Relation de comportement viscoplastique de Taheri

Résumé

On présente dans ce document l'implantation de la relation de comportement de Taheri viscoplastique, disponible pour l'ensemble des éléments isoparamétriques (milieu continu 2D et 3D) à l'exception des contraintes planes. Après une présentation des équations d'évolution de cette loi, on décrit le système obtenu par discrétisation implicite ; on montre en particulier qu'il admet toujours une solution.

Ce modèle est bien adapté pour décrire la réponse des aciers austénitiques sous sollicitations cycliques, et notamment le phénomène de déformation progressive. En revanche, du fait de sa complexité (deux surfaces de charge, variable interne semi-discrète), il ne paraît pas souhaitable de l'employer pour des applications différentes (trajet de chargement monotone, par exemple).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Description du modèle....3
1.1 Comportement plastique....3
1.2 Prise en compte de la viscosité....5
1.3 Description des variables internes calculées par Code_Aster....6
2 Formulation numérique de la relation de comportement....6
2.1 Discrétisation implicite des équations de comportement....6
2.2 Prise en compte des termes visqueux....7
2.3 Discrétisation des conditions de cohérence....8
2.4 Encadrement des solutions....9
3 Méthodes de résolution numérique....12
3.1 Équation scalaire : méthode de sécantes....12
3.2 Systèmes non linéaires : méthode de Newton et recherche linéaire....12
3.3 Critères d'arrêt....13
3.4 Matrice tangente....14
3.5 Contraintes planes....15
4 Bibliographie....16
5 Description des versions du document....16

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Description du modèle

La relation de comportement proposée par Taheri [bib5] permet de décrire la réponse des aciers austénitiques sous sollicitations cycliques : elle est en effet bien adaptée pour représenter le phénomène de déformation progressive. Avant d'énoncer les équations proprement dites, on peut préciser que ce modèle diffère de la plasticité classique (critère de von Mises avec écrouissage cinématique et isotrope) par deux particularités, sources de difficultés dans la formulation numérique. D'une part, l'évolution des variables dissipatives repose sur deux critères de charge au lieu d'un : le premier, classique, conditionne l'apparition de déformation plastique, le second permet de garder une trace de l'écrouissage "maximal" atteint par le matériau pour rendre compte du phénomène de rochet. D'autre part, pour représenter de manière satisfaisante la déformation progressive, une variable interne semi-discrète a été introduite. Constante lorsque le comportement est dissipatif, elle n'évolue que dans le régime élastique du matériau. D'apparence originale, ce modèle n'en repose pas moins sur des bases physiques, toujours exposées dans Taheri [bib5]. Il est accessible, dans une version étendue viscoplastique (nécessaire pour décrire le comportement sous températures élevées), par la commande STAT_NON_LINE sous le mot-clé RELATION : VISC_TAHERI.

1.1 Comportement plastique

Une description détaillée de la loi de comportement est donnée dans Taheri et al. [bib6]. Succinctement, l'état du matériau est décrit par son état de déformation, sa température ainsi que quatre variables internes :

$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur de déformation totale
T	température
p	déformation plastique cumulée
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	tenseur de déformation plastique
σ^p	contrainte de pic, mémoire de l'écrouissage maximal
$\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$	tenseur déformation plastique à la dernière décharge (variable semi-discrète).

Les équations d'état qui expriment les forces thermodynamiques associées en fonction des variables d'état s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma} = K\,\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{th}\right)\mathbf{Id}+2\mu\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}^{p}\right) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{th}=\alpha\left(T-T^{réf}\right)\mathbf{Id} \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-1}$$

$$R=\mathrm{D}\left[R^0+\left(\frac{2}{3}\right)^a A\left(\boldsymbol{\varepsilon}^p-\boldsymbol{\varepsilon}_n^p\right)_{eq}^a\right] \qquad \mathrm{D}=1-m\,e^{-b\,p\left(1-\frac{\sigma^p}{S}\right)} \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-2}$$

$$\mathbf{X}=\mathrm{C}\left[S\,\boldsymbol{\varepsilon}^p-\sigma^p\,\boldsymbol{\varepsilon}_n^p\right] \qquad \mathrm{C}=C_\infty+C_1 e^{-b\,p\left(1-\frac{\sigma^p}{S}\right)} \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\tilde{\mathbf{a}}$	partie déviatorique d'un tenseur $\mathbf{a}$
R	variable d'écrouissage isotrope
$\mathbf{X}$	variable d'écrouissage cinématique
K , μ	modules de compressibilité et de cisaillement
α	coefficient de dilatation thermique
T^{ref}	température de référence
S	contrainte de rochet
b , R^0 , A , $\mathbf{a}$, m , C_∞ , C_1	autres caractéristiques d'écrouissage du matériau

Notons que les modules d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sont renseignés par l'utilisateur par la commande DEFI_MATERIAU, mot-clé ELAS, tandis que les caractéristiques de l'écrouissage sont fixés par le mot-clé TAHERI. Ces caractéristiques peuvent dépendre de la température, en employant les mots-clés ELAS_FO et TAHERI_FO. Précisons également qu'un exemple d'identification des caractéristiques d'écrouissage sur des situations uniaxiales est donné dans Geyer [bib2].

L'évolution des variables internes est définie par deux critères. Le premier gouverne la plasticité traditionnelle à écrouissages cinématique et isotrope combinés :

$$\mathrm{F}=\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}\right)_{eq}-R\leq 0 \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^0=\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}}{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}\right)_{eq}} \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-4}$$

$\left(.\right)_{eq}$	norme équivalente : $\mathbf{a}_{eq}=\left(\frac{3}{2}\tilde{\mathbf{a}}:\tilde{\mathbf{a}}\right)^{\frac{1}{2}}$
F	critère de plasticité
$\mathbf{s}^0$	normale extérieure au critère F

Ce critère est assorti de la classique condition de charge / décharge :

$$\begin{cases}\text{si } \mathrm{F}<0 \text{ ou } \dot{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{s}^0\leq 0 & \dot{p}=0 \quad (\text{élasticité})\\ \text{si } \mathrm{F}=0 \text{ et } \dot{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{s}^0>0 & \dot{p}\geq 0 \text{ tel que } \dot{\mathrm{F}}=0 \quad (\text{plasticité})\end{cases} \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-5}$$

Et la loi d'écoulement associée au critère F est :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\frac{3}{2}\dot{p}\,\mathbf{s}^0 \text{ et donc } \dot{p}=\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p_{\mathrm{eq}} \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-6}$$

Le second critère gouverne l'évolution de la contrainte de pic. Géométriquement dans l'espace des déviateurs des contraintes, il traduit le fait que la première surface de charge $\left(\mathrm{F}=0\right)$, représentée par une sphère de centre $\mathbf{X}$ et de rayon R , reste à l'intérieur d'une sphère de centre l'origine et de rayon σ^p . Il s'écrit simplement :

$$\mathrm{G}=X_{eq}+R-\sigma^p\leq 0 \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-7}$$

G critère d'écrouissage maximal

D'après les considérations géométriques précédentes, l'évolution de la contrainte de pic est :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \text{si } G<0 \text{ ou } \dot{X}_{eq}+\dot{R}\leq 0 & \dot{\sigma}^p=0 \\ \text{si } G=0 \text{ et } \dot{X}_{eq}+\dot{R}>0 & \dot{\sigma}^p\geq 0 \text{ tel que } \dot{G}=0 \end{cases} \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-8}$$

Il faut remarquer que dans l'état naturel du matériau, la contrainte de pic n'est pas nulle mais vaut la limite d'élasticité initiale, à savoir :

$$\sigma^p(\text{initial})=(1-m)\,R^0$$

Jusqu'à présent, nous n'avons pas évoqué l'évolution de la variable interne semi-discrète $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$. En fait, elle n'évolue qu'en régime élastique. Plus exactement, cette variable tient compte de l'état de déformation plastique lors de la dernière décharge ; autrement dit, au début de chaque décharge, cette variable devrait prendre instantanément la valeur de la déformation plastique actuelle. Toutefois, pour conserver un comportement continu, on régularise l'évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ de la manière suivante :

En régime élastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p=\dot{\xi}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_n^p-\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)\begin{cases} \text{si } \boldsymbol{\varepsilon}_n^p=\boldsymbol{\varepsilon}^p & \dot{\xi}=0 \quad (\text{élasticité classique}) \\ \text{si } \boldsymbol{\varepsilon}_n^p\geq\boldsymbol{\varepsilon}^p & \dot{\xi}\leq 0 \text{ tq } \dot{F}=0 \quad (\text{pseudo-décharge}) \end{cases} \qquad \textbf{éq 1.1-1.1-9}$$

En régime plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p=0$$

Le comportement est ainsi totalement déterminé. Avant de passer à l'introduction de la viscosité, l'observation des deux surfaces de charge appelle une remarque importante. On pourrait penser que la surface $G=0$ n'est effectivement activée qu'en régime plastique. En pratique, il n'en est rien. On peut par exemple citer le cas d'un chargement thermique : un refroidissement entraîne (généralement) une dilatation de la surface de charge $F=0$, si bien que la contrainte de pic est amenée à évoluer pour préserver $G\leq 0$, et ce même en régime élastique.

1.2 Prise en compte de la viscosité

Pour modéliser le comportement des aciers inoxydables sous chargement cyclique quand la température est de l'ordre de $550\,°C$, il n'est plus possible de négliger les termes de fluage. Pour rendre compte de ces effets de viscosité tout en conservant les propriétés du modèle précédent, une méthode simple consiste à rendre visqueuse l'évolution de la déformation plastique. Autrement dit, la viscosité n'intervient qu'en régime plastique : aucune influence directe sur la variable interne semi-discrète ni sur la surface de charge $G=0$. Pour cela, en suivant Lemaitre et Chaboche [bib3], on remplace la condition de cohérence [éq 1.1-5] par :

$$\dot{p}=\left(\frac{\langle F\rangle}{K\,p^{1/M}}\right)^N \qquad \textbf{éq 1.2-1.2-1}$$

$\langle F\rangle$	partie positive de F (crochets de Macauley)
K , N , M	caractéristiques de viscosité du matériau

Les caractéristiques de viscosité du matériau sont renseignés dans la commande DEFI_MATERIAU, soit par le mot-cle LEMAITRE si elles ne dépendent pas de la température, soit par le mot-clé LEMAITRE_FO dans le cas contraire. En l'absence d'un de ces mots-clés, le comportement est présumé plastique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On laisse inchangées toutes les autres équations du modèle. On verra qu'une telle introduction de la viscosité n'entraîne que des modifications mineures de l'algorithme d'intégration implicite de la loi de comportement.

1.3 Description des variables internes calculées par *Code_Aster*

Les variables internes calculées par *Code_Aster* sont au nombre de 9. Elles sont rangées dans l'ordre suivant :

1	p	déformation plastique cumulée
2	σ^p	contrainte de pic
3 à 8	$\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$	tenseur de déformation plastique à la dernière décharge (rangé dans l'ordre xx , yy , zz , xy , xz , yz)
9	χ	indicateur de charge / décharge (cf. [§2.3]) 0 décharge élastique 1 charge plastique classique 2 charge plastique à deux surfaces 3 pseudo-décharge

Quant au tenseur des déformations viscoplastiques, il n'est pas rangé parmi les variables internes mais peut être calculé en post-traitement par l'intermédiaire de la commande CALC_CHAMP, options 'EPSP_ELGA' ou 'EPSP_ELNO', (cf. [U4.61.02]).

2 Formulation numérique de la relation de comportement

Afin de pouvoir traiter dans le même cadre la plasticité et la viscoplasticité, on choisit de procéder à une discrétisation implicite des relations de comportement, (cf. [R5-03-02]). Notons en outre qu'une procédure d'intégration explicite est délicate pour deux raisons : d'une part, le traitement de la variable semi-discrète est nécessairement implicite et peut conduire à des oscillations numériques (on pseudo-décharge, donc on résout $F=0$, et du coup, F peut être (très faible mais) supérieur à zéro, d'où charge au pas suivant au lieu de poursuivre la décharge), et d'autre part, l'équation [éq 1.1-2] n'est pas dérivable quand $\boldsymbol{\varepsilon}^p=\boldsymbol{\varepsilon}_n^{p^-}$

2.1 Discrétisation implicite des équations de comportement

Dorénavant, on adopte la convention de notation suivante. Si u désigne une quantité, alors :

u^- quantité u au début du pas de temps
Δu incrément de la quantité u au cours du pas de temps
u quantité u à la fin du pas du temps (pas d'exposant $+$)

Commençons par introduire la contrainte élastique, c'est-à-dire la contrainte en l'absence d'incrément de déformation plastique. On peut d'ailleurs remarquer que seul le terme déviatorique joue un rôle dans la partie non linéaire du comportement :

$$\boldsymbol{\sigma}^e=K\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}\right)\mathbf{Id}+\underbrace{2\mu\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}^{p^-}\right)}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e}\ \text{et}\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e-2\mu\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \qquad \textbf{éq 2.1-2.1-1}$$

En tenant compte des équations d'état [éq 1.1-1] et [éq 1.1-3] et de la loi d'écoulement [éq 1.1-6], on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{s} \overset{def}{=} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e - \mathrm{C}\left(S\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p^-} - \sigma^p\,\boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right) - \frac{3}{2}\left(2\mu + \mathrm{C}S\right)\Delta p\,\mathbf{s}^0 \qquad \textbf{éq 2.1-2.1-2}$$

En notant que $\mathbf{s}^0$ n'est autre que $\mathbf{s}$ normé, on en déduit immédiatement :

$$\left[s_{eq} + \frac{3}{2}\left(2\mu + \mathrm{C}S\right)\Delta p \right]\mathbf{s}^0 = \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e - \mathrm{C}\left(S\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p^-} - \sigma^p\,\boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right)}_{\mathbf{s}^e} \qquad \textbf{éq 2.1-2.1-3}$$

Par conséquent, $\mathbf{s}$ est entièrement déterminé par :

$$\mathbf{s} = s_{eq}\mathbf{s}^0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{s}^0 = \frac{\mathbf{s}^e}{s_{eq}^e} \quad \text{et} \quad s_{eq} = s_{eq}^e - \frac{3}{2}\left(2\mu + \mathrm{C}S\right)\Delta p \qquad \textbf{éq 2.1-2.1-4}$$

Finalement, les fonctions de charge sont :

$$\mathrm{F} = s_{eq} - \mathrm{D}\left[R^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^a A \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{p^-} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \frac{3}{2}\Delta p\,\mathbf{s}^0 \right)_{eq}^a \right] \qquad \textbf{éq 2.1-2.1-5}$$

$$G = \mathrm{C}\left[S\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p^-} - \sigma^p\,\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \frac{3}{2}S\Delta p\,\mathbf{s}^0 \right]_{eq} + \mathrm{D}\left[R^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^a A \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{p^-} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \frac{3}{2}\Delta p\,\mathbf{s}^0 \right)_{eq}^a \right] - \sigma^p \qquad \textbf{éq 2.1-2.1-6}$$

2.2 Prise en compte des termes visqueux

En l'absence de termes visqueux, la relation de cohérence discrétisée est :

$$\begin{aligned} &\text{Régime élastique :} \quad \mathrm{F} \le 0 \text{ et } \Delta p = 0 \\ &\text{Régime plastique :} \quad \mathrm{F} = 0 \text{ et } \Delta p \ge 0 \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.2-2.2-1}$$

En revanche, en présence de viscosité, la condition de cohérence est remplacée par l'équation [éq 1.2-1] qui, discrétisée, s'écrit :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \left(\frac{\langle \mathrm{F} \rangle}{K\,p^{1/M}} \right)^N \Leftrightarrow \langle \mathrm{F} \rangle = K\,p^{1/M}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{N}} \qquad \textbf{éq 2.2-2.2-2}$$

Autrement dit, en posant :

$$\tilde{\mathrm{F}} = \mathrm{F} - K\,p^{1/M}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{N}} \qquad \textbf{éq 2.2-2.2-3}$$

l'incrément de déformation viscoplastique cumulée est déterminé par :

$$\begin{aligned} &\text{Régime élastique :} \quad \tilde{\mathrm{F}} \le 0 \text{ et } \Delta p = 0 \\ &\text{Régime viscoplastique :} \quad \tilde{\mathrm{F}} = 0 \text{ et } \Delta p \ge 0 \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.2-2.2-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Finalement, en adoptant une discrétisation implicite, la seule différence entre les lois de comportement plastique et viscoplastique réside dans la forme de la fonction de charge F : on y observe un terme complémentaire en cas de viscosité. En fait, la plasticité incrémentale apparaît comme le cas limite (sans difficulté numérique associée) de la viscoplasticité incrémentale lorsque la viscosité K tend vers zéro. Notons que cette remarque a déjà été mentionnée par Chaboche et al. [bib1].

2.3 Discrétisation des conditions de cohérence

Avant de discrétiser les conditions de cohérence et décrire les différents régimes de comportement possibles, une remarque s'impose quant au traitement de la variable semi-discrète. Comme ξ n'intervient que pour "piloter" $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$, on peut toujours se ramener au cours d'un pas de temps à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^p = \xi\, \boldsymbol{\varepsilon}_n^{p-} + \left(1-\xi\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{p-} \qquad 0 \le \xi \le 1 \qquad \textbf{éq 2.3-2.3-1}$$

La valeur de ξ est alors fixée par les conditions de cohérence, ce que traduit l'équation d'évolution [éq 1.1-9] sur le plan continu. Un tel paramétrage à chaque pas de temps permet de s'affranchir du stockage de ξ , à condition bien-sûr de conserver les valeurs de $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$.

Après cette remarque préliminaire, on peut s'intéresser aux conditions de cohérence. Pour le critère G qui gouverne l'évolution de la contrainte de pic, la forme discrétisée de la condition de cohérence est :

$$G\left(\Delta p, \Delta\sigma^p, \xi\right) \le 0 \quad \Delta\sigma^p \ge 0 \quad \Delta\sigma^p G\left(\Delta p, \Delta\sigma^p, \xi\right) = 0 \qquad \textbf{éq 2.3-2.3-2}$$

La condition de cohérence portant sur F est plus délicate dans la mesure où elle gouverne l'évolution de la déformation plastique en régime de charge plastique et l'évolution de ξ en régime de décharge. Une fois discrétisée, elle s'écrit :

En régime de charge plastique $\left(\xi = 1\right)$:

$$F\left(\Delta p, \Delta\sigma^p, \xi = 1\right) = 0 \qquad \Delta p \ge 0 \qquad \Delta p F\left(\Delta p, \Delta\sigma^p, \xi = 1\right) = 0 \qquad \textbf{éq 2.3-2.3-3}$$

En régime de décharge $\left(\Delta p = 0\right)$:

$$F\left(\Delta p = 0, \Delta\sigma^p, \xi\right) = 0 \qquad 0 \le \xi \le 1\text{x} \qquad \xi F\left(\Delta p = 0, \Delta\sigma^p, \xi\right) = 0 \qquad \textbf{éq 2.3-2.3-4}$$

Pour pouvoir sélectionner le régime de comportement du matériau, et donc les équations à résoudre, la première question est :

Sommes-nous en situation plastique ou bien élastique ?

En fait, il existe une solution en régime élastique (pseudo-décharge $\xi > 0$ ou élasticité classique $\xi = 0$) si on peut trouver un incrément de contrainte de pic tel que :

Condition incrémentale de décharge (équation scalaire en $\Delta\sigma^p$) :

$$\begin{aligned} &F\left(\Delta p = 0, \Delta\sigma^p, \xi = 1\right) \le 0 \\ &G\left(\Delta p = 0, \Delta\sigma^p, \xi = 1\right) \le 0 \qquad \Delta\sigma^p \ge 0 \qquad \Delta\sigma^p G\left(\Delta p = 0, \Delta\sigma^p, \xi = 1\right) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.3-2.3-5}$$

En cas de charge plastique, c'est-à-dire quand il n'existe pas $\Delta\sigma^p$ satisfaisant [éq 2.3-5], on a alors à résoudre le système non linéaire en Δp et $\Delta\sigma^p$ suivant :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Régime plastique (système non linéaire en Δp et $\Delta\sigma^p$) :

$$\begin{aligned} &F\left(\Delta p,\Delta\sigma^p,\xi=1\right)=0 \quad \Delta p\geq 0 \\ &G\left(\Delta p,\Delta\sigma^p,\xi=1\right)\leq 0 \quad \Delta\sigma^p\geq 0 \quad \Delta\sigma^p G\left(\Delta p,\Delta\sigma^p,\xi=1\right)=0 \end{aligned}$$ **éq 2.3-2.3-6**

En revanche, en situation élastique, deux choix sont encore possibles : pseudo-décharge $\left(\xi>0\right)$ ou élasticité classique $\left(\xi=0\right)$. Le second cas étant plus favorable, on commence par examiner s'il n'est pas réalisable, c'est-à-dire s'il existe un incrément de contrainte de pic tel que :

Condition incrémentale de régime élastique classique (équation scalaire en $\Delta\sigma^p$) :

$$\begin{aligned} &F\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^p,\xi=0\right)\leq 0 \\ &G\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^p,\xi=0\right)\leq 0 \quad \Delta\sigma^p\geq 0 \quad \Delta\sigma^p G\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^p,\xi=0\right)=0 \end{aligned}$$ **éq 2.3-2.3-7**

Enfin, s'il devait s'agir d'une décharge pseudo-élastique, il reste à résoudre le système non linéaire en ξ et $\Delta\sigma^p$ suivant :

Décharge pseudo-élastique (système non linéaire en ξ et $\Delta\sigma^p$) :

$$\begin{aligned} &F\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^p,\xi\right)=0 \quad 0\leq\xi\leq 1 \\ &G\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^p,\xi\right)\leq 0 \quad \Delta\sigma^p\geq 0 \quad \Delta\sigma^p G\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^p,\xi\right)=0 \end{aligned}$$ **éq 2.3-2.3-8**

Notons dès à présent que les systèmes non linéaires [éq 2.3-6] et [éq 2.3-8] peuvent se réduire à la résolution d'une simple équation scalaire si $\Delta\sigma^p=0$ permet d'obtenir une solution.

On peut résumer l'algorithme de choix des équations à résoudre par l'arbre de décision ci-dessous.

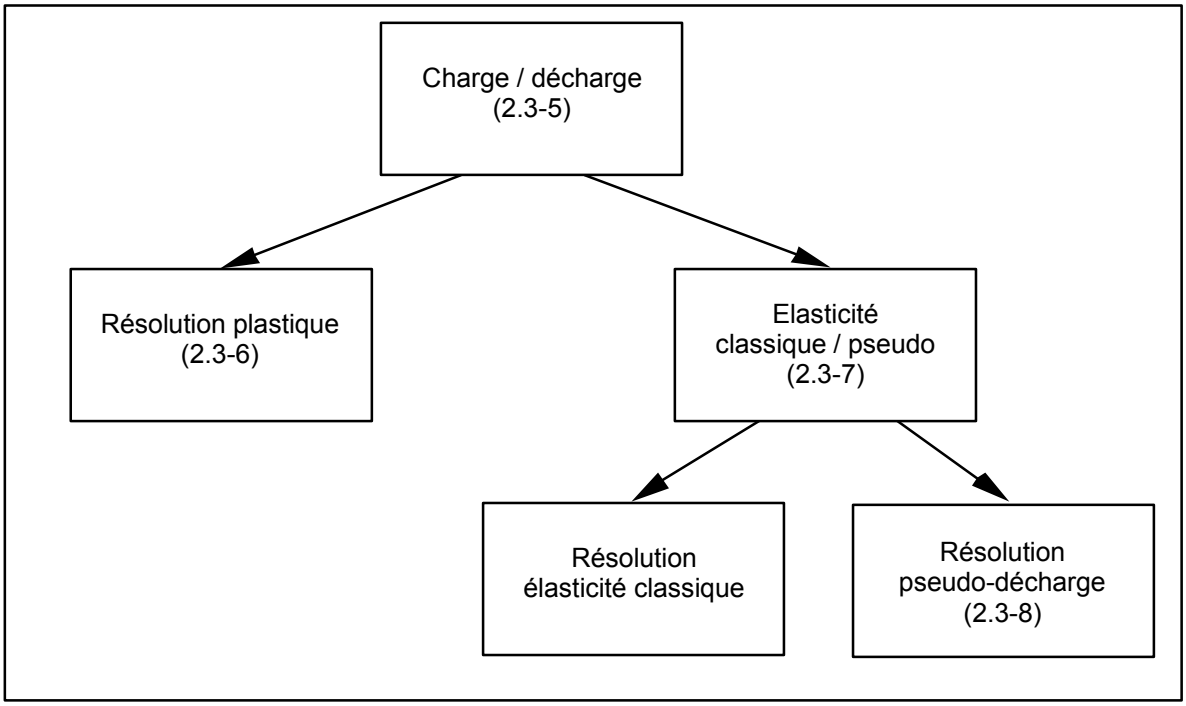


Figure 2.3-2.3-a : Arbre de décision pour choisir le régime de comportement

2.4 Encadrement des solutions

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A la lecture du paragraphe précédent, on a pu constater la nécessité de résoudre (numériquement) un certain nombre d'équations scalaires ou de systèmes non linéaires. Pour cela, il est toujours intéressant de disposer d'un intervalle sur lequel chercher la solution. D'une part, un encadrement de la solution démontre son existence (ce qui renforce fortement les chances de succès d'un algorithme de résolution !), et d'autre part, il permet un traitement numérique approprié, donc plus sûr.

Concernant $\Delta\sigma^p$, un minorant est bien entendu 0. Par ailleurs, la contrainte de rochet S représente une limite au-delà de laquelle le modèle n'a plus de sens. En fait, à l'examen des constantes matériaux obtenues par identification, cf. Taheri et al. [bib6], G devient effectivement négatif quand $\sigma^p = S$ si l'écart entre la déformation plastique et la déformation plastique à la dernière décharge n'est pas trop important (quelques %) :

$$\frac{G(\Delta p, \sigma^p = S, \xi)}{S} = \underbrace{(C_\infty + C_1)}_{\approx 13}\underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)_{eq}}_{\leq 3\,\%} + \underbrace{(1-m)}_{\approx 0,75}\left(\underbrace{\frac{R^0}{S}}_{\approx 20\,\%} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^a}_{\approx 0,5}\frac{A}{S}\underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)_{eq}^a}_{\approx 0,7}\right) - 1 \leq 0 \qquad \textbf{éq 2.4-2.4-1}$$

On peut également chercher un majorant pour Δp. En examinant l'expression de F :

$$\begin{aligned} F(\Delta p, \Delta\sigma^p, \xi) &\leq s_{eq} - D R^0 \\ &\leq s_{eq}^e - \frac{3}{2}(2\mu + C S)\Delta p - D R^0 \\ &\leq s_{\max}^e - \frac{3}{2}(2\mu + C_\infty S)\Delta p - D(p^-) R^0 \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.4-2.4-2}$$

On en déduit un majorant pour Δp, tel que $F(\Delta p, \Delta\sigma^p, \xi) \leq 0$:

$$\Delta p \leq \frac{s_{\max}^e(\sigma^p) - D(p^-, \sigma^p) R^0}{\frac{3}{2}(2\mu + C_\infty S)} \qquad \textbf{éq 2.4-2.4-3}$$

$$s_{\max}^e(\sigma^p) = \max\left\{\begin{array}{l} \left[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e - C(p^-, \sigma^p)(S\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p-} - \sigma^p \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)\right]_{eq} \\ \left[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e - C_\infty(S\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p-} - \sigma^p \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)\right]_{eq} \end{array}\right. \qquad \textbf{éq 2.4-2.4-4}$$

En particulier, on peut donner un majorant (grossier) de Δp indépendant de $\Delta\sigma^p$:

$$\Delta p_{max} = \frac{s_{max}^{e\,max} - (1-m) R^0}{\frac{3}{2}(2\mu + C_\infty S)} \qquad \textbf{éq 2.4-2.4-5}$$

$$s_{max}^{e\,max} = \sigma_{eq}^e + (C_1 + C_\infty)\max\left\{\begin{array}{l} \left[S\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p-} - \sigma^{p-}\boldsymbol{\varepsilon}_n^p\right]_{eq} \\ \left[S\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p-} - S\,\boldsymbol{\varepsilon}_n^p\right]_{eq} \end{array}\right. \qquad \textbf{éq 2.4-2.4-6}$$

On peut alors remarquer que les systèmes [éq 2.3-6] et [éq 2.3-8] admettent toujours une solution. En effet, si pour chaque système, on écrit respectivement $\Delta\sigma^p(\Delta p)$ et $\Delta\sigma^p(\xi)$ les solutions de $G = 0$, alors on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Système non linéaire de charge plastique :

$$F\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^{p}\left(\Delta p=0\right),\xi=1\right)\geq 0 \text{ et } F\left(\Delta p_{\max},\Delta\sigma^{p}\left(\Delta p_{\max}\right),\xi=1\right)\leq 0 \quad \textbf{éq 2.4-2.4-7}$$

- Système non linéaire de pseudo-décharge :

$$F\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^{p}\left(\xi=1\right),\xi=1\right)\leq 0 \text{ et } F\left(\Delta p=0,\Delta\sigma^{p}\left(\xi=0\right),\xi=0\right)\geq 0 \quad \textbf{éq 2.4-2.4-8}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Méthodes de résolution numérique

La résolution des équations incrémentales nous confronte soit à une équation scalaire non linéaire, soit à un système non linéaire à deux inconnues. On expose ci-dessous les méthodes numériques employées. On examine également le calcul de la matrice tangente, éventuellement utilisée par l'algorithme global de STAT_NON_LINE, (cf. [R5.03.01]).

3.1 Équation scalaire : méthode de sécantes

Il s'agit de résoudre une équation scalaire non linéaire en cherchant la solution dans un intervalle de confiance. Pour cela, on se propose de coupler une méthode de sécante avec un contrôle de l'intervalle de recherche. Soit l'équation suivante à résoudre :

$$\mathrm{f}(x)=0 \quad x\in[a,b] \quad \mathrm{f}(a)<0 \quad \mathrm{f}(b)>0 \qquad \textbf{éq 3.1-3.1-1}$$

La méthode de la sécante consiste à construire une suite de points x^n qui converge vers la solution. Elle est définie par récurrence (approximation linéaire de la fonction par sa corde) :

$$x^{n+1}=x^{n-1}-\mathrm{f}\left(x^{n-1}\right)\frac{x^n-x^{n-1}}{\mathrm{f}\left(x^n\right)-\mathrm{f}\left(x^{n-1}\right)} \qquad \textbf{éq 3.1-3.1-2}$$

Par ailleurs, si x^{n+1} devait sortir de l'intervalle, alors on le remplace par la borne de l'intervalle en question :

$$\begin{cases}\text{si } x^{n+1}<a \text{ alors } x^{n+1}:=a\\ \text{si } x^{n+1}>b \text{ alors } x^{n+1}:=b\end{cases} \qquad \textbf{éq 3.1-3.1-3}$$

En revanche, si x^{n+1} est dans l'intervalle courant, alors on réactualise l'intervalle :

$$\begin{cases}\text{si } x^{n+1}\in[a,b] \text{ et } \mathrm{f}\left(x^{n+1}\right)<0 \text{ alors } a:=x^{n+1}\\ \text{si } x^{n+1}\in[a,b] \text{ et } \mathrm{f}\left(x^{n+1}\right)>0 \text{ alors } b:=x^{n+1}\end{cases} \qquad \textbf{éq 3.1-3.1-4}$$

On considère avoir convergé lorsque f est suffisamment proche de 0 (tolérance à renseigner). Quant aux deux premiers points de la suite, on peut choisir les bornes de l'intervalle, ou bien, si on dispose d'une estimation de la solution, on peut adopter cette estimation et l'une des bornes de l'intervalle.

3.2 Systèmes non linéaires : méthode de Newton et recherche linéaire

On présente ici une méthode de Newton à laquelle on a associé une technique de recherche linéaire et un contrôle de la direction de descente pour ne pas quitter le domaine de recherche (bornes sur les inconnues).

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases}\mathrm{F}(x,y)=0\\ \mathrm{G}(x,y)=0\end{cases} \text{ avec } \begin{cases}x_{\min}\le x\le x_{\max}\\ y_{\min}\le y\le y_{\max}\end{cases} \qquad \textbf{éq 3.2-3.2-1}$$

Si (x,y) est un point du domaine de recherche, alors on construit une suite de points $\left(x^n,y^n\right)$ qui converge vers une solution (ou du moins, on l'espère) par le procédé suivant.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Détermination de la direction de descente

  Une direction de descente $(\delta x, \delta y)$ est donnée par la résolution du système linéaire 2 x 2 :

$$\begin{bmatrix} F^n_{,x} & F^n_{,y} \\ G^n_{,x} & G^n_{,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F^n \\ G^n \end{bmatrix} \qquad \text{éq 3.2-3.2-2}$$

- Correction de la direction de descente

  On corrige la direction de descente $(\delta x, \delta y)$ de telle sorte que les points envisagés soient dans le domaine de recherche (avec ρ_{max} la longueur maximale qu'on s'autorise à décrire le long de la direction de descente) :

$$\begin{cases} \text{si } x+\rho_{\max}\delta x < x_{\min} \quad \delta x := \dfrac{x_{\min}-x}{\rho_{\max}} \quad \text{si } x+\rho_{\max}\delta x > x_{\max} \quad \delta x := \dfrac{x_{\max}-x}{\rho_{\max}} \\ \text{si } y+\rho_{\max}\delta y < y_{\min} \quad \delta y := \dfrac{y_{\min}-y}{\rho_{\max}} \quad \text{si } y+\rho_{\max}\delta y > y_{\max} \quad \delta y := \dfrac{y_{\max}-y}{\rho_{\max}} \end{cases} \qquad \text{éq 3.2-3.2-3}$$

- Recherche linéaire

  Il ne reste plus qu'à minimiser la quantité $E=(F^2+G^2)/2$ dans la direction de descente. Notons que la norme E que l'on minimise ainsi est une mesure de l'erreur commise dans la résolution du système : elle est nulle quand (x, y) est solution du système [éq 3.2-1]. Pour minimiser E, on va simplement chercher à annuler sa dérivée, c'est-à-dire résoudre l'équation scalaire :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \rho}\left[E(x+\rho\delta x, y+\rho\delta y)\right]}_{(FF_{,x}+GG_{,x})\delta x+(FF_{,y}+GG_{,y})\delta y} = 0 \quad \text{et} \quad 0 \le \rho \le \rho_{\max} \qquad \text{éq 3.2-3.2-4}$$

- Critère de convergence

  On considère avoir convergé lorsque l'erreur E est inférieure à une grandeur prescrite. Par ailleurs, si la norme de la direction de descente devient trop faible (autre grandeur à renseigner), on peut penser que l'algorithme ne parvient pas à converger.

3.3 Critères d'arrêt

Jusqu'à présent, les valeurs d'arrêt et les nombres d'itérations maximaux des méthodes de résolution précédentes n'ont pas été précisés. Il faut distinguer deux cas.

- Lorsqu'on cherche à vérifier les conditions de cohérence (équation scalaire ou système non linéaire suivant la situation), on attend des résultats précis, dont la tolérance relative η est fixée par l'utilisateur dans la commande STAT_NON_LINE sous le mot-clé RESI_INTE_RELA, (cf. [U4.32.01]). Selon que l'on cherche à résoudre $F=0, G=0$ ou simultanément $F=G=0$, le critère d'arrêt s'exprime respectivement :

$$\left|\frac{F}{R^0}\right| \le \eta \quad \text{ou} \quad \left|\frac{G}{R^0}\right| \le \eta \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R^0}\sqrt{\frac{F^2+G^2}{2}} \le \eta$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

R^0 limite d'élasticité initiale, fournie par l'utilisateur, cf. [§ 1.1].

Par ailleurs, l'utilisateur spécifie un nombre d'itérations maximal toujours dans la commande STAT_NON_LINE sous le mot-clé ITER_INTE_MAXI, (cf. [U4.32.01]).

- Lorsqu'on effectue des itérations de recherche linéaire, on cherche à obtenir une convergence plus rapide (ou au moins plus sure). Il ne faut pas pour autant y consacrer un temps excessif. C'est pourquoi on a fixé une fois pour toute un nombre d'itérations maximal égal à 3, une borne maximale ρ_{max} égale à 2 et un critère d'arrêt relatif de 1 % :

$$\left.\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\mathrm{E}\left(x+\rho\,\delta x,\, y+\rho\,\delta y\right)\right]\right|_{\rho} \leq 10^{-2}\left.\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\mathrm{E}\left(x+\rho\,\delta x,\, y+\rho\,\delta y\right)\right]\right|_{\rho=0}$$

3.4 Matrice tangente

Dans l'optique d'une résolution des équations d'équilibre (globales) par une méthode de Newton, il est indispensable de déterminer la matrice consistante du comportement tangent, (cf. Simo et al. [bib4]). Cette matrice se compose classiquement d'une contribution élastique et d'une contribution plastique :

$$\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}^e}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}-2\mu\frac{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \textbf{éq 3.4-3.4-1}$$

On en déduit immédiatement qu'en régime élastique (classique ou pseudo-décharge), la matrice tangente se réduit à la matrice élastique :

Régime élastique :

$$\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}^e}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \textbf{éq 3.4-3.4-2}$$

En revanche, en régime plastique, la variation de la déformation plastique n'est plus nulle. Les règles de dérivation composée permettent d'obtenir :

$$\frac{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e}=\frac{3}{2}\left[\mathbf{s}^0\otimes\frac{\delta p}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e}+\Delta p\frac{\delta \mathbf{s}^0}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e}\right]=\frac{3}{2}\left[\mathbf{s}^0\otimes\frac{\delta p}{\delta \boldsymbol{\sigma}^e}+\frac{\Delta p}{s^e_{eq}}\left(\mathbf{Id}-\frac{3}{2}\mathbf{s}^0\otimes\mathbf{s}^0\right)\right] \qquad \textbf{éq 3.4-3.4-3}$$

⊗ produit tensoriel

On peut noter qu'on a préféré dériver par rapport à $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}$, sachant qu'on a :

$$\frac{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\delta \boldsymbol{\sigma}^e}.\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}^e}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}=2\mu\frac{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e}.\mathbf{P} \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}:\begin{cases} S\to S \\ \boldsymbol{\varepsilon}\to\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \qquad \textbf{éq 3.4-3.4-4}$$

S espace des tenseurs symétriques
$\mathbf{P}$ projecteur sur les déviateurs

Finalement, il ne reste plus qu'à calculer la variation de p. Pour cela, il faut distinguer s'il s'agit d'un régime de plasticité classique $\left(\Delta\sigma^p=0\right)$ ou de plasticité à deux surfaces. Ainsi :

Plasticité classique : $\mathrm{F}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e\right)=0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F_{,p}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right)\delta p=-F_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right)\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\quad\Rightarrow\quad\frac{\delta p}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}=-\frac{F_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right)}{F_{,p}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right)}$$ **éq 3.4-3.4-5**

Plasticité à deux surfaces : $F\left(p,\sigma^{p},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right)=0$ et $G\left(p,\sigma^{p},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right)=0$

$$\begin{bmatrix}F_{,p} & F_{,\sigma^{p}}\\ G_{,p} & G_{,\sigma^{p}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta p\\ \delta\sigma^{p}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}\\ G_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}\end{bmatrix}.\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\quad\Rightarrow\quad\frac{\delta p}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}=\frac{\begin{vmatrix}F_{,\sigma^{p}} & F_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}\\ G_{,\sigma^{p}} & G_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_{,p} & F_{,\sigma^{p}}\\ G_{,p} & G_{,\sigma^{p}}\end{vmatrix}}$$ **éq 3.4-3.4-6**

Un examen attentif des expressions [éq 2.1-5] et [éq 2.1-6] permet de constater que les variations de F et G par rapport à $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}$ ne sont pas nécessairement colinéaires à $\mathbf{s}^{0}$. En tenant compte de [éq 3.4-3], on en déduit alors que la matrice tangente n'est en général pas symétrique en régime plastique. Plutôt que d'imposer l'emploi d'un solveur non symétrique, beaucoup plus coûteux en temps calcul, on préfère symétriser cette matrice.

3.5 Contraintes planes

Le traitement des contraintes planes rajoute une équation non linéaire à résoudre, couplée aux systèmes [éq 2.3-6] et [éq 2.3-8], (cf. [R5-03-02]). Devant cette difficulté non négligeable et l'absence de besoin manifesté, on a préféré ne pas offrir la possibilité de forcer un état de contraintes planes au niveau de la loi de comportement. Autrement dit, la modélisation `C_PLAN` n'est pas disponible pour la loi de comportement `VISC_TAHERI`.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Bibliographie

1) J.L. Chaboche, G. Cailletaud, 1996. Integration methods for complex plastic constitutive equations. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., n° 133,pp. 125-155

2) Ph. Geyer, 1992. Étude du modèle de comportement élasto-plastique pour le chargement cyclique développe à EDF/DER/MMN. Note interne EDF/DER, HT-26/92/39/A.

3) J. Lemaitre, J.L. Chaboche, 1988. Mécanique des matériaux solides. Dunod.

4) J.C. Simo, R.L. Taylor, 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., n° 48, pp. 101-118.

5) S. Taheri, 1990. Une loi de comportement uniaxiale en élastoplasticité pour le chargement cyclique. Note interne EDF/DER, HI-71/6812.

6) S. Taheri, Ph. Geyer, J.M. Proix, 1995. Three dimensional elastic-plastic constitutive law for the description of ratchetting of 316 stainless steel. Note interne EDF/DER, HI-74/95/012/0.

5 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
4	E.Lorentz EDF-R&D/AMA	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)