Estimateur d'erreur de ZHU-ZIENKIEWICZ

Résumé :

On expose dans ce document la méthode d'estimation de l'erreur de discrétisation proposée par ZHU-ZIENKIEWICZ.

Cet estimateur s'appuie sur un lissage continu des contraintes calculées permettant d'obtenir une meilleure précision sur les contraintes nodales par rapport aux méthodes standards.

Deux versions successives de cet estimateur sont décrites, correspondant chacune à un lissage différent.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Principe de la méthode....4
2.1 Équations à résoudre....4
2.2 Estimateur d'erreur et indice d'effectivité....5
2.3 Construction d'un estimateur asymptotiquement exact....6
3 Construction du champ de contraintes recalculées....7
3.1 Version 1987....7
3.2 Version 1992....7
4 Implantation dans Code_Aster et limites actuelles d'utilisation....11
4.1 Implantation dans Code_Aster....11
4.2 Limites d'utilisation....11
5 Bibliographie....12
6 Description des versions du document....12

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

La recherche en matière d'estimateurs d'erreur sur les solutions obtenues par calculs éléments finis et leur couplage avec des procédures de maillage adaptatif a connu ces dernières années un essor considérable. Le but visé est de pallier l'éventuelle inadéquation d'une modélisation en adaptant d'une façon automatique le maillage à la solution cherchée suivant certains critères (équirépartition de l'erreur de discrétisation, minimisation du nombre de noeuds pour atteindre une précision donnée, moindre coût).

On présente ici un estimateur d'erreur de type a posteriori dans le cadre de l'élasticité linéaire et homogène. Historiquement, cet estimateur, proposé par ZHU-ZIENKIEWICZ [bib1] en 1987, a été largement utilisé du fait de sa facilité d'implantation dans les codes de calculs existants et de son faible coût. Néanmoins, la mauvaise fiabilité de cet estimateur pour les éléments de degré pair a été constatée empiriquement (sous-estimation de l'erreur) et a conduit les auteurs à une modification de leur méthode en 1992 [bib2], [bib3] avec vérification numérique de la convergence asymptotique de l'estimateur sur tous les types d'éléments.

Néanmoins, le domaine d'application de la version de 1992 étant pour le moment plus réduit (voir [3.2]), les deux versions de cet estimateur ont été implantées dans *Aster* et font l'objet de cette note.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Principe de la méthode

2.1 Équations à résoudre

On considère la solution (u, s) d'un problème élastique linéaire vérifiant :

- les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \mathbf{Lu} = \boldsymbol{q} \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_t \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{L} = {}^t\boldsymbol{BDB}$ opérateur de l'élasticité

- les équations de compatibilité :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bu} \\ \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{sur} \quad \Gamma_u \end{cases}$$

avec $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$

- la loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

Le problème discrétisé par éléments finis consiste à trouver $(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)$ solution de :

$$\boldsymbol{u}_h = N\,\bar{\boldsymbol{u}}_h \qquad \text{éq 2.1-1}$$

vérifiant $\boldsymbol{K}\,\bar{\boldsymbol{u}}_h = \mathbf{f}$

avec
$$\boldsymbol{K} = \int_\Omega {}^t(\boldsymbol{BN})\,\boldsymbol{D}\,(\boldsymbol{BN})\,d\Omega$$
$$\mathbf{f} = \int_\Omega {}^t\boldsymbol{N}\boldsymbol{q}\,d\Omega + \int_{G_t} {}^t\boldsymbol{N}\,\bar{t}\,dG$$

où :

$\bar{\mathbf{u}}_h$ représente les inconnues nodales de déplacement
$\boldsymbol{N}$ les fonctions de forme associées

Les contraintes sont calculées à partir des déplacements par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \boldsymbol{DBu}_h \qquad \text{éq 2.1-2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Estimateur d'erreur et indice d'effectivité

On note $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h$ l'erreur sur les déplacements
$\boldsymbol{e}_s=\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_h$ l'erreur sur les contraintes

La norme de l'énergie de l'erreur e s'écrit :

$$\|\mathbf{e}\|=\left(\int_\Omega {}^t\mathbf{e}\mathbf{L}\mathbf{e}\, d\,\Omega\right)^{1/2}$$

dans le cas de l'élasticité

$$=\left(\int_\Omega {}^t\mathbf{e}_\sigma\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{e}_\sigma\, d\,\Omega\right)^{1/2} \qquad \text{éq 2.2-1}$$

L'erreur globale ci-dessus se décompose en une somme d'erreurs élémentaires suivant :

$$\|\mathbf{e}\|^2=\sum_{i=1}^{N}\|\mathbf{e}\|_i^2$$

où N est le nombre total d'éléments.
$\|\mathbf{e}\|_i$ représente l'indicateur local d'erreur sur l'élément i.

Le but est d'estimer l'erreur exacte à partir de l'équation [éq 2.2-1] formulée en contraintes. L'idée de base de la méthode est de construire un nouveau champ de contraintes noté $\boldsymbol{\sigma}^*$ à partir de $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}$ et tel que :

$$\mathbf{e}_\sigma\approx\mathbf{e}_\sigma^*=\boldsymbol{\sigma}^*-\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}$$

L'estimateur d'erreur s'écrira alors :

$${}^0\|\mathbf{e}\|=\left(\int_\Omega {}^t\mathbf{e}_\sigma^*\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{e}_\sigma^*\, d\,\Omega\right)^{1/2}$$

La qualité de l'estimateur est mesurée par la quantité θ , appelée indice d'effectivité de l'estimateur :

$$\theta=\frac{{}^0\|\boldsymbol{e}\|}{\|\boldsymbol{e}\|}$$

Un estimateur d'erreur est dit asymptotiquement exact si $\theta\to 1$ quand $\|\boldsymbol{e}\|\to 0$ (ou quand $h\to 0$), ce qui veut dire que l'erreur estimée convergera toujours vers l'erreur exacte quand celle-ci décroitra.

De façon évidente, la fiabilité de ${}^0\|\boldsymbol{e}\|$ dépend de la "qualité" de σ^* .

Les deux versions de l'estimateur de ZHU-ZIENKIEWICZ se différencient à ce niveau (voir [§3]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Construction d'un estimateur asymptotiquement exact

La caractérisation d'un tel estimateur est fournie par le théorème suivant (voir [bib 2]).

Théorème

Si $\|\mathbf{e}^*\|=\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\|$ est la norme d'erreur de la solution reconstruite, alors l'estimateur d'erreur $^0\|\boldsymbol{e}\|$ défini précédemment est asymptotiquement exact
si $\frac{\|\mathbf{e}^*\|}{\|\mathbf{e}\|}\to 0$ quand $\|\boldsymbol{e}\|\to 0$

Cette condition est réalisée si le taux de convergence avec h de $\|\mathbf{e}^*\|$ est supérieur à celui de $\|\boldsymbol{e}\|$. Typiquement, si on suppose que l'erreur exacte de l'approximation élément fini converge en $\|\mathbf{e}\|=0\left(h^p\right)$

et l'erreur de la solution reconstruite en

$$\|\mathbf{e}^*\|=0\left(h^{p+\alpha}\right) \text{ avec } \alpha>0$$

alors un calcul simple donne :

$$1-0\left(h^\alpha\right)\le\theta\le 1+0\left(h^\alpha\right)$$

et donc $\theta\to 1$ quand $h\to 0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Construction du champ de contraintes recalculées

3.1 Version 1987

La solution $\mathbf{u_h}$ résultant de l'équation [éq 2.1-1] étant C_0 sur Ω (du fait du choix de fonctions de forme C_0), il s'ensuit que $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}$ calculée par [éq 2.1-2] est discontinue aux interfaces des éléments.

Pour obtenir des résultats acceptables sur les contraintes nodales, on recourt généralement à une moyenne aux nœuds ou à une méthode de projection. C'est cette dernière méthode qui est adoptée ici.

On suppose que $\boldsymbol{\sigma}^*$ est interpolée par les mêmes fonctions de forme que $\mathbf{u_h}$, soit :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = N\,\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \qquad \text{éq 3.1-1}$$

et on effectue un lissage global par moindres carrés de $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}$, ce qui revient à minimiser la fonctionnelle $J(\boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega {}^t(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h})(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h})\,d\Omega$ dans l'espace engendré par N.

Par dérivation, $\boldsymbol{\sigma}^*$ doit vérifier $\int_\Omega {}^t N\,(\boldsymbol{\sigma}^*-\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h})\,d\Omega = 0$

en utilisant l'équation [éq 3.1-1], on obtient le système linéaire :

$$\mathbf{M}\,[\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*] = [\mathbf{b}]$$

avec $\mathbf{M} = \int_\Omega {}^t\mathbf{N}\mathbf{N}\,d\Omega$ et $[\mathbf{b}] = \int_\Omega {}^t\mathbf{N}\,\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}\,d\Omega$

Ce système global est à résoudre sur chacune des composantes du tenseur des contraintes. La matrice M est calculée et inversée une seule fois.

3.2 Version 1992

La contrainte du champ $\boldsymbol{\sigma}^*$ diffère par rapport à la version 1987 de la façon suivante :

on suppose $\boldsymbol{\sigma}^*$ polynômial de même degré que les déplacements sur l'ensemble des éléments possédant un noeud sommet interne S en commun.

On note $S_K = \bigcup_{S\in K} K$ cet ensemble appelé patch.

Pour chaque composante de $\boldsymbol{\sigma}^*$, on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^*|_{S_K} = \mathbf{P}\mathbf{a}_s \qquad \text{éq 3.2-1}$$

où $\mathbf{P}$ contient les termes polynômiaux appropriés

$\mathbf{a}_\mathbf{s}$ les coefficients inconnus des monômes correspondants

Exemple : $2D$ $\quad P1\quad \mathbf{P}=[1,x,y]\quad \mathbf{a_s}^t=[a_1,a_2,a_3]$

$$\text{Q1}\quad \mathbf{P}=[1,x,y,xy]\qquad \mathbf{a_s}={}^t[a_1,a_2,a_3,a_4]$$

La détermination des coefficients du polynôme $\mathbf{a}_\mathbf{s}$ se fait en minimisant la fonctionnelle :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{h}}(x_i, y_i) - \boldsymbol{\sigma}^{*}|_{S_K}(x_i, y_i) \right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{h}}(x_i, y_i) - \mathbf{P}(x_i, y_i)\,\mathbf{a_s} \right)^2$$

(lissage local discret de $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{h}}$ par moindres carrés)

où (x_i, y_i) sont les coordonnées des points de GAUSS sur S_K.
N est le nombre total de points de GAUSS sur tous les éléments du patch

La solution $\mathbf{a_s}$ vérifie :

$$\sum_{i=1}^{N} {}^{t}\mathbf{P}(x_i, y_i)\,\mathbf{P}(x_i, y_i)\,\mathbf{a_s} = \sum_{i=1}^{N} {}^{t}\mathbf{P}(x_i, y_i)\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{h}}(x_i, y_i)$$

d'où $\mathbf{a_s} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ avec $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N} {}^{t}\mathbf{P}(x_i, y_i)\,\mathbf{P}(x_i, y_i)$

A peut être très mal conditionnée (notamment sur les éléments de haut degré) et par suite, impossible à inverser sous cette forme. Pour remédier à ce problème, les auteurs [bib4] ont proposé une normalisation des coordonnées sur chaque patch, ce qui revient à effectuer le changement de variables :

$$\bar{x} = -1 + 2\,\frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$
$$\bar{y} = -1 + 2\,\frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}$$

où $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$ représentent les valeurs minimum et maximum de x et y sur le patch.

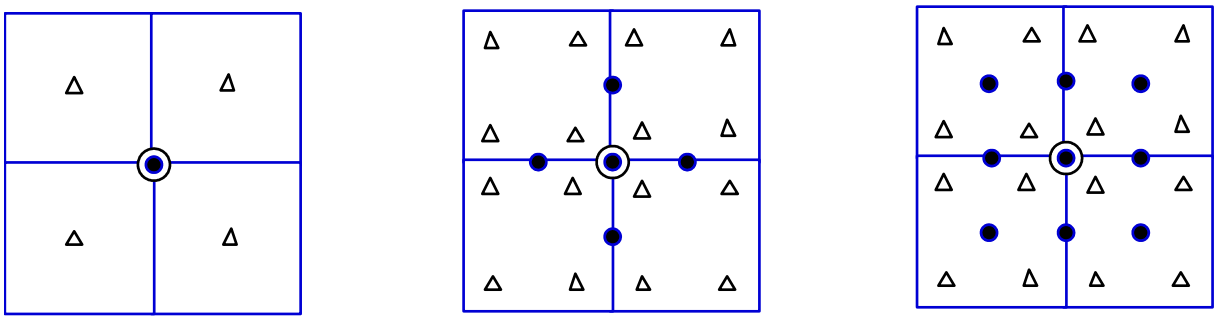
Cette méthode améliore notablement le conditionnement de A et supprime totalement le problème précédent.

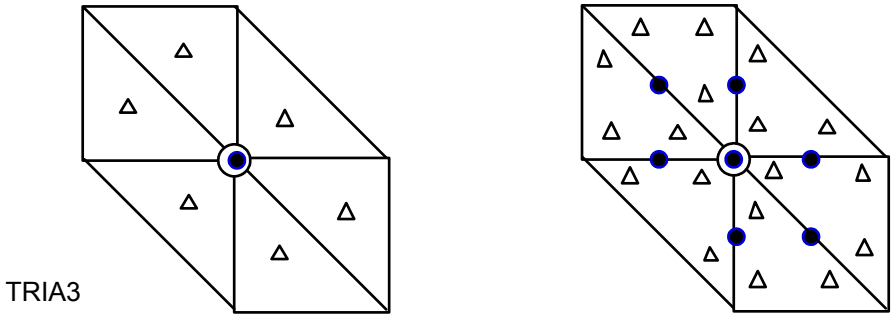
Une fois $\mathbf{a_s}$ déterminé, les valeurs nodales sont déduites d'après l'équation [éq 3.2-1] seulement sur les nœuds internes au patch, sauf dans le cas de patchs ayant des nœuds de bord.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Patchs internes :

QUAD4 QUAD8 QUAD9





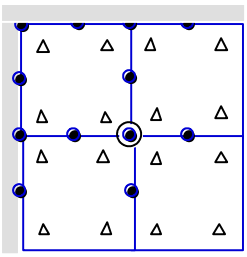
TRIA3 TRIA6

△ points de GAUSS où sont calculées les contraintes σ_h suivant l'équation [éq 2.1-2]

nœuds de calcul de σ^* σ^*

sommet interne définissant le patch

Patchs bords :



Les valeurs nodales aux nœuds milieux appartenant à 2 patchs sont moyennées, de même pour les nœuds internes dans le cas des QUAD9.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque :

> *Dans le cas d'éléments finis de type différent, le choix de P dans l'équation [éq 3.2 -1] est délicat (problèmes de validité de a_s si l'espace est trop riche, perte de super-convergence s'il ne l'est pas assez). Une étude plus approfondie semble indispensable.*
>
> *C'est pourquoi l'estimateur $ZZ2$ est limité pour le moment à des maillages ne comportant qu'un seul type d'élément. Cette restriction n'existe pas pour $ZZ1$.*

Les auteurs ont montré numériquement [bib3] qu'avec ce choix de $\boldsymbol{\sigma}^*$, leur estimateur était asymptotiquement exact pour des matériaux élastiques dont les caractéristiques sont indépendantes du domaine et pour tous les types d'éléments et que les taux de convergence avec h de $\|\mathbf{e}^*\|$ étaient améliorés par rapport à la version précédente (surtout pour les éléments de degré 2 : voir cas test SSLV110 Manuel de Validation), d'où une meilleure estimation de l'erreur.

On trouvera une illustration de ces taux de convergence dans la référence [bib 5].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Implantation dans *Code_Aster* et limites actuelles d'utilisation

4.1 Implantation dans *Code_Aster*

Les deux estimateurs précédents sont implantés dans *Code_Aster* dans la commande de post-traitement CALC_ERREUR [U4.81.04]. Ils sont activés à partir d'options (ERZ1_ELEM pour ZZ1 et ERZ2_ELEM pour ZZ2) et enrichissent une structure de données RESULTAT.

De plus, le calcul du champ de contraintes lissées par l'une ou l'autre des méthodes décrites au [paragraphe 3] peut être déclenché séparément du calcul d'estimation de l'erreur (option SIZ1_NOEU pour ZZ1 et SIZ2_NOEU pour ZZ2).

L'estimateur d'erreur fournit :

- un champ par élément comportant 3 composantes :
  - l'estimation de l'erreur relative sur l'élément,
  - l'estimation de l'erreur absolue sur l'élément,
  - la norme de l'énergie de la solution calculée σ_h .
- des sorties-listing comportant les mêmes informations au niveau global (sur toute la structure)

Tous les champs obtenus sont visualisables via la commande IMPR_RESU.

4.2 Limites d'utilisation

Le cadre théorique est l'élasticité linéaire homogène

Pour ZZ1, les modélisation 2D (contraintes et déformations planes, axisymétrique) et 3D sont permises alors que pour ZZ1, seules les modélisation 2D (contraintes et déformations planes, axisymétrique) sont permises.

Types d'éléments : triangles à 3 et 6 nœuds,
quadrangles à 4, 8 et 9 nœuds.

Pour ZZ2, le maillage ne doit comporter qu'un seul type d'éléments.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Bibliographie

1) ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z. : "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis" - Int. Journal for Num. Met. in Eng., vol 24 (1987).

2) ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z. : "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates - Part 1 : the recovery technique" - Int. Journal for Num. Met. in Eng., vol 33, 1331-1364 (1992)

3) ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z. : "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates - Part 2 : error estimates and adaptivity" - Int. Journal for Num. Met. in Eng., vol 33, 1365-1382 (1992)

4) ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., WU J. : "Superconvergent patch recovery techniques - Some further tests" - Comm. in Num. Met. in Eng., vol 9, 251-258 (1993)

5) DESROCHES X. : “Estimateurs d’erreur en élasticité linéaire” - Note HI-75/93/118.

6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
02/06/09	***X. DESROCHES*** *(EDF/IMA/MMN)*	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)