :

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_v + \Delta \left(A^{-1} \sigma \right)$$

avec :

$$\Delta \left(A^{-1} \sigma \right) = A^{-1}\left(T^- + \Delta T \right)\left(\sigma^- + \Delta \sigma \right) - A^{-1}\left(T^- \right)\sigma^-$$

Ceci se traduit dans les équations du [§4.4] par :

$$2\mu \left(\frac{\Delta \tilde{\varepsilon}}{2} \right) - \left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} \right) = 3\mu \Delta t \frac{g\left(\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}, \lambda^- + \frac{\left(\Delta \varepsilon_v \right)_{eq}}{2}, T^- + \frac{\Delta T}{2} \right)}{2} \frac{\left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)}{\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}} - \tilde{\sigma}^- \left(\frac{2\mu^- + 2\mu}{4\mu^-} \right)$$

En posant :

$$\tilde{\sigma}^e = \left(\frac{2\mu^- + 2\mu}{4\mu^-} \right) \tilde{\sigma}^- + 2\mu \left(\frac{\Delta \tilde{\varepsilon}}{2} \right)$$

et

$$Tr\left(\sigma^e \right) = \left(\frac{3K^- + 3K}{6K^-} \right) Tr\left(\sigma^- \right) + 3K\, Tr\left(\frac{\Delta \varepsilon}{2} \right)$$

on se ramène exactement au cas précédent [§4.4].

5 Calcul de l'opérateur tangent

Dans le cas où $\sigma_{eq}^e = 0$ et $x = 0$, on prend le tenseur d'élasticité comme opérateur tangent.

Sinon, on obtient cet opérateur en dérivant l'équation [éq 4.3-1] par rapport à $\Delta \varepsilon$:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial b\left(x, \sigma_{eq}^e \right)}{\partial \Delta \varepsilon} \tilde{\sigma}^e + b\left(x, \sigma_{eq}^e \right) \frac{\partial \tilde{\sigma}^e}{\partial \Delta \varepsilon}$$

puis en dérivant aussi [éq 4.3-2] par rapport à $\Delta \varepsilon$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon}=\frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon}+KI_3\frac{\partial Tr(\Delta \varepsilon)}{\partial \Delta \varepsilon}=\frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon}+KI_3^t I_3$$

On notera que, dans ces équations, les tenseurs d'ordre 2 et d'ordre 4 sont respectivement assimilés à des vecteurs et à des matrices. I_3 est ici un tenseur d'ordre 2, assimilé à un vecteur :

$$^t I_3=(1,1,1,0,0,0)$$

On a de plus :

$$\frac{\partial b\left(x,\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{e}\right)}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial b}{\partial x}\left(x,\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{e}\right)\frac{\partial x}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}+\frac{\partial b}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eq}^{e}}\left(x,\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{e}\right)\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{eq}}^{e}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Il faut donc calculer $\frac{\partial x}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}$. Pour cela, on dérive implicitement l'équation scalaire par rapport à $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$.

Pour simplifier, on omettra par la suite dans l'écriture de g et de ses dérivées le paramètre T.

On a alors :

$$\left[3\mu \Delta t G'(x)+1\right]\frac{\partial x}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}+\Delta t\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{eq}}^{\mathbf{e}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{eq}}^{\mathbf{e}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}$$

D'où :

$$\frac{\partial x}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{1-\Delta t\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{1+3\mu \Delta t G'(x)}\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{eq}}^{\mathbf{e}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{1-\Delta t\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{1+3\mu \Delta t G'(x)}\frac{3\mu}{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{eq}}^{\mathbf{e}}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}$$

avec l'expression de $\mathrm{G}'(x)$ obtenue au [§4.3].

On obtient finalement l'expression suivante de l'opérateur tangent :

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}=K\,\mathbf{I}_3^{\mathbf{t}}\mathbf{I}_3+2\mu\left[\gamma\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e\,t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}+b\left(x,\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{e}\right)\mathbf{A}\right]$$

avec

$A=\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{J}_6-\frac{1}{3}\mathbf{I}_3{}^t\,\mathbf{I}_3$ où $\mathbf{J}_6$ est la matrice identité de rang 6.

$$\gamma=\frac{3}{2\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{eq}}^{\mathbf{e}}\right)^3}\left[\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{eq}}^{\mathbf{e}}\frac{1-\Delta t\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{1+3\mu \Delta t G'(x)}-x\right]$$

Remarque :

Dans le cas de la loi `VISC_IRRA_LOG`*, on vérifie facilement que :*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$G'(x)=\frac{1}{f'_1 g_1+f'_2 g_2}[g_1 g'_1\left(f'^2_1-f_1 f''_1\right)+g_2 g'_2\left(f'^2_2-f_2 f''_2\right)+g_1 g'_2\left(f'_1 f'_2-f''_1 f_2\right)$$
$$+g_2 g'_1\left(f'_1 f'_2-f_1 f''_2\right)-\frac{1}{3\mathrm{m}}\left(f''_1 g_1+f''_2 g_2\right)]$$
$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x,y,T)=\frac{f''_1 g_1+f''_2 g_2}{f'_1 g_1+f'_2 g_2}$$

où $f_1, f'_1, f''_1, f_2, f'_2, f''_2$ désignent les valeurs de f_1 et f_2 et de leurs dérivées au point $t(x,y,T)$ et où g_1, g'_1, g_2, g'_2 désignent les valeurs de g_1 et g_2 et de leur dérivée par rapport à σ au point (x,T) (voir [bib1]).

6 Bibliographie

1) de BONNIERES P. : Ecriture sous forme standard généralisée des lois de comportement viscoplastiques du Zircaloy, note EDF-DER HI-71/7940-Indice A, 1992

2) de BONNIERES P., ZIDI M. : Introduction de la viscoplasticité dans le module de thermomécanique de Cyrano3 : principe, description et validation, note EDF-DER HI-71/8334, 1993.

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
7.4	P. de BONNIERES	Texte initial
8.4	S. LECLERCQ, R.MASSON	Lois GATT-MONERIE et LEMA_SEUIL
9.3	P. de BONNIERES	Suppression ZIRC_CYRA2, ZIRC_EPRI.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)