Indicateurs de décharge et de perte de proportionnalité du chargement en élastoplasticité

Résumé

On présente un ensemble de paramètres scalaires appelés indicateurs, permettant d'apprécier une décharge ou une perte de proportionnalité d'un chargement au cours de son histoire. Deux types d'indicateurs sont proposés : des indicateurs se présentant sous la forme de champs scalaires permettant de détecter les zones de la structure subissant des décharges ou des chargements non radiaux, et des indicateurs globaux intégrés sur une zone de la structure choisie par l'utilisateur. Ces derniers sont plus spécialement destinés à l'évaluation de la validité du taux de restitution de l'énergie en mécanique de la rupture non linéaire.

Les indicateurs décrits dans ce document sont disponibles :

- pour les indicateurs locaux sous la commande CALC_CHAMP, options DERA_ELGA et DERA_ELNO ;
- pour les indicateurs globaux, sous la commande POST_ELEM , options INDIC_SEUIL et INDIC_ENER.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
1.1 Définition d'un chargement proportionnel....3
1.2 Importance du chargement proportionnel et utilité d'indicateurs....3
1.3 Différents types d'indicateurs de perte de proportionnalité....3
1.4 indicateurs de décharge élastoplastique....3
2 Indicateurs locaux....4
2.1 Indicateurs de décharge....4
2.1.1 Indicateur local de décharge totale....4
2.1.2 Indicateur local de décharge élastoplastique....4
2.2 Indicateurs de perte de radialité....6
2.2.1 Indicateur local de radialité du chargement....6
2.2.2 Indicateur d'erreur due à la discrétisation temporelle....6
3 Indicateurs globaux....6
3.1 Indicateur sur les paramètres de plasticité....6
3.2 Indicateur énergétique....7
4 Fonctionnalités et vérification....8
4.1 Indicateurs locaux....8
4.2 Indicateurs globaux....9
5 Bibliographie....9
6 Description des versions du document....9

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

1.1 Définition d'un chargement proportionnel

Considérant une structure soumise à un chargement thermo-mécanique dans l'intervalle de temps $[0,t]$ on dira que ce chargement est proportionnel (ou encore radial) au point matériel p si le champ de contrainte représenté en ce point par le tenseur σ est proportionnel à un tenseur indépendant de l'instant considéré, le coefficient de proportionnalité étant une fonction monotone du temps. Formellement, cela s'exprimera par :

$\forall \tau [0,t], \sigma(P,\tau)=\alpha(\tau)\sigma_0(P), \alpha(\tau)>0$ fonction monotone dans $[0,t]$.

Cette définition implique, en particulier, que les directions principales des contraintes restent constantes, au point considéré, tout au long du trajet de chargement (ces directions peuvent être bien sûr variables d'un point à un autre).

1.2 Importance du chargement proportionnel et utilité d'indicateurs

Pour les matériaux plastiques, les champs mécaniques dépendent de toute l'histoire écoulée pendant le trajet de chargement. Les lois d'écoulement ont donc un caractère incrémental et leur intégration dépend de chaque cas de chargement. Une exception notable concerne justement le chargement proportionnel pour lequel la loi d'écoulement peut être intégrée une fois pour toutes. Par exemple, la loi de plasticité de Prandtl-Reuss basée sur le critère de Von Mises peut être remplacée par une loi élastique non linéaire (appelée loi de Hencky-Mises). Les cas de chargement strictement proportionnel sont assez rares. En effet, il faut remplir un grand nombre de conditions pour réaliser un tel cas [bib1] et ces dernières sont peu souvent vérifiées pour les structures industrielles. On peut même dire que pour des structures présentant des défauts géométriques tels que des fissures, ces conditions ne sont jamais strictement vérifiées.

Quand les chargements sont multi-axiaux, cycliques, ou thermo-mécaniques transitoires, certains tronçons du trajet de chargement peuvent être fortement non proportionnels. Il est alors utile de repérer ces tronçons et d'évaluer l'importance de la perte de proportionnalité, afin par exemple d'ajuster la discrétisation en temps du problème élastoplastique pour le tronçon considéré, ou de jauger la validité de certains post-traitements (en mécanique de la rupture par exemple).

1.3 Différents types d'indicateurs de perte de proportionnalité

Il semble difficile de définir une grandeur unique et simple qui pourrait détecter à la fois des zones spatiales de perte de proportionnalité et des tronçons de chemin de chargement (zones temporelles) en un point matériel. C'est pourquoi nous proposons des grandeurs scalaires ayant chacune leur spécificité : deux, définies par des champs mesurant en chaque point la décharge et la déviation des contraintes entre deux pas de temps (indicateurs locaux), deux autres de nature plus globale, caractérisant dans une zone donnée de la structure une histoire de chargement non proportionnelle.

Remarque :

Ces indicateurs sont étroitement liés à la discrétisation en temps du problème. En particulier, si cette discrétisation est trop grossière, on peut très bien ne pas détecter la décharge ou la perte de radialité se produisant pendant l'incrément de temps.

1.4 indicateurs de décharge élastoplastique

Une autre application des indicateurs de décharge, consiste à alerter l'utilisateur, si, en cas de décharge importante, le choix d'un écrouissage cinématique fournirait une solution très différente de l'écrouissage isotrope utilisé (cf. CR-AMA-11.035 [3]).

Ceci a un intérêt pratique : dans plusieurs études, le comportement choisi très souvent « par défaut » (car on ne dispose bien souvent que d'une courbe de traction) est `VMIS_ISOT_TRAC`. Or si des

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

décharges locales sont possibles, ceci peut conduire typiquement à sur-estimer les contraintes (à déformation imposée) ou sous-estimer les déformations (à contrainte imposée). Il semble donc pertinent d'avertir l'utilisateur si, lorsqu'il a utilisé des lois de Von Mises à écrouissage isotrope, il risque d'obtenir des résultats faux quand la décharge devient trop importante (ne reste donc pas dans le domaine d'élasticité initial). Cela peut lui indiquer qu'il faut utiliser des lois de comportement avec écrouissage cinématique (VMIS_CINE_LINE, VMIS_ECMI*, VMIS_CIN1_CHAB, etc..).

2 Indicateurs locaux

Le but de ces indicateurs est de cerner les zones de la structure où, à un instant particulier, se produit soit une décharge ou une perte de radialité du champ de contraintes. Ils sont produits en post-traitement d'un calcul statique ou dynamique, 2D ou 3D, utilisant une loi de comportement élastique ou non. Ils se présentent sous la forme de champs de scalaires dont le dépouillement peut être effectué en traçant leurs isovaleurs par un post-processeur graphique.

2.1 Indicateurs de décharge

2.1.1 Indicateur local de décharge totale

Cet indicateur mesure au point M et entre l'instant t et $t+\Delta t$, la variation relative de la norme des contraintes au sens de Von Misès. Il s'écrit formellement : $I_1=\frac{\|\boldsymbol{\sigma}(M,t+\Delta t)\|-\|\boldsymbol{\sigma}(M,t)\|}{\|\boldsymbol{\sigma}(M,t+\Delta t)\|}$.

Cette quantité est négative en cas de décharge locale au point M. La norme $\|\boldsymbol{\sigma}(M,t)\|$ peut s'écrire de quatre façons différentes suivant le choix du modélisateur :

1) $\|\boldsymbol{\sigma}(M,t)\|=\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^D.\boldsymbol{\sigma}^D}$, où $\boldsymbol{\sigma}^D$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes (cette norme est utile en plasticité avec écrouissage isotrope).
2) $\|\boldsymbol{\sigma}(M,t)\|=\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}}$, où l'on considère la totalité du tenseur des contraintes afin de détecter par exemple les diminutions de pression hydrostatique.
3) $\|\boldsymbol{\sigma}(M,t)\|=\sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}^D-\boldsymbol{X}).(\boldsymbol{\sigma}^D-\boldsymbol{X})}$, avec $\boldsymbol{X}$ le tenseur de la contrainte de rappel dans le cas d'une loi élastoplastique avec un écrouissage cinématique.
4) $\|\boldsymbol{\sigma}(M,t)\|=\sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{X}).(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{X})}$

2.1.2 Indicateur local de décharge élastoplastique

Cet indicateur permet de savoir si la décharge reste élastique ou s'il y aurait un risque de plastification si on utilisait un écrouissage cinématique pur. C'est un indicateur « extrême », sachant que, pour les métaux, les écrouissages isotropes et cinématiques sont tous deux présents.

L'option DERA_ELGA calcule donc (en plus des composantes DCHA_V et DCHA_T) les composantes :

I_decha=IND_DCHA :
- IND_DCHA=0 valeur initiale sans contrainte.
- IND_DCHA=1 si charge élastique
- IND_DCHA=2 si charge plastique
- IND_DCHA=-1 si décharge élastique licite (quelque soit le type d'écrouissage)
- IND_DCHA=-2 si décharge abusive (on aurait plastifié avec un écrouissage cinématique).

VAL_DCHA : indique le proportion de sortie du critère (voir plus loin).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le fonctionnement est le suivant : pour les lois VMIS_ISOT* seulement en chaque point d'intégration, à chaque instant t, à partir du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(t)$, de la déformation plastique équivalente cumulée $\boldsymbol{p}(t)$, et de la courbe d'écrouissage isotrope $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}(t))$,

- Initialisation : IND_DCHA=0, VAL_DCHA=0.
- tant que $p(t)=0$, IND_DCHA=1 (élasticité),
- si IND_DCHA=-2 (critère de décharge abusive atteint), on ne fait plus rien
- si $\Delta p(t)>0$:
  - si on est en charge, donc si l'angle entre le tenseur accroissement de contraintes et le tenseur contraintes totale est « petit » : , $\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t-\Delta t)\cdot\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t-\Delta t)\|\|\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|}>0$ IND_DCHA=2 ; (points entre A et B sur la figure 2.1.2-a).
  - si on est en décharge, IND_DCHA=-2 (cas rare : cela signifie qu'en un pas de temps, on franchit la surface de charge dans une direction éloignée de celle du pas précédent)
- si $\Delta p(t)=0$:
  - si IND_DCHA>-1, on calcule le tenseur $\boldsymbol{X}$ (centre du domaine d'élasticité si on était en cinématique pur, donc si la surface de charge initiale, représentée par un cercle dans le plan déviateur, s'était translatée jusqu'au point courant) par :
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\sigma}(t)\frac{R(p)-R(0)}{R(p)}$$
  - si IND_DCHA=-1, on utilise le tenseur $\boldsymbol{X}$ déjà calculé.
  - on calcule le critère "cinématique" $(\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{X})_{eq}\leq R(0)$
  - Si ce critère est vérifié, alors la décharge serait élastique aussi avec un écrouissage cinématique, elle est donc « licite » : IND_DCHA=-1 (tout point entre B et E sur la figure 2). Pour appliquer le critère au prochain instant, on stocke $\boldsymbol{X}$ (6 composantes)
    - sinon, IND_DCHA=-2 et garde cette valeur (car la suite du calcul serait modifiée si l'écrouissage était cinématique). (points entre E et F, ou entre C et C' sur la figure suivante). VAL_DCHA$=\frac{\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{X}\|}{R_0}$

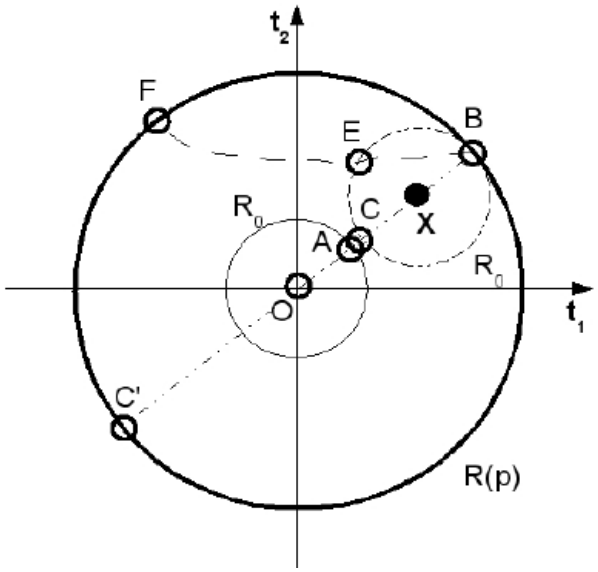


Figure 2.1.2-a : indicateur de décharge élastoplastique

- **Commentaires** :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- L'inconvénient de cette méthode vient de ce qu'elle n'est pas systématique : il faut que l'utilisateur « pense » à appeler l'option DERA_ELGA.
- Le critère obtenu est relativement sévère : il suppose que l'on remplace l'écrouissage isotrope pur par un écrouissage cinématique pur. Une possibilité d'évolution consisterait à définir un rayon de surface seuil plus grand que R_0 .

2.2 Indicateurs de perte de radialité

2.2.1 Indicateur local de radialité du chargement

Cet indicateur mesure au point M et entre l'instant t et $t+\Delta t$, la variation de la direction des contraintes. Il s'écrit :

$I_2=1-\frac{|\boldsymbol{\sigma}(M,t).\Delta\boldsymbol{\sigma}|}{\|\boldsymbol{\sigma}(M,t)\|\|\Delta\boldsymbol{\sigma}\|}$, où le produit scalaire « . » est associé à l'une des quatre normes précédentes. Cette quantité est nulle lorsque la radialité est conservée durant l'incrément de temps. Ce critère peut aussi être interprété comme la quantité $1-\cos(\theta)$, où θ est l'angle entre $\boldsymbol{\sigma}$ et $\Delta\boldsymbol{\sigma}$. Cet indicateur à valeur réelle évolue entre 0 pour les chargements radiaux et 2. Il est utile en particulier pour déterminer la validité d'une solution élasto-plastique en mécanique de la rupture,

2.2.2 Indicateur d'erreur due à la discrétisation temporelle

Il fournit une m esure de l'erreur η due à la discrétisation en temps, directement reliée à la rotation de la normale à la surface de charge. On calcule l'angle entre $\boldsymbol{n}^-$, la normale au critère de plasticité au début du pas de temps (instant t-), et $\boldsymbol{n}^+$, la normale au critère de plasticité calculée à la fin du pas de temps de la façon suivante : $I_\eta=\frac{1}{2}\|\Delta\boldsymbol{n}\|=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{n}^+-\boldsymbol{n}^-\|=\left|\sin(\frac{\alpha}{2})\right|$. Cet indicateur est directement liée à la norme de la variation de la normale au convexe de plasticité (ceci peut se généraliser facilement à toute loi élastoplastique à écoulement normal), et elle peut également s'interpréter comme le sinus de la moitié de l'angle les deux normales.Cela fournit une mesure de l'erreur (voir [4]). Ce critère est opérationnel pour les comportements élastoplastiques de Von Mises à écrouissage isotrope, cinématique linéaire et mixte. Il peut être utilisé pour piloter la subdivision automatique du pas de temps.

3 Indicateurs globaux

Ces indicateurs sont destinés à détecter si, au cours de l'histoire de la structure et jusqu'à l'instant actuel t , et pour une zone de la structure choisie par le modélisateur, il y a eu perte de proportionnalité du chargement (ces indicateurs laissent donc une trace de l'histoire contrairement aux indicateurs locaux qui sont instantanés). Ils sont uniquement utilisables dans le cadre d'un comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope (en 2D ou 3D).

3.1 Indicateur sur les paramètres de plasticité

Cette quantité permet, dans le cas de la plasticité de Von Mises avec écrouissage isotrope, d'une part de savoir (en moyenne sur une zone Ω_S du domaine Ω) si les contraintes et les déformations plastiques ont les mêmes directions et si le seuil plastique est atteint à l'instant actuel, et d'autre part si au cours de l'histoire la déformation plastique a changé de direction. Cette quantité s'écrit :

$$I_3=\frac{1}{\Omega_S}\int_{\Omega_s}\left(1-\frac{|\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\varepsilon}^p|}{(\sigma_Y+R(p))p}\right)d\Omega ,$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où σ_Y est le seuil plastique initial, R l'extension de la surface de charge liée à l'écrouissage et p la déformation plastique cumulée. Le produit scalaire est associé à la norme au sens de Von Misès. Cet indicateur est normalisé et a une valeur comprise entre zéro et un. Il est nul si le chargement a conservé son caractère proportionnel en chaque point de Ω_S tout au long de l'histoire écoulée.

Remarque 1 :

L'indicateur n'est pas affecté si au cours de l'histoire, il y a eu des décharges puis des recharges élastiques sans changement de direction des contraintes lorsque l'on revient sur le seuil (cf. [Figure 3.1-a]).

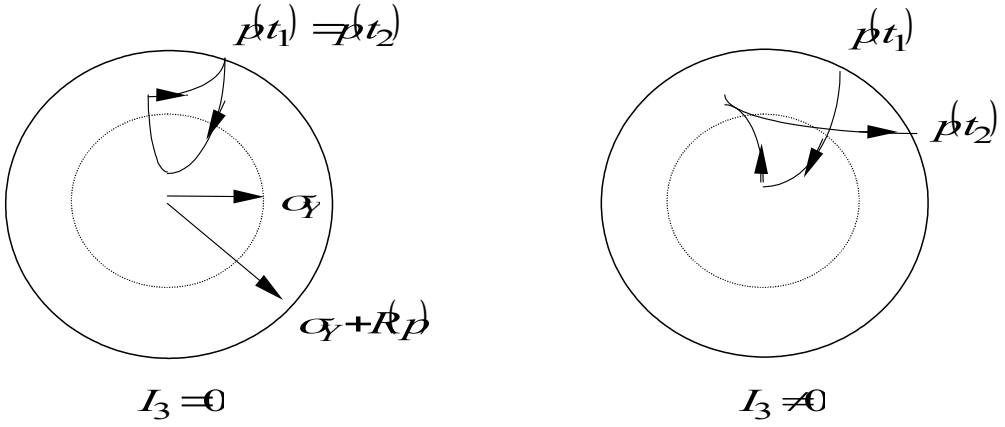


Figure 3.1-a : Chemin de chargement entre t_1 et t_2 dans le plan déviatorique des contraintes

Remarque 2 :

Dans la formulation de cet indicateur interviennent trois ingrédients liés à la plasticité :

- *l'écart entre la direction des contraintes et des déformations plastiques actuelles ($\sigma . \varepsilon^p \neq \|\sigma\| \|\varepsilon^p\|$),*
- *la position des contraintes par rapport au seuil actuel ($\|\sigma\| \leq (\sigma_Y + R(p))$),*
- *l'écart entre la norme de la déformation plastique actuelle et la déformation plastique cumulée ($\|\varepsilon^p\| \neq p$).*

Une perte de proportionnalité a pu se produire au cours de l'histoire sans que l'indicateur ne le détecte par l'intermédiaire des deux premiers ingrédients (c'est-à-dire que l'on peut avoir en fin de chargement coïncidence des directions des contraintes et des déformations plastiques et être sur le seuil plastique). En revanche, on aura , $\|\varepsilon^p\| \neq p$ et l'indicateur sera obligatoirement supérieur à zéro, par conséquent l'utilisateur sera averti de la perte de proportionnalité.

Remarque 3 :

Si l'indicateur détecte obligatoirement une perte de proportionnalité dans une zone, dans la pratique il faut que cette dernière contienne suffisamment de points matériels à chargement non proportionnel. En effet, si l'on choisit une zone très vaste avec peu de points concernés, la normalisation de l'indicateur effectuée avec la division par le volume de la zone implique un certain « écrasement » vers zéro de la valeur de la quantité. Typiquement, pour une structure contenant un défaut source de non proportionnalité, on a intérêt à choisir une zone d'intégration Ω_S entourant le défaut avec un faible voisinage afin d'obtenir une valeur significative de l'indicateur.

3.2 Indicateur énergétique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cet indicateur a la même fonction que le précédent, mais est fondé sur la densité d'énergie. Il s'écrit :

$$I_4=\frac{1}{\Omega_S}\int_{\Omega_s}(1-\frac{\psi}{\omega})d\Omega\ ,$$

où ω est la densité d'énergie de déformation définie par : $\omega(t)=\int_0^t \boldsymbol{\sigma}.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,d\tau$, et ψ est la densité d'énergie élastique associée à la courbe de traction si on considérait le matériau élastique non linéaire. Plus précisément, cette quantité s'écrit :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(t))=\frac{1}{2}Ktr^2(\boldsymbol{\varepsilon})+\frac{2\mu}{3}\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2,\ \text{si}\ \|\boldsymbol{\sigma}\|<\left(\sigma_Y+R(p)\right),$$
$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(t))=\frac{1}{2}Ktr^2(\boldsymbol{\varepsilon})+\frac{R^2(P)}{6\mu}+\int_0^P R(q)dq\ ,\ \text{si}\ \|\boldsymbol{\sigma}\|=\left(\sigma_Y+R(p)\right),$$

avec K le module de compressibilité, μ le coefficient de cisaillement de Lamé, R le seuil de la courbe de traction associé à la norme de la déformation plastique $P=\|\boldsymbol{\varepsilon}^p\|$ (celui-ci peut être différent du vrai seuil plastique, car $P\neq p$ si le chargement est non proportionnel). Cet indicateur est également normalisé entre 0 et 1. Il est nul pour un chargement ayant toujours gardé son caractère proportionnel $(\psi\neq\omega)$.

4 Fonctionnalités et vérification

Les indicateurs présentés ici sont utilisables en post-traitement d'un calcul mécanique et sont disponibles pour les éléments finis des milieux continus en 2D (mode de déformations planes, contraintes planes ou axisymétrique, mailles triangulaires ou quadrangulaires) ou 3D (mailles hexaédriques, tétraédriques, pentaédriques ou pyramides). Les éléments filaires, poutres, plaques et coques sont exclus de cette application.

4.1 Indicateurs locaux

Ces indicateurs sont accessibles après un calcul statique ou dynamique quelle que soit la loi de comportement du matériau. L'opérateur CALC_CHAMP présente les options 'DERA_ELGA' et 'DERA_ELNO' pour l'indicateur de décharge I_1 et l'indicateur de perte de radialité I_2 évalués aux nœuds ou aux points de Gauss de l'élément [2]. Dans le cas général, les deux premières normes décrites au paragraphe 2.1 sont calculées, les deux dernières n'étant utilisées que si l'on a réalisé au préalable un calcul élastoplastique avec écrouissage cinématique.

Les composantes du champ ainsi calculé sont :

- DCHA_T : l'indicateur de décharge I_1 calculé à partir du tenseur des contraintes ;
- DCHA_V : l'indicateur de décharge I_1 calculé à partir du déviateur des contraintes ;
- IND_DCHA : l'indicateur de décharge I_{decha}
  - IND_DCHA=0 valeur initiale sans contrainte
  - IND_DCHA=1 si charge élastique
  - IND_DCHA=2 si charge plastique
  - IND_DCHA=-1 si décharge élastique licite (quelque soit le type d'écrouissage)
  - IND_DCHA=-2 si décharge abusive (on aurait plastifié avec un écrouissage cinématique).
- VAL_DCHA : l'indicateur de la proportion de sortie du critère
- RADI_V : l'indicateur de perte de radialité I_2 calculé à partir du déviateur des contraintes.
- ERR_RADI: l'indicateur d'erreur I_η due à la discrétisation temporelle

Ces indicateurs sont vérifiés par les cas tests suivants :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

SSNP111	Passage des points de Gauss aux nœuds sur des éléments quadratiques	[V6.03.111]
SSNP14	Plaque en traction-cisaillement - Von Mises (Écrouissage cinématique)	[V6.03.014]
SSNP15	Plaque en traction-cisaillement - Von Mises (écrouissage isotrope)	[V6.03.015]

4.2 Indicateurs globaux

Ces indicateurs ne sont accessibles qu'après un calcul élastoplastique avec écrouissage isotrope. L'opérateur POST_ELEM présente les options 'INDIC_SEUIL' et 'INDIC_ENER' correspondant respectivement aux indicateurs globaux I_3 et I_4. Ceux-ci sont évalués sur un groupe de maille précédemment défini par l'utilisateur (par exemple par la commande DEFI_GROUP).

Ces indicateurs sont vérifiés par les cas tests suivants :

HSNV100i	Thermoplasticité en traction simple	[V7.22.100]
SSNP15	Plaque en traction-cisaillement - Von Mises (écrouissage isotrope)	[V6.03.015]

5 Bibliographie

[1] J. LEMAITRE, J.-L.CHABOCHE, Mécanique des matériaux solides, Dunod 1985.

[2] Manuel d'Utilisation de *Code_Aster*. Document [U4.61.02].

[3] CR-AMA-11.035 : « Projet LOCO - lot B2 - Indicateurs locaux de décharge et de radialité » A.Foucault , 24/01/2011

[4] CR-AMA-11.30 « Etude d'un critère de radialité » J.M.Proix

6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
4	*G. DEBRUYNE (EDF/IMA/MMN)*	Texte initial
11.1	J.M.PROIX EDF/R&D/AMA	Ajout des nouveaux indicateurs de décharge.
11.2	J.M.PROIX EDF/R&D/AMA	Ajout d'un nouveau critère de radialité.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)