Intégration des relations de comportement élasto-plastique de Von Mises

Résumé :

Ce document décrit les quantités calculées par l'opérateur STAT_NON_LINE nécessaires à la mise en œuvre de l'algorithme non linéaire quasi statique décrit en [R5.03.01] dans le cas des comportements élasto-plastiques. Ces quantités sont calculées par les mêmes sous-programmes dans l'opérateur DYNA_NON_LINE dans le cas d'une sollicitation dynamique [R5.05.05].

Cette description est présentée suivant les différents mots clés qui permettent à l'utilisateur de choisir la relation de comportement souhaitée. Les relations de comportement traitées ici sont :

- le comportement de Von Mises à écrouissage isotrope (linéaire ou non linéaire)
- le comportement de Von Mises à écrouissage cinématique linéaire (modèle de Prager)

La méthode d'intégration utilisée se base sur une formulation implicite directe. A partir de l'état initial, ou à partir de l'instant de calcul précédent, on calcule le champ de contraintes résultant d'un incrément de déformation. On calcule également l'opérateur tangent.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
1.1 Relations de comportements décrites dans ce document....3
1.2 But de l'intégration....3
2 Notations générales et hypothèses sur les déformations....4
2.1 Partition des déformations (petites déformations)....5
2.2 Réactualisation....6
2.3 Conditions initiales....6
3 Relation de Von Mises à écrouissage isotrope....6
3.1 Expression des relations de comportement....6
3.1.1 Relation VMIS_ISOT_LINE....7
3.1.2 Relation VMIS_ISOT_TRAC....8
3.1.3 Relation VMIS_ISOT_PUIS....10
3.1.4 Relation VMIS_JOHN_COOK....11
3.2 Opérateur tangent. Option RIGI_MECA_TANG....11
3.3 Calcul des contraintes et des variables internes....13
3.4 Opérateur tangent. Option FULL_MECA....15
3.5 Variables internes des comportements VMIS_ISOT_LINE, VMIS_ISOT_PUIS, VMIS_ISOT_TRAC et VMIS_JOHN_COOK....17
4 Relation de Von Mises à écrouissage cinématique linéaire....18
4.1 Expression de la relation de comportement, cas général....18
4.2 Expression de la relation de comportement en 1D....19
4.3 Opérateur tangent. Option RIGI_MECA_TANG....20
4.4 Calcul des contraintes et variables internes....21
4.5 Opérateur tangent. Option FULL_MECA....23
4.6 Variables internes du modèle VMIS_CINE_LINE....23
5 Bibliographie....24
Annexe 1 Relation VMIS_ISOT_TRAC : compléments sur l'intégration....25
Annexe 2 Écrouissage isotrope en contraintes planes....26

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

1.1 Relations de comportements décrites dans ce document

Dans l'opérateur STAT_NON_LINE [U4.51.03] (ou DYNA_NON_LINE [U4.53.01]), deux types de comportements peuvent être traités :

- le comportement incrémental : mot clé facteur COMPORTEMENT,
- le comportement en élasticité non linéaire : mot clé facteur COMPORTEMENT.

Pour chaque comportement on peut choisir :

- la relation de comportement : mot clé RELATION,
- le mode de calcul des déformations : mot clé DEFORMATION.

Pour plus de détails, consulter le document [U4.51.03] du manuel utilisateur, les comportements décrits ici ne relevant que du mot clé facteur COMPORTEMENT.

Les relations traitées dans ce document sont :

VMIS_ISOT_LINE :	Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire,
VMIS_ISOT_TRAC :	Von Mises avec écrouissage isotrope donné par une courbe de traction,
VMIS_ISOT_PUIS :	Von Mises avec écrouissage isotrope donné par une courbe analytique,
VMIS_JOHN_COOK :	Von Mises avec écrouissage isotrope de Johnson-Cook,
VMIS_CINE_LINE :	Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire.

1.2 But de l'intégration

Pour résoudre le problème global non linéaire posé sur la structure, le document [R5.03.01] décrit l'algorithme utilisé dans *Code_Aster* pour la statique non linéaire (opérateur STAT_NON_LINE) et le document [R5.05.05] décrit la méthode utilisée pour la dynamique non linéaire (opérateur DYNA_NON_LINE).

Ces deux algorithmes s'appuient sur le calcul de quantités locales (en chaque point d'intégration de chaque élément fini) qui résultent de l'intégration des relations de comportement.

A chaque itération n de la méthode de Newton [R5.03.01 § 2.2.2.2] on doit calculer les forces nodales $\mathbf{R}(\mathbf{u}_i^n)=\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\sigma}_i^n$ (options RAPH_MECA et FULL_MECA) les contraintes σ_i^n étant calculées en chaque point d'intégration de chaque élément à partir des déplacements u_i^n par l'intermédiaire de la relation de comportement. On doit construire aussi l'opérateur tangent pour calculer $\mathbf{K}_i^n$ (option FULL_MECA).

Avant la première itération, pour la phase de prédiction, on calcule $\mathbf{K}_{i-1}$ (option RIGI_MECA_TANG). Le calcul de $\mathbf{K}_{i-1}$, qui est nécessaire à la phase d'initialisation [R5.03.01 §2.2.2.2] correspond au calcul de l'opérateur tangent déduit du problème en vitesse.

Cet opérateur n'est pas identique à celui qui est utilisé pour calculer $\mathbf{K}_i^n$ par l'option FULL_MECA, au cours des itérations de Newton. En effet, ce dernier opérateur est tangent au problème discrétisé de façon implicite.

On décrit ici pour les relations de comportement VMIS_ISOT_LINE, VMIS_ISOT_TRAC, VMIS_ISOT_PUIS, VMIS_JOHN_COOK et VMIS_CINE_LINE, le calcul de la matrice tangente de la phase de prédiction, $\mathbf{K}_{i-1}$, puis le calcul du champ de contraintes à partir d'un incrément de déformation, le calcul des forces **nodales** R et de la matrice tangente $\mathbf{K}_i^n$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Notations générales et hypothèses sur les déformations

Toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $^-$.

Les quantités évaluées à l'instant $t+\Delta t$ ne sont pas indicées.

Les incréments sont désignés par Δ. On a ainsi :

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(t+\Delta t)=\mathbf{Q}(t)+\Delta\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^-+\Delta\mathbf{Q}.$$

Pour le calcul des dérivées , on notera : $\dot{\mathbf{Q}}$ dérivée de $\mathbf{Q}$ par rapport au temps

$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes.
$\tilde{}$	opérateur déviatoire : $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}=\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_{kk}\boldsymbol{\delta}_{ij}$.
$()_{eq}$	valeur équivalente de Von Mises : $\boldsymbol{\sigma}_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}}$
$\Delta\varepsilon$	incrément de déformation.
$\mathbf{A}$	tenseur d'élasticité.
λ, μ, E, ν, K	coefficients de l'élasticité isotrope, respectivement : coefficients de Lamé, module d'Young, coefficient de Poisson et module de compressibilité.
$3K=3\lambda+2\mu$	module de compressibilité
α	coefficient de dilatation thermique moyen.
t	temps.
T	température.
$()_+$	partie positive.

Pour calculer les opérateurs tangents, on adoptera la convention d'écriture des tenseurs symétriques d'ordre 2 sous forme de vecteurs à 6 composantes. Ainsi, pour un tenseur a :

$$\vec{a}={}^t\left[a_{xx}\quad a_{yy}\quad a_{zz}\ \sqrt{2}\,a_{xy}\quad \sqrt{2}\,a_{xz}\quad \sqrt{2}\,a_{yz}\right]$$

On introduit le vecteur hydrostatique $\vec{\mathbf{1}}$ et la matrice de projection déviatorique $\mathbf{P}$:

$$\vec{\mathbf{1}}={}^t\left[1\quad 1\quad 1\ 0\quad 0\quad 0\right]$$
$$\mathbf{P}=\mathbf{Id}-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{1}}\otimes\vec{\mathbf{1}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1 Partition des déformations (petites déformations)

On écrit pour tout instant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}^{e}(t)+\boldsymbol{\varepsilon}^{th}(t)+\boldsymbol{\varepsilon}^{p}(t)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e}(t)=\mathbf{A}^{-1}(T(t))\boldsymbol{\sigma}(t)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th}(t)=\alpha(T(t))\left(T(t)-T_{ref}\right)\mathbf{Id}$$

ou de façon plus générale :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{th}(T) &= \alpha(T)\left(T-T_{def}\right)-\alpha\left(T_{ref}\right)\left(T_{ref}-T_{def}\right)\\ &= \hat{\alpha}(T)\left(T-T_{ref}\right)\\ \text{et}\quad \varepsilon^{th}\left(T_{ref}\right) &= 0\end{aligned}$$

A dépend de l'instant t par l'intermédiaire de la température. Le coefficient de dilatation thermique $\alpha(T(t))$ est un coefficient de dilatation moyen qui peut dépendre de la température T. La température T_{ref} est la température de référence, c'est-à-dire celle pour laquelle la dilatation thermique est supposée nulle si le coefficient de dilatation moyen n'est pas connu par rapport à T_{ref}, on peut utiliser une température de définition du coefficient de dilatation moyen T_{def} (définie par le mot-clé TEMP_DEF_ALPHA de DEFI_MATERIAU) différente de la température de référence [R4.08.01].

Ce qui conduit à : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)=\overbrace{\mathbf{A}^{-1}(T(t))\boldsymbol{\sigma}(t)}^{\cdot}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}(t)+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}(t)$

Ce choix est fait par souci de cohérence avec l'élasticité : il faut pouvoir trouver la même solution en élasticité (opérateur MECA_STATIQUE) et en élastoplasticité (opérateur STAT_NON_LINE) lorsque les caractéristiques du matériau restent élastiques. Ce choix mène à la discrétisation :

$$\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon^{p}+\Delta(A^{-1}\sigma)+\Delta\varepsilon^{th}$$

avec :

$$\Delta\left(\mathbf{A^{-1}}\boldsymbol{\sigma}\right)=\mathbf{A}^{-1}(t^{-}+\Delta t)\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)-\mathbf{A}^{-1}(t^{-})\boldsymbol{\sigma}^{-}$$

et

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}=\left(\alpha(t^{-}+\Delta t)(T-T_{ref})-\alpha(t^{-})(T^{-}-T_{ref})\right)\mathbf{Id}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Réactualisation

Dans STAT_NON_LINE, sous le mot clé facteur COMPORTEMENT, plusieurs modes de calcul des déformations sont possibles :

- 'PETIT'
- 'SIMO_MIEHE' [R5.03.21] (qui effectue le calcul en grandes déformations pour un écrouissage isotrope)
- 'GDEF_HYPO_ELAS' [R5.03.24] qui effectue le calcul en grandes déformations, mais avec une formulation hypo-élastique, et qui est utilisable pour un écrouissage quelconque)
- 'GROT_GDEP' [R5.03.22] (qui effectue le calcul en grands déplacements et grandes rotations, mais en petites déformations)
- 'PETIT_REAC' (qui est un substitut au calcul en grandes déformations, valable pour de petits incréments de charge, et pour de petites rotations [bib2]).

Cette dernière possibilité consiste à réactualiser la géométrie avant de calculer $\Delta\varepsilon$:
On écrit $x=x_0+u_{i-1}+\Delta u_i^n$, le calcul des gradients de Δu_i^n est donc fait avec la géométrie x au lieu de la géométrie initiale x_0 .

2.3 Conditions initiales

Elles sont prises en compte par l'intermédiaire de $\boldsymbol{\sigma}^-$, p^- , $\mathbf{u}^-$.

En cas de poursuite ou reprise d'un calcul précédent, on a directement l'état initial $\boldsymbol{\sigma}^-$, p^- , $\mathbf{u}^-$ en partant de $\boldsymbol{\sigma}$, p , $\mathbf{u}$ du calcul précédent à l'instant spécifié.

3 Relation de Von Mises à écrouissage isotrope

3.1 Expression des relations de comportement

Ces relations sont obtenues par les mots clés VMIS_ISOT_LINE, VMIS_ISOT_TRAC et VMIS_ISOT_PUIS.

On décrit ici ces relations en petites déformation (DEFORMATION='PETIT') :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dfrac{3}{2}\dot{p}.\dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\widetilde{A^{-1}}}\boldsymbol{\sigma}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \\ \sigma_{eq}-R(p)\leq 0 \\ \begin{cases} \dot{p}=0 \text{ si } \sigma_{eq}-R(p)<0 \\ \dot{p}\geq 0 \text{ si } \sigma_{eq}-R(p)=0 \end{cases} \end{cases}$$

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$: vitesse de déformation plastique,
p : déformation plastique cumulée,
$\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$: déformation d'origine thermique : $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}=\alpha(T-T_{ref})\,\mathbf{Id}$

La fonction d'écrouissage $R(p)$ est déduite d'un essai de traction simple monotone et isotherme

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'utilisateur peut choisir un écrouissage linéaire (relation VMIS_ISOT_LINE) ou une courbe de traction donnée soit points par points (relation VMIS_ISOT_TRAC), soit par une expression analytique (relation
VMIS_ISOT_PUIS).

La loi de comportement VMIS_JOHN_COOK diffère des précédentes dans le sens où la fonction d'écrouissage dépend de la vitesse de la déformation plastique cumulée et de la température.

On décrit ici ces relations en petites déformation (DEFORMATION='PETIT') :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\dot{p}.\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\overbrace{A^{-1}}}\boldsymbol{\sigma} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \\ \sigma_{eq} - R(p,\dot{p},T) \leq 0 \\ \begin{cases} \dot{p}=0 \text{ si } \sigma_{eq} - R(p,\dot{p},T) < 0 \\ \dot{p} \geq 0 \text{ si } \sigma_{eq} - R(p,\dot{p},T) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$: vitesse de déformation plastique,
p : déformation plastique cumulée,
$\dot{p}$: vitesse de déformation plastique cumulée,
$\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$: déformation d'origine thermique : $\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_{ref})\,\mathbf{Id}$

La fonction d'écrouissage $R(p,\dot{p},T)$ est déduite d'une série d'essais de traction simple monotone à différente vitesse de déformation et à différente température.

3.1.1 Relation VMIS_ISOT_LINE

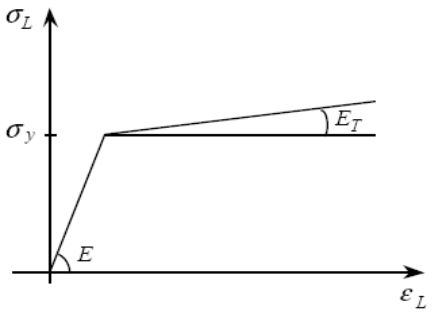
Les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_LINE ou ECRO_LINE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

/ ECRO_LINE =_F (D_SIGM_EPSI = E_T , SY = σ_y)
/ ECRO_LINE_FO =_F (D_SIGM_EPSI = E_T , SY = σ_y)

ECRO_LINE_FO correspond au cas où E_T et σ_y dépendent de la température et sont alors calculés pour la température du point de Gauss courant.

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

Dans ce cas la courbe de traction est la suivante :



C'est-à-dire :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \sigma_L = E\,\varepsilon_L & \text{si } \varepsilon_L \le \dfrac{\sigma_y}{E} \\ \sigma_L = \sigma_y + E_T(\varepsilon_L - \dfrac{\sigma_y}{E}) & \text{si } \varepsilon_L \ge \dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$

Remarque :

σ_y est la limite d'élasticité (le choix de σ_y incombe à l'utilisateur : elle peut correspondre à la fin de linéarité de la courbe de traction réelle, ou bien à une limite d'élasticité réglementaire ou conventionnelle. Quoi qu'il en soit, on utilise ici l'unique valeur définie sous `ECRO_LINE` *).*

Lorsque le critère est atteint on a : $\sigma_{eq} - R(p) = 0$. Pour identifier $R(p)$, on utilise les propriétés de l'état de contrainte uniaxial :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{matrix} \sigma_{eq} = \sigma_L \\ p = \varepsilon_L^P = \varepsilon_L - \dfrac{\sigma_L}{E} \end{matrix} \quad \text{et le critère s'écrit : } \sigma_L - R(p) = 0$$

$$\sigma_L - \sigma_y = E_T(\varepsilon_L - \frac{\sigma_y}{E}) = E_T(\frac{\sigma_L}{E} + p - \frac{\sigma_y}{E})$$

donc

$$(\sigma_L - \sigma_y)\left(1 - \frac{E_T}{E}\right) = E_T\, p \text{ soit } (\sigma_L - \sigma_y) = \frac{E_T . E}{(E - E_T)}\, p$$

d'où la fonction d'écrouissage linéaire : $R(p) = \dfrac{E_T E}{E - E_T}\, p + \sigma_y$

3.1.2 Relation VMIS_ISOT_TRAC

Les données du matériau sont celles fournies sous le mot clé facteur `TRACTION =_F (SIGM = f)`, de l'opérateur `DEFI_MATERIAU`.

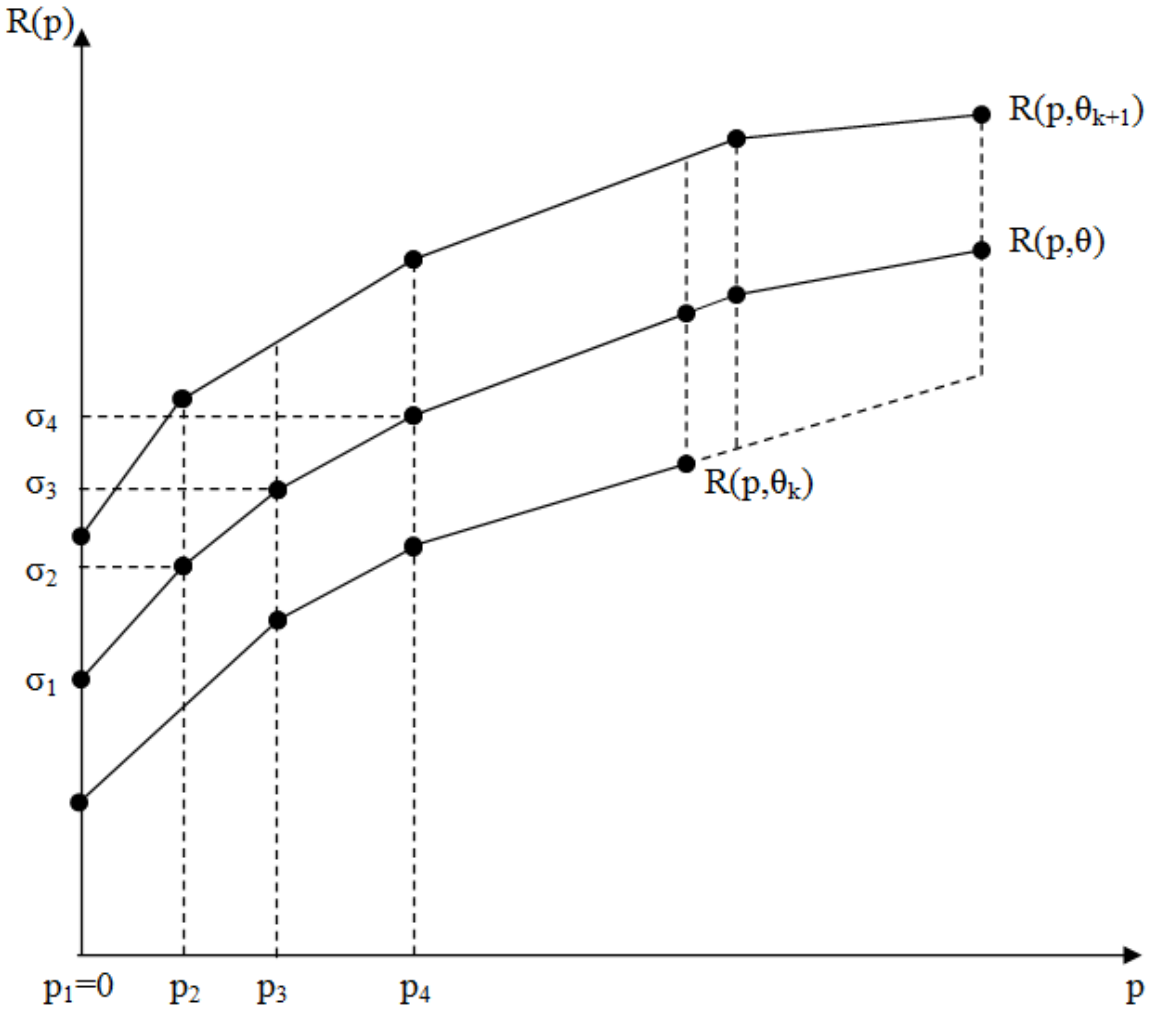
`f` est une fonction à une ou deux variables représentant les courbes de traction simple. La première variable est obligatoirement la déformation, la deuxième si elle existe est la température (paramètre d'une nappe). Pour chaque température, la courbe de traction doit être telle que :

- les abscisses (déformations vraies) sont strictement croissantes,
- le premier point de la courbe correspond à (ϵ_1, σ_y) où $\epsilon_1 \neq 0$ et σ_y est la limite d'élasticité,
- la pente entre 2 points successifs est inférieure à la pente élastique entre 0 et le premier point de la courbe $(E = \sigma_y / \epsilon_1)$.

Pour interpoler par rapport à la température, *Code_Aster* transforme d'abord toutes les courbes $\sigma = f(\epsilon)$ données par l'utilisateur en courbes $\sigma(p) = R(p)$ de la façon suivante : si E est la pente élastique entre 0 et le premier point de la courbe (ϵ_1, σ_y) (où $\epsilon_1 \neq 0$ et σ_y est la limite d'élasticité), tout point de la courbe (ϵ_i, σ_i) devient le point (p_i, σ_i) avec $p_i = \epsilon_i - \sigma_i / E$ (d'où $p_1 = 0$). Soit θ la température considérée, s'il existe k tel que $\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]$ où k désigne l'indice des courbes de traction contenues dans la nappe, on construit point par point la courbe $R(p, \theta)$ en interpolant à partir de $R(p, \theta_k)$ et $R(p, \theta_{k+1})$ pour toutes les valeurs de p de la

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

réunion des valeurs des abscisses des courbes k et $k+1$ (dans le cas où ces deux courbes sont prolongées linéairement ou par une fonction constante) :



Si n_k et n_{k+1} sont les nombres de points des courbes k et $k+1$, le nombre de points n de la courbe $R(p,\theta)$ vaut dans le cas général $n_k+n_{k+1}-1$ (cas où toutes les abscisses non nulles sont distinctes).

Si θ est en dehors des intervalles de définition des courbes de traction, on extrapole conformément aux prolongements spécifiés par l'utilisateur dans DEFI_NAPPE [U4.21.03] et selon le principe précédent.

Remarque :
Pour éviter de générer des erreurs d'approximation importantes ou même d'obtenir par extrapolation de mauvaises courbes de traction, il vaut mieux ne pas utiliser de prolongement linéaire dans DEFI_NAPPE.

Dans le cas où le prolongement de la courbe la plus courte est « EXCLU », on arrête l'interpolation à cet endroit et le prolongement de la courbe interpolée est également « EXCLU ».

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient donc dans tous les cas une fonction d'écrouissage linéaire par morceaux :

$$R(p,q)=s_i+\frac{s_{i+1}-s_i}{p_{i+1}-p_i}(p-p_i) \text{ pour } p\in[p_i,p_{i+1}] \text{ pour } i+1\leq n \text{ , avec } p_1=0$$

Le module d'Young correspondant à la température θ est calculé de la façon suivante :

$$E=E_k+\frac{q-q_k}{q_{k+1}-q_k}(E_{k+1}-E_k)$$

où , pour $i=k$ ou $i=k+1$, E_i est la pente élastique entre 0 et le premier point de la courbe $\sigma=f(\epsilon)$ correspondant à la température θ_i .

C'est ce module de Young qui est utilisé dans l'intégration de la relation de comportement.

La limite d'élasticité à la température θ vaut :

$$\sigma_y=R(0,\theta)=\sigma_1$$

L'utilisateur doit aussi donner le coefficient de Poisson ν et un module d'Young fictif (qui ne sert que pour calculer la matrice de rigidité élastique si le mot clé NEWTON=_F(MATRICE='ELASTIQUE') est présent dans STAT_NON_LINE) par les mots clés :

```
/ ELAS    =_F  (NU = ν ,  E = E )
/ ELAS_FO =_F  (NU = ν ,  E = E )
```

3.1.3 Relation VMIS_ISOT_PUIS

Les données du matériau sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_PUIS ou ECRO_PUIS_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

```
ECRO_PUIS=_F( SY= σy , A_PUIS =a,   N_PUIS =n)
```

La courbe d'écrouissage est déduite de la courbe uniaxiale reliant les déformations aux contraintes, dont l'expression est :

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+a\frac{\sigma_y}{E}\left(\frac{\sigma-\sigma_y}{\sigma_y}\right)^n \text{ pour } \sigma>\sigma_y$$

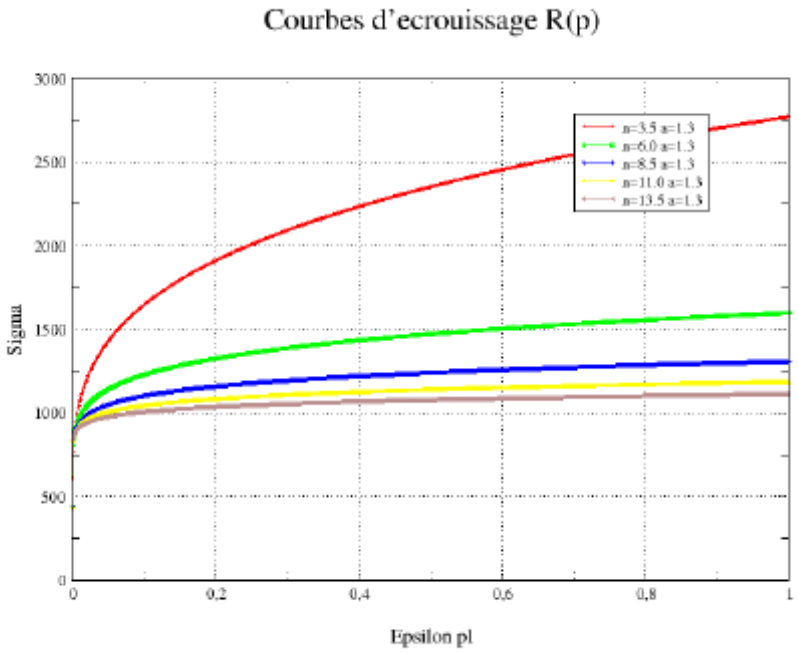
ce qui donne la courbe d'écrouissage :

$$R(p)=\sigma_y+\sigma_y\left(\frac{E}{a\sigma_y}p\right)^{\frac{1}{n}}$$

La courbe représentative d'une telle fonction a l'allure suivante, pour différentes valeurs de n :

Les données du matériau sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_COOK ou ECRO_COOK_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



Attention : cette loi d'écrouissage **n'est pas du tout identique** à la loi de Ramberg-Osgood (souvent utilisée comme hypothèse dans les analyses simplifiées en mécanique de la rupture). La relation contraintes-déformations de la loi de Ramberg-Osgood est :

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^{n-1}$ pour tout σ .

3.1.4 Relation VMIS_JOHN_COOK

Les données du matériau sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_COOK ou ECRO_COOK_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

```
ECRO_COOK
=_F(A=A,B=B,C=C,N_PUIS=n,M_PUIS=m,EPSP0=epsp0,TROOM=troom,TMELT=tmelt,)
```

La courbe d'écrouissage s'écrit de la manière suivante :

$$R(p, \dot{p}, T) = (A + B\, p^n) \left(1 + C \ln\left(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right)$$

ou de manière plus concise :

$$R(p, \dot{p}, T) = (A + B\, p^n)\,(1 + C \dot{p}^*)\,(1 - T^{*m})$$

avec $\dot{p}^* = \begin{cases} \frac{\dot{p}}{\dot{p}_0} & si \quad \dot{p} \geq \dot{p}_0 \\ 1 & si \quad \dot{p} \leq \dot{p}_0 \end{cases}$ et $T^* = \begin{cases} \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} & si \quad T \geq T_{room} \\ 0 & si \quad T \leq T_{room} \end{cases}$

3.2 Opérateur tangent. Option RIGI_MECA_TANG

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le but de ce paragraphe est de calculer l'opérateur tangent K_{i-1} (option de calcul RIGI_MECA_TANG appelée à la première itération d'un nouvel incrément de charge) à partir des résultats connus à l'instant précédent t_{i-1}.

Pour cela, si le tenseur des contraintes à t_{i-1} est sur la frontière du domaine d'élasticité, on écrit la condition :

$$\dot{f}=0$$

qui doit être vérifiée (pour le problème continu en temps) conjointement à la condition :

$$f=0$$

avec :

$$f(\sigma, p)=\sigma_{eq}-R(p)$$

Si par contre le tenseur des contraintes à t_{i-1} est à l'intérieur du domaine, $f<0$, alors l'opérateur tangent est l'opérateur d'élasticité.

Les quantités intervenant dans cette expression sont calculées à l'instant précédent t_{i-1}, qui sont les seules connues au moment de la phase de prédiction. On obtient donc :

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial f}{\partial p}\dot{p}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\tilde{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}+\frac{\partial f}{\partial p}\dot{p}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(2\mu\tilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}-2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P}\right)+\frac{\partial f}{\partial p}\dot{p}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P}\right)+\frac{\partial f}{\partial p}\dot{p},$$

car $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ est déviateur.

Avec

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^{-}=\boldsymbol{\sigma}\left(t_{i\text{-}1}\right),\ \boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{-}=\boldsymbol{\varepsilon}\left(t_{i-1}\right),\ \boldsymbol{\varepsilon}^{p}=\boldsymbol{\varepsilon}^{p^{-}}=\boldsymbol{\varepsilon}^{p}\left(t_{i\text{-}1}\right)\ \text{et}\ p=p^{-}=p\left(t_{i\text{-}1}\right)$$

Remarque :

On ne tient pas compte dans cette expression de la variation des coefficients élastiques avec la température. C'est une approximation, sans conséquence importante, puisque cet opérateur ne sert qu'à initialiser les itérations de Newton. Par contre, la dépendance de l'opérateur tangent par rapport aux déformations thermiques est bien pris en compte au niveau de l'algorithme global [R5.03.01].

On a alors : $\frac{3}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\left(2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-2\mu\dot{p}\frac{3}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\right)-R'(p)\dot{p}=0$

ce qui conduit à : $\dot{p}=\frac{(3\mu)}{\sigma_{eq}}\frac{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}.\tilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)}{3\mu+R'(p)}$ donc

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{p} = \begin{cases} \dfrac{9\mu}{2}\dfrac{\left(\tilde{\sigma}\,.\,\dot{\tilde{\varepsilon}}\right)}{3\mu + R'(p)}\dfrac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}^{2}}, \text{ si } f(\sigma, p) = \sigma_{eq} - R(p) = 0 \\ 0, \qquad\qquad \text{si } \sigma_{eq} - R(p) < 0 \end{cases} \\ \dot{\sigma}_{ij} = K\,\dot{\varepsilon}_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\left(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\right) \end{cases}$$

Remarque :

L'information $\sigma_{eq}^{-} - R(p^{-}) = 0$ *est conservée sous forme d'une variable interne* ξ *qui vaut 1 dans ce cas et 0 si* $\sigma_{eq}^{-} < R(p^{-})$.

L'opérateur tangent lie le vecteur de déformations virtuelles $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$ à un vecteur de contraintes virtuelles $\boldsymbol{\sigma}^{*}$.

La matrice de rigidité tangente s'écrit pour un comportement élastique :

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \left(K\,\vec{\mathbf{1}}\otimes\vec{\mathbf{1}} + 2\mu\,\mathbf{P}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$$

et pour un comportement plastique :

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \left(K\,\vec{\mathbf{1}}\otimes\vec{\mathbf{1}} + 2\mu\,\mathbf{P} - C_{p}\,\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$$

avec $\mathbf{s}$ le vecteur des contraintes déviatoriques associé à $\boldsymbol{\sigma}^{-}$ défini par :

$$\mathbf{s}^{T} = \left(\tilde{\sigma}_{11}^{-}, \tilde{\sigma}_{22}^{-}, \tilde{\sigma}_{33}^{-}, \sqrt{2}\,\tilde{\sigma}_{12}^{-}, \sqrt{2}\,\tilde{\sigma}_{23}^{-}, \sqrt{2}\,\tilde{\sigma}_{31}^{-}\right)$$

et :

$$C_{p} = \xi\frac{\left(3\mu\right)^{2}}{\left(\sigma_{eq}\right)^{2}}\frac{1}{3\mu + R'}$$

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{eq}^{-} - R(p^{-}) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas du premier incrément de chargement, donc si l'état à l'instant précédent correspond à un état initial non contraint, l'opérateur tangent est identique à l'opérateur d'élasticité.

3.3 Calcul des contraintes et des variables internes

La décomposition des déformations permet d'écrire :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} + \Delta\left(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\right) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$$

Soit, en prenant les parties sphériques et déviatoriques :

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} + \Delta\left(\frac{\tilde{\sigma}}{2\mu}\right) \text{ car } \Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = 0\,.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$tr\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\Delta\left(\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3\mathrm{K}}\right)+tr\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th} \text{ car } \mathrm{tr}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=0.$$

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement pour l'écrouissage isotrope, on obtient alors :

$$2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}})=\frac{3}{2}2\mu\Delta p\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}})_{eq}}-2\frac{\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}$$

$$tr\boldsymbol{\sigma}=\frac{3\mathrm{K}}{3\mathrm{K}^{-}}tr\boldsymbol{\sigma}^{-}+3K\,tr\boldsymbol{\Delta\varepsilon}-3K\,tr\boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{th}$$

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)_{eq}-R\left(p^{-}+\Delta p\right)\leq 0$$

$$\Delta p=0\,\mathrm{si}\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)_{eq}<R\left(p^{-}+\Delta p\right)$$

$$\Delta p\geq 0\,\mathrm{si}\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)_{eq}=R\left(p^{-}+\Delta p\right)$$

On définit, pour simplifier les notations, le tenseur σ^{e} tel que :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}=\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+2\mu\boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ et } \mathrm{tr}\,\sigma^{e}=\mathrm{tr}\,\sigma\ .$$

Deux cas se présentent :

- $\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)_{eq}<R(p^{-}+\Delta p)$

  dans ce cas : $\Delta p=0\,\mathrm{soit}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}$, donc : $\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right)_{eq}<R\left(p^{-}\right)$

- $\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)_{eq}=R\left(p^{-}+\Delta p\right)$

  dans ce cas : $\Delta p\geq 0$ donc : $\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right)_{eq}\geq R\left(p^{-}\right)$

On en déduit l'algorithme de résolution :

- si $\tilde{\sigma}^{e}_{eq}\leq R\left(p^{-}\right)$ alors $\Delta p=0\,\mathrm{soit}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}$
- si $\tilde{\sigma}^{e}_{eq}>R\left(p^{-}\right)$

  alors il faut résoudre : $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{3}{2}2\mu\Delta p\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\boldsymbol{\sigma})_{eq}}$

donc en factorisant $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et en prenant la valeur équivalente de Von Mises :

$$\sigma^{e}_{eq}=\left(1+\frac{3}{2}\frac{2\mu\Delta p}{\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)_{\mathrm{eq}}}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)_{\mathrm{eq}}$$

soit :

$$\sigma^{e}_{eq}=R\left(p^{-}+\Delta p\right)+3\mu\Delta p$$

car : $\sigma_{eq}=\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)_{eq}=R\left(\overline{p}+\Delta p\right)$

C'est une équation scalaire en Δp, linéaire ou non suivant $R(p)$. Δp est calculé de la façon suivante :

- dans le cas où l'écrouissage est linéaire (relation `VMIS_ISOT_LINE`), on obtient directement :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Delta p=\frac{\sigma_{eq}^{e}-\sigma_{y}-R'p^{-}}{R'+3\mu} \quad R'=\frac{E E_T}{E-E_T} \text{ avec}$$

- dans le cas où l'écrouissage est donné par une courbe de traction affine par morceaux, (relation VMIS_ISOT_TRAC), on tire parti de la linéarité par morceaux pour déterminer exactement Δp (voir §Annexe 1) ;
- dans le cas d'un écrouissage défini par une loi en puissance (relation VMIS_ISOT_PUIS), Δp est solution de l'équation non linéaire : $R\left(p^{-}+\Delta p\right)+3\mu\,\Delta p-\sigma_{eq}^{e}=0$. Cette équation est résolue par une méthode itérative (algorithme de type sécante). Au voisinage de l'origine, on linéarise $R(p)$, car la dérivée $R'=\frac{E}{an}\left(\frac{E}{a\sigma_y}p\right)^{\frac{1}{n}-1}$ est infinie en $p=0$. Donc si $p<p_0$, on remplace $R(p)$ par $R^{lin}(p)=\sigma_y+\frac{p}{p_0}\left(R(p_0)-\sigma_y\right)$,ce qui évite la recherche d'une solution numériquement presque nulle. En pratique, on choisit $p_0=10^{-10}$.

  Une fois Δp déterminé, on calcule σ par :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\sigma_{eq}^{e}-3\mu\Delta p}{\sigma_{eq}^{e}}.\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}$$

  et

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{e}} \ .$$

Les options RAPH_MECA et FULL_MECA effectuent toutes deux le calcul précédent, qui explicite le calcul de $\mathbf{R}\left(\mathbf{u}_i^n\right)$. On remarque qu'en réalité, $\mathbf{R}\left(\mathbf{u}_i^n\right)=\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\sigma}_i^n$ où $\boldsymbol{\sigma}_i^n$ est calculé non en fonction de $\mathbf{u}_i^n$, mais de $\boldsymbol{\sigma}_{i-1}\,\text{et}\,\Delta\mathbf{u}_i^n$.

Remarque :

Cas particulier des contraintes planes.

Le modèle de Von Mises à écrouissage isotrope (VMIS_ISOT_LINE, VMIS_ISOT_PUIS ou VMIS_ISOT_TRAC) est également disponible en contraintes planes, c'est à dire pour les modélisations C_PLAN, DKT, COQUE_3D, COQUE_AXIS, COQUE_D_PLAN, COQUE_C_PLAN, TUYAU, TUYAU_6M..

Dans ce cas, le système à résoudre comporte une équation supplémentaire. Ce calcul est détaillé en annexe 2.

3.4 Opérateur tangent. Option FULL_MECA

L'option FULL_MECA permet de calculer la matrice tangente $\boldsymbol{K}_i^n$ à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent (on note pour simplifier : $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, $p=p^{-}+\Delta p$) et on écrit les expressions seulement dans le cas isotherme.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Si le tenseur des contraintes est sur la frontière du domaine, $f=0$ alors on a, en différentiant l'expression de la loi de normalité en $\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma^{-}}+\Delta\tilde{\sigma}$:

$$2\mu\,\delta\epsilon^{p}=2\mu\,\delta\tilde{\epsilon}-\delta\tilde{\sigma}=\frac{3}{2}2\mu\left(\delta p\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}+\Delta p\frac{\delta\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}-\frac{3}{2}\Delta p\frac{\tilde{\sigma}:d\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq^{3}}}.\tilde{\sigma}\right)$$

où $\delta\epsilon^{p},\delta\tilde{\epsilon},\delta\tilde{\sigma}$ représentent des accroissements infinitésimaux autour de la solution du problème élastoplastique incrémental obtenue précédemment.

Comme :

$$\frac{3}{2}\frac{\tilde{\sigma}:d\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}=R'(p)dp$$

en effectuant le produit tensoriel de la première équation par $\tilde{\sigma}$ on a :

$$2\mu\,\tilde{\sigma}:\delta\tilde{\epsilon}-\tilde{\sigma}:\delta\tilde{\sigma}=2\mu\,\delta p.\sigma_{eq}$$

en éliminant δp des deux dernières équations :

$$\tilde{\sigma}:\delta\tilde{\sigma}=\frac{2\mu\,\tilde{\sigma}:\delta\tilde{\epsilon}}{1+\frac{3\mu}{R'(p)}}\ .$$

- Si par contre si le tenseur des contraintes est à l'intérieur du domaine, $f<0$, alors l'opérateur tangent est l'opérateur d'élasticité.

En exprimant δp et $\tilde{\sigma}:\delta\tilde{\sigma}$ dans la première équation, on obtient :

$$2\mu\,\delta\tilde{\epsilon}-\delta\tilde{\sigma}=\frac{3\mu\Delta p}{\sigma_{eq}}\delta\tilde{\sigma}+C_{p}.(\tilde{\sigma}:\delta\tilde{\epsilon})_{+}\tilde{\sigma},$$

avec :

$$C_{p}=\frac{9\mu^{2}}{\sigma_{eq}^{2}}\left(1-\frac{R'(p)\Delta p}{\sigma_{eq}}\right)\frac{1}{R'(p)+3\mu}$$

La partie positive $(\tilde{\sigma}:\delta\tilde{\epsilon})_{+}$ permet de regrouper en une seule équation les deux conditions :

- soit $f<0$, ce qui implique $\Delta p=0$
- soit $f=0$

On obtient alors :

$$\delta\tilde{\sigma}=\frac{2\mu}{a}\delta\tilde{\epsilon}-\frac{C_{p}}{a}(\tilde{\sigma}:\delta\tilde{\epsilon})_{+}\tilde{\sigma}$$

en posant :

$$a=1+\frac{3\mu\Delta p}{R(p+\Delta p)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'opérateur tangent lie le vecteur de déformations virtuelles $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ à un vecteur de contraintes virtuelles $\boldsymbol{\sigma}^*$.

La matrice de rigidité tangente s'écrit pour un comportement élastique :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \left(K \vec{\mathbf{1}} \otimes \vec{\mathbf{1}} + 2\mu \mathbf{P} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

et pour un comportement plastique :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \left(K \vec{\mathbf{1}} \otimes \vec{\mathbf{1}} + \frac{2\mu}{a} \mathbf{P} - \frac{C_p}{a} \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

avec $\mathbf{s}$ le vecteur des contraintes déviatoriques associé à $\boldsymbol{\sigma}^-$ défini par :

$$\mathbf{s}^{\mathrm{T}} = \left(\tilde{\sigma}_{11}^-, \tilde{\sigma}_{22}^-, \tilde{\sigma}_{33}^-, \sqrt{2}\,\tilde{\sigma}_{12}^-, \sqrt{2}\,\tilde{\sigma}_{23}^-, \sqrt{2}\,\tilde{\sigma}_{31}^- \right)$$

et :

$$\xi = \begin{cases} 1 \text{ si } \Delta\varepsilon \text{ conduit à une plastification} & \text{et } \tilde{\boldsymbol{\sigma}} . \Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On constate que l'opérateur tangent au système issu de la discrétisation implicite diffère de l'opérateur tangent au problème en vitesse (RIGI_MECA_TANG). On le retrouve en faisant : $\Delta p = 0$ dans les expressions de C_p et a.

3.5 Variables internes des comportements VMIS_ISOT_LINE, VMIS_ISOT_PUIS, VMIS_ISOT_TRAC et VMIS_JOHN_COOK

Les relations de comportement VMIS_ISOT_LINE, VMIS_ISOT_PUIS et VMIS_ISOT_TRAC produisent deux variables internes :

- p déformation plastique équivalente cumulée,
- et χ indicateur de plasticité à l'instant considéré (utile pour le calcul de l'opérateur tangent).

VMIS_JOHN_COOK utilise deux variables internes en plus des deux précédentes :

- $\dot{p}^-$ vitesse de déformation plastique équivalente cumulée à l'instant moins,
- et Δt^- l'incrément de pas de temps à l'instant moins.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Relation de Von Mises à écrouissage cinématique linéaire

4.1 Expression de la relation de comportement, cas général

Cette relation est obtenue par le mot clé VMIS_CINE_LINE du mot clé facteur COMPORTEMENT.

Elle s'écrit (toujours en petites déformations) :

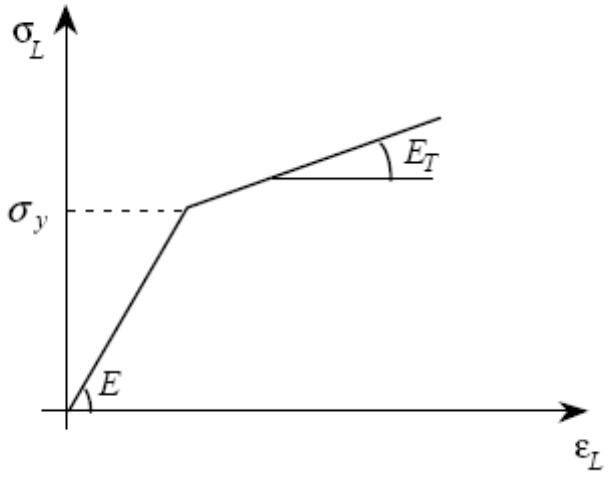
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\tilde{\mathbf{X}}}{(\sigma-X)_{eq}} = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}}{(\sigma-X)_{eq}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\overbrace{\mathbf{A}^{-1}}}\boldsymbol{\sigma} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \\ \mathbf{X} = C\,\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha\left(T-T_{ref}\right)\mathbf{Id} \\ (\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X})_{eq} - \sigma_y \le 0 \\ \begin{cases} \dot{p}=0 \text{ si } (\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X})_{eq}-\sigma_y \le 0 \\ \dot{p}\ge 0 \text{ si } (\mathbf{s}-\mathbf{X})_{eq}-\sigma_y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

éq 4.1-1

σ_y est la limite d'élasticité (le choix de σ_y incombe à l'utilisateur : elle peut correspondre à la fin de linéarité de la courbe de traction réelle, ou bien à une limite d'élasticité réglementaire ou conventionnelle... Quoi qu'il en soit, on utilise ici l'unique valeur définie sous ECRO_LINE).
C est le coefficient d'écrouissage déduit des données par un essai de traction simple.

Dans ce cas (tenseur de contraintes uniaxial, tenseur de déformations plastiques isochore et orthotrope) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_L & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{X_L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{X_L}{2} \end{pmatrix}$$



$$(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X})_{eq} = \sigma_L - \frac{3}{2}X_L \text{ et } X_L = C\,\varepsilon_L^p = C\left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les données matériau sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_LINE ou ECRO_LINE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU :

/ ECRO_LINE =_F(D_SIGM_EPSI = E_T , SY = σ_y)
/ ECRO_LINE_FO =_F (D_SIGM_EPSI = E_T , SY = σ_y)

ECRO_LINE_FO correspond au cas où E_T et σ_y dépendent de la température et sont alors calculés pour la température du point de Gauss courant.

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson sont ceux fournis sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

Pour $\varepsilon_L > \frac{\sigma_y}{E}$ $\sigma_L = \sigma_y + E_T\left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_y}{E}\right)$,

mais on a également :

$$\begin{cases} \sigma_L - \frac{3}{2} X_L = \sigma_y \\ X_L = C\left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E}\right) \end{cases}$$

d'où, en éliminant X_L et en identifiant :

$$C = \frac{2}{3}\frac{E E_T}{E - E_T} .$$

4.2 Expression de la relation de comportement en 1D

Pour des raisons de performances la relation est également écrite en 1D pour une utilisation avec des éléments finis de type poutre multi-fibres. Les équations précédentes sont identiques, les grandeurs σ_L , X_L et ε_L sont des scalaires.
Les données matériau sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_LINE de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01] :

/ ECRO_LINE = _F(
♦ D_SIGM_EPSI = E_T [R éel]
♦ SY = σ_y [R éel]
◊ SIGM_ELS = sigmels [R éel]
◊ EPSI_ELU = epsielu [R éel]
)

Les opérandes SIGM_ELS et ESPI_ELU permettent de définir les bornes qui correspondent aux états limites de service et ultime, classiquement utilisées lors d'étude en génie civil.

◊ SIGM_ELS = sgels
Définition de la contrainte limite de service.

◊ EPSI_ELU = epelu
Définition de la déformation limite ultime.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces bornes sont obligatoires lorsque l'on utilise le comportement ECRO_CINE _1D (Cf. [U4 . 5 1. 11] Comportements non-linéaires , [U4.42.07] DEFI_MATER_GC) . Dans les autres cas elles ne sont pas prises en compte.

La modélisation supportée est 1D, le nombres de variables internes est de 6.

- $V1$: Critère ELS : CRITELS. Cette variable donne des informations par rapport à l'état limite de service. Cette variable représente la valeur absolue de la contrainte divisée par la contrainte limite à l'ELS du matériau. Si cette variable est dans $[0,1]$ le matériau respecte l'ELS.
- $V2$: Critère ELU : CRITELU. Cette variable donne des informations par rapport à l'état limite ultime. Cette variable représente la valeur absolue de la déformation totale divisée par la déformation limite à l'ELU du matériau. Si cette variable est dans $[0,1]$ le matériau respecte l'ELU.
- $V3$: Écrouissage cinématique : XCINXX. En 1D seul un scalaire est nécessaire.
- $V4$: Indicateur plastique : INDIPLAS. Indique si le matériau a dépassé le critère élastique.
- $V5$: dissipation non récupérable : DISSIP. Lors de calculs sismiques il peut être utile à l'utilisateur de connaître l'énergie dissipée non récupérable. La variable DISSIP représente le cumul d'énergie non récupérable. L'incrément d'énergie non récupérable s'écrit sous la forme :

$$\Delta Eg = \frac{1}{2}\left(E^{+}\Delta\varepsilon - \left(\sigma^{+} - \sigma^{-}\right)\right)\Delta\varepsilon$$

- $V6$: dissipation thermodynamique : DISSTHER . L'incrément de dissipation thermodynamique s'écrit sous la forme : $\Delta Eg = \sigma_y \dot{p}$.

4.3 Opérateur tangent. Option RIGI_MECA_TANG

Le but de ce paragraphe est de calculer l'opérateur tangent K_{i-1} (option de calcul RIGI_MECA_TANG appelée à la première itération d'un nouvel incrément de charge) à partir des résultats connus à l'instant précédent t_{i-1} .

Pour cela, si le tenseur des contraintes à t_{i-1} est sur la frontière du domaine d'élasticité, on écrit la condition :

$$\dot{f} = 0$$

qui doit être vérifiée (pour le problème continu en temps) conjointement à la condition :

$$f = 0$$

avec

$$f = f\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}, \mathbf{X}^{-}\right) = \left(\boldsymbol{\sigma}^{-} - \mathbf{X}^{-}\right)_{eq} - \sigma_y$$

Si par contre le tenseur des contraintes à t_{i-1} est à l'intérieur du domaine, $f < 0$, alors l'opérateur tangent est l'opérateur d'élasticité.

On pose :

$$\boldsymbol{\sigma}^{dev} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-} - \mathbf{X}^{-} \text{ et } \gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } \left(\boldsymbol{\sigma}^{-} - \mathbf{X}^{-}\right)_{eq} - \sigma_y = 0 \quad (\text{variable interne } \chi) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème en vitesse s'écrit dans ce cas :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2\mu}{\sigma_y}\right)^2 \dfrac{\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}\right).\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}\right)}{C+2\mu} \text{ si } \left(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X}\right)-\sigma_y=0 \\ 0 \text{ si } \left(\mathbf{s}-\mathbf{X}\right)_{eq}-\sigma_y<0 \end{cases} \\ \dot{\sigma}_{ij} = K\,\dot{\varepsilon}_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\left(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}-\dot{\varepsilon}^p_{ij}\right) \end{cases}$$

L'opérateur tangent lie le vecteur de déformations virtuelles $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ à un vecteur de contraintes virtuelles $\boldsymbol{\sigma}^*$.
La matrice de rigidité tangente s'écrit pour un comportement élastique :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \left(K\,\vec{\mathbf{1}}\otimes\vec{\mathbf{1}} + 2\mu\,\mathbf{P}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^*$$

et pour un comportement plastique :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \left(K\,\vec{\mathbf{1}}\otimes\vec{\mathbf{1}} + 2\mu\,\mathbf{P} - C_p\,\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^*$$

avec $\mathbf{s}$ le vecteur des contraintes déviatoriques associé à $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$ défini par :

$$\mathbf{s}^{\mathbf{T}} = \left(\sigma_{11}^{dev}, \sigma_{22}^{dev}, \sigma_{33}^{dev}, \sqrt{2}\,\sigma_{12}^{dev}, \sqrt{2}\,\sigma_{23}^{dev}, \sqrt{2}\,\sigma_{31}^{dev}\right)$$

et :

$$C_p = \gamma\,\frac{3}{2}\left(\frac{2\mu}{\sigma_y}\right)^2 \frac{1}{2\mu+C}$$

Dans le cas du premier incrément de chargement, donc si l'état à l'instant précédent correspond à un état initial non contraint, l'opérateur tangent est identique à l'opérateur d'élasticité.

4.4 Calcul des contraintes et variables internes

La discrétisation implicite directe des relations continues conduit à résoudre :

$$\begin{cases} 2\mu\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = 2\mu\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^-}{2\mu^-} - \dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu}\right) = \dfrac{3}{2}2\mu\,\Delta\,p\,\dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}}{\sigma_y} \\ \mathbf{X} = \dfrac{C}{C^-}\mathbf{X}^- + C\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \left(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X}\right)_{eq} \le \sigma_y \\ \Delta\,p = 0 \text{ si } \left(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{X}\right)_{eq} < \sigma_y \\ \Delta\,p \ge 0 \text{ sinon} \\ \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^- + \Delta\boldsymbol{\sigma}\right) = \dfrac{3K}{3K^-}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^- + 3K\operatorname{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - 3K\operatorname{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th} \end{cases}$$

On pose encore :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e = \frac{2\mu}{2\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + 2\mu\,\Delta\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{C}{C^-}\mathbf{X}^- \ .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La première équation s'écrit aussi :

$$\left(2\mu\,\Delta\tilde{\varepsilon}+\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-}\right)=\tilde{\sigma}+\frac{3}{2}2\mu\,\Delta p\frac{\tilde{\sigma}-\mathbf{X}}{\sigma_y}$$

en retranchant $\mathbf{X}=\frac{C}{C^{-}}\mathbf{X}^{-}+C\,\Delta\varepsilon^{p}$ a chaque terme, on obtient :

$$2\mu\,\Delta\tilde{\varepsilon}+\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-}-\frac{C}{C^{-}}\mathbf{X}^{-}=\tilde{\sigma}-\mathbf{X}+\frac{3}{2}2\mu\,\Delta p\frac{\tilde{\sigma}-\mathbf{X}}{\sigma_y}+C\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{P}}$$

ou encore, en utilisant la loi d'écoulement :

$$\tilde{\sigma}^{e}=\left(\tilde{\sigma}-\mathbf{X}\right)\left(1+\frac{3}{2}\left(2\mu+C\right)\frac{\Delta p}{\sigma_y}\right)$$

On obtient encore une équation scalaire en Δp en prenant les valeurs équivalentes de Von Mises :

$$\sigma_{eq}^{e}=\sigma_y+\frac{3}{2}\left(2\mu+C\right)\Delta p$$

ce qui donne directement :

$$\Delta p=\frac{\sigma_{eq}^{e}-\sigma_y}{\frac{3}{2}\left(2\mu+C\right)}$$

Et σ est obtenu par : $\tilde{\sigma}=\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-}+2\mu\,\Delta\tilde{\varepsilon}+2\mu\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$

En remarquant que : $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=\frac{3}{2}\Delta p\frac{\tilde{\sigma}-\mathbf{X}}{\sigma_y}=\frac{3}{2}\Delta p\frac{\tilde{\sigma}^{e}}{\sigma_{eq}^{e}}$ car : $\frac{\tilde{\sigma}-\mathbf{X}}{\sigma_y}=\frac{\tilde{\sigma}^{e}}{\sigma_{eq}^{e}}$

on a donc :

$$\tilde{\sigma}=\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-}+2\mu\,\Delta\tilde{\varepsilon}-\frac{2\mu}{2\mu+C}\frac{\left(s_{eq}^{e}-\sigma_y\right)_{+}}{\sigma_{eq}^{e}}.\tilde{\sigma}^{e}$$

Les variables internes $\mathbf{X}$ sont calculées par :

$$\mathbf{X}=\frac{C}{C^{-}}\mathbf{X}^{-}+C\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=\frac{C}{C^{-}}\mathbf{X}^{-}+\frac{3}{2}C\,\Delta p\frac{\tilde{\sigma}^{e}}{\sigma_{eq}^{e}}$$

Remarque : *Cas particulier des contraintes planes.*

La prise en compte directe de l'hypothèse des contraintes planes dans l'intégration du modèle de Von Mises à écrouissage cinématique linéaire n'a pas été faite dans *Code_Aster*. Pour prendre en compte cette hypothèse, c'est à dire pour utiliser un comportement élastoplastique de Von Mises avec un écrouissage cinématique linéaire (loi de Prager) avec les modélisations C_PLAN, DKT, COQUE_3D, COQUE_AXIS, COQUE_D_PLAN, COQUE_C_PLAN, TUYAU, TUYAU_6M, on peut :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- soit utiliser la méthode de condensation statique (due à R. de Borst [R5.03.03]) qui permet d'obtenir un état plan de contraintes à convergence des itérations globales de l'algorithme de Newton ;
- soit utiliser la comportement VMIS_ECMI_LINE (cf. [R5.03.16]).

4.5 Opérateur tangent. Option FULL_MECA

L'option FULL_MECA permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_i^n$ à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent (on note pour simplifier : $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}^- +\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, $p=p^- +\Delta p$) et on écrit les expressions seulement dans le cas isotherme.

On pose $\boldsymbol{\sigma}^{dev}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}$ et $\gamma=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \Delta p>0 \,\text{et}\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}\right).\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

L'opérateur tangent lie le vecteur de déformations virtuelles $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ au vecteur de contraintes virtuelles $\boldsymbol{\sigma}^*$. Alors la matrice de rigidité tangente s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^*=\left(K\vec{\mathbf{1}}\otimes\vec{\mathbf{1}}+2\mu\, a_2 P-C_p\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^*$$

avec $\mathbf{s}$ le vecteur de contraintes associé à $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$ par :

$$\mathbf{s}^{\mathbf{T}}=\left(\sigma_{11}^{dev},\sigma_{22}^{dev},\sigma_{33}^{dev},\sqrt{2}\sigma_{12}^{dev},\sqrt{2}\sigma_{23}^{dev},\sqrt{2}\sigma_{31}^{dev}\right)$$

et :

$$C_p=\gamma\frac{3}{2}\left(\frac{2\mu}{\sigma_y}\right)^2\frac{1}{2\mu+C}a_1 \quad \text{avec} \quad a_1=\frac{1}{1}+\frac{3}{2}\frac{(2\mu+C)\Delta p}{\sigma_y} \quad \text{et} \quad a_2=a_1\left(1+\frac{3}{2}C\frac{\Delta p}{\sigma_y}\right)$$

4.6 Variables internes du modèle VMIS_CINE_LINE

Les variables internes sont au nombre de 7 :

- le tenseur $\mathbf{X}$ stocké sur 6 composantes,
- la variable scalaire χ.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Bibliographie

1) P. MIALON, Eléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élastoplasticité. EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches - Série C - N° 3 1986, p. 57 - 89.

2) E.LORENTZ, J.M.PROIX, I.VAUTIER, F.VOLDOIRE, F.WAECKEL « Initiation à la thermo-plasticité dans le *Code_Aster*», Note EDF/DER/HI-74/96/013

Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
5	J.M.Proix, E.Lorentz, P.Mialon EDF-R&D	Texte initial
8.5	J.M.Proix EDF-R&D/AMA	Correction page 10, cf. fiche REX 11079
10.2	J.M.Proix EDF-R&D/AMA	Modification page 7 de la rédaction sur la façon de calcul R(p) (cf. fiche 15001).
11.1	S. Fayolle EDF-R&D/AMA	Ajout de VMIS_JOHN_COOK

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1 Relation VMIS_ISOT_TRAC : compléments sur l'intégration

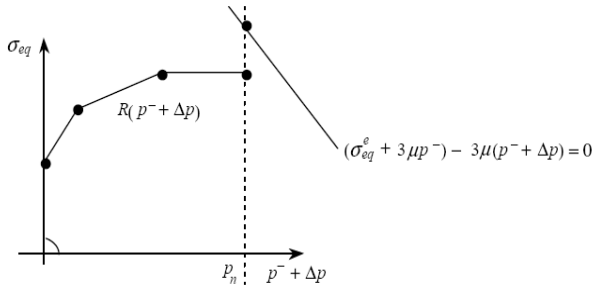
La discrétisation implicite de la relation de comportement conduit à résoudre une équation en Δp (voir §3.3) :

$$\sigma_{eq}^{e}-3\mu\Delta p-R\left(p^{-}+\Delta p\right)=0$$

On résout exactement l'équation en tirant parti de la linéarité par morceaux.

On examine d'abord si la solution pourrait être en dehors des bornes des points de discrétisation de la courbe $R(p)$, c'est-à-dire, si $p\geq p_n$ est une solution possible. Pour cela :

- si $\sigma_{eq}^{e}+3\mu\left(p^{-}-p_n\right)-\sigma_n\geq 0$, alors on est dans la situation suivante :



  - si le prolongement à droite est linéaire alors : $\Delta p=\dfrac{\sigma_{eq}^{e}-H_{n-1}}{\alpha_{n-1}+3\mu}$

    avec : $\alpha_{n-1}=\dfrac{\sigma_n-\sigma_{n-1}}{p_n-p_{n-1}}$ $\qquad H_{n-1}=\sigma_{n-1}+\alpha_{n-1}\left(p^{-}-p_{n-1}\right)$

  - si le prolongement est constant : $\Delta p=\dfrac{\sigma_{eq}^{e}-\sigma_n}{3\mu}$

- sinon, la solution p est à chercher dans l'intervalle $\left[p_i, p_{i+1}\right]$ tel que :

$$\sigma_{i+1}>\sigma_{eq}^{e}+3\mu\left(p^{-}-p_{i+1}\right) \quad \text{et} \quad \sigma_i\leq\sigma_{eq}^{e}+3\mu\left(p^{-}-p_i\right)$$

alors la solution est : $\Delta p=\dfrac{\sigma_{eq}^{e}-H_i}{\alpha_i+3\mu}$ et $p^{-}+\Delta p\in\left[p_i, p_{i+1}\right]$

avec :

$$\alpha_i=\frac{\sigma_{i+1}-\sigma_i}{p_{i+1}-p_i} \quad ; \quad H_i=\sigma_i+\alpha_i\left(p^{-}-p_i\right) \text{ pour } i=1 \text{ à } n-1$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2 Écrouissage isotrope en contraintes planes

Dans ce cas, le système à résoudre comporte une équation de plus : $\Delta\sigma_{33}=0$ .On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} 2\mu\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\dfrac{3}{2}2\mu\,\Delta p\,\dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)_{eq}} \\ \mathrm{tr}\,\Delta\boldsymbol{\sigma}=3K\,\mathrm{tr}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)_{eq}-R\left(p^{-}+\Delta p\right)\leq 0 \\ \Delta p=0 \text{ si } \left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)_{eq}<R\left(p^{-}+\Delta p\right) \\ \Delta p\geq 0 \text{ si } \left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\Delta\boldsymbol{\sigma}\right)_{eq}=R\left(p^{-}+\Delta p\right) \\ \Delta\sigma_{33}=0 \end{cases}$$

Avec cette hypothèse, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est pas entièrement connu : $\Delta\varepsilon_{33}$ ne peut être calculé uniquement à partir de $\Delta\mathbf{u}_i^n$.

Remarque :

> *Dans le cas des modélisations autres que* `C_PLAN` *, donc par exemple pour les modélisations de coques (* `DKT` *,* `COQUE_3D` *), les hypothèses sur les termes de cisaillement transverses* $\Delta\sigma_{13}$ *et* $\Delta\sigma_{23}$ *sont définies par ces modélisations (en général, le comportement lié au cisaillement transverse est linéaire, élastique et découplé des équations ci-dessus). Ces termes n'entrent donc pas en ligne de compte ici.*

On pose $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{q}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{y}$ avec $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{q}$ entièrement connu à partir de $\Delta\mathbf{u}_i^n$ et de l'élasticité, donc $\Delta\varepsilon_{33}^{q}=-\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\Delta\varepsilon_{11}^{q}+\Delta\varepsilon_{22}^{q}\right)$ et $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\Delta y\end{pmatrix}$ est inconnu.

Par rapport au système précédent, il y a une inconnue supplémentaire, Δy .

- Si $\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\right)_{eq}<R\left(p^{-}+\Delta p\right)$ alors $\Delta p=0$ donc $2\mu\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, c'est-à-dire $\Delta y=0$.
- Sinon, la technique de résolution consiste à exprimer Δy en fonction de Δp . On obtient alors une équation scalaire non linéaire en Δp .

On pose:' $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}=\dfrac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+2\mu\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q}$. De la même façon que pour l'intégration hors contraintes planes, on obtient :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{e}+2\mu\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{y}=\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\right)\left(1+\frac{3\mu\,\Delta p}{R\left(p+\Delta p\right)}\right).$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Mais cette expression fait intervenir une inconnue supplémentaire Δy : En particulier :

$$\tilde{\sigma}_{33}+2\mu\,\Delta\tilde{\varepsilon}_{33}^{y}=\left(\tilde{\sigma}_{33}^{-}+\Delta\tilde{\sigma}_{33}\right)\left(1+\frac{3\mu\,\Delta p}{R(p+\Delta p)}\right)$$

or

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_{33}^{y}=\frac{2}{3}\Delta y$$

et $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)=3K\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{q}+3K^{+}\Delta y+\frac{3K^{+}}{3K^{-}}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{-}-3K^{+}\Delta\varepsilon^{th}$

Comme :

$$\tilde{\sigma}_{33}^{e}+\Delta\tilde{\sigma}_{33}=\sigma_{33}^{e}+\Delta\sigma_{33}=\frac{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)}{3}=0-\frac{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{\Delta\sigma}\right)}{3}$$

On obtient une équation liant Δy et Δp :

$$\tilde{\sigma}_{33}+2\frac{2}{3}\Delta y=\left(1+\frac{3\mu\,\Delta p}{R(p+\Delta p)}\right)\left(\frac{-\mathrm{tr}\,\sigma_{e}-3K\,\Delta y}{3}\right)$$

avec :

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}_{e}=\frac{3K}{3K^{-}}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{-}+3K\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{q}-3K\Delta\varepsilon^{th}$$

Soit :

$$\Delta y\left(\frac{4\mu}{3}+K\left(1+\frac{3\mu\,\Delta p}{R\left(p^{-}+\Delta p\right)}\right)\right)=\tilde{\sigma}_{33}^{e}-\frac{\mathrm{tr}\,\sigma_{e}}{3}\left(1+\frac{3\mu\,\Delta p}{R\left(p^{-}+\Delta p\right)}\right)$$

en remarquant que :

$$\tilde{\sigma}_{33}^{e}=\sigma_{33}^{e}-\frac{\mathrm{tr}\,\sigma_{e}}{3}=0-\frac{\mathrm{tr}\,\sigma_{e}}{3}$$

et en explicitant μ , K , on obtient :

$$\Delta y=\frac{3\left(1-2\nu\right)\Delta p}{E\Delta p+2\left(1-\nu\right)R\left(p+\Delta p\right)}\tilde{\sigma}_{33}^{e}$$

à reporter dans l'équation en Δp (identique aux cas précédents) :

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}+2\mu\,\boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{y}\right)_{eq}-3\mu\,\Delta p-R(p^{-}+\Delta p)=0$$

où Δy s'exprime en fonction de Δp puisque : $\boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{y}=\frac{\Delta y}{3}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

L'équation scalaire en Δp ainsi obtenue est toujours non linéaire. Cette équation est résolue par une méthode de recherche de zéros de fonctions, basée sur un algorithme de sécante. Une fois la solution Δp connue on calcule Δy puis σ .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)