Homogénéisation d'un réseau de poutres baignant dans un fluide

Résumé :

Cette note décrit un modèle obtenu par une méthode d'homogénéisation pour caractériser le comportement vibratoire d'un réseau périodique de tubes baignés par un fluide incompressible. Ensuite le développement d'un élément fini associé à ce modèle homogénéisé est présenté.

Les tubes sont modélisés par des poutres d'Euler et le fluide par un modèle à potentiel.

Cette modélisation est accessible dans la commande AFFE_MODELE en choisissant la modélisation 3D_FAISCEAU.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Problème physique initial....3
2.1 Description du problème....3
2.2 Hypothèses de modélisation....4
3 Problème homogénéisé....5
3.1 Problème homogénéisé obtenu....5
3.2 Problème matriciel....7
4 Résolution du problème cellulaire....8
4.1 Problème à résoudre....8
4.2 Problème équivalent pour définir....9
4.3 Mise en pratique dans le Code_Aster....10
5 Choix de l'élément fini pour le problème homogénéisé....10
5.1 Choix des éléments finis....10
5.2 Éléments finis de référence....11
5.2.1 Maille HEXA8....11
5.2.2 Maille HEXA20....12
5.3 Choix des points de Gauss....14
5.4 Ajout des problèmes de traction et de torsion....14
5.4.1 Problème de traction....14
5.4.2 Problème de torsion....15
5.5 Intégration dans le Code_Aster de cet élément fini....15
6 Utilisation dans Code_Aster....16
6.1 Les données nécessaires....16
6.2 Orientation des axes des poutres....16
6.3 Calcul modal....16
7 Caractérisation du spectre du modèle homogénéisé....17
7.1 Modèle hétérogène....17
7.2 Modèle homogène....18
7.2.1 Problème continu....18
7.2.2 Problème discrétisé....18
8 Conclusion....19
9 Bibliographie....20
10 Description des versions du document....20

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Dans l'industrie nucléaire, certaines structures sont constituées de réseaux quasi-périodiques de tubes baignés par des fluides : les assemblages « combustibles », les générateurs de vapeur, ... Pour déterminer le comportement vibratoire de telles structures, l'approche classique (chaque tube est modélisé, le volume occupé par le fluide est maillé) est chère et fastidieuse voire impraticable (en particulier, élaboration d'un maillage compliqué contenant un grand nombre de noeuds). Les structures étudiées présentant un caractère quasi-périodique, il semble intéressant d'utiliser des méthodes d'homogénéisation.

Des techniques d'homogénéisation appliquées à un réseau de tubes baignés par un fluide ont été à diverses reprises déjà élaborées [bib1], [bib5], [bib4]. Les modèles obtenus diffèrent par les hypothèses effectuées sur le fluide (compressibilité, vitesse initiale de l'écoulement, viscosité). Selon les hypothèses admises, l'action du fluide sur le réseau de tubes correspond à une masse ajoutée (baisse des fréquences de vibration par rapport à celles déterminées en absence de fluide), à un amortissement ajouté voire à une rigidité ajoutée [bib5].

Au début, des éléments finis associés à des modèles bidimensionnels (réseau de masselottes baignées par un fluide) ont été élaborés [bib2]. Pour étudier les problèmes tridimensionnels (réseau de tubes), une solution à consister à projeter le mouvement sur le premier mode de flexion des poutres [bib4]. Ultérieurement, des éléments finis tridimensionnels ont été développés [bib3], [bib8].

2 Problème physique initial

2.1 Description du problème

On considère un ensemble de poutres identiques, d'axe z, disposées périodiquement (soit ε la période d'espace). Ces poutres sont situées à l'intérieur d'une enceinte remplie de fluide (voir [fig 2.1-a]). On souhaite caractériser le comportement vibratoire d'un tel milieu, en ne considérant pour l'instant que l'effet de masse ajoutée du fluide qui est prépondérant [bib6].

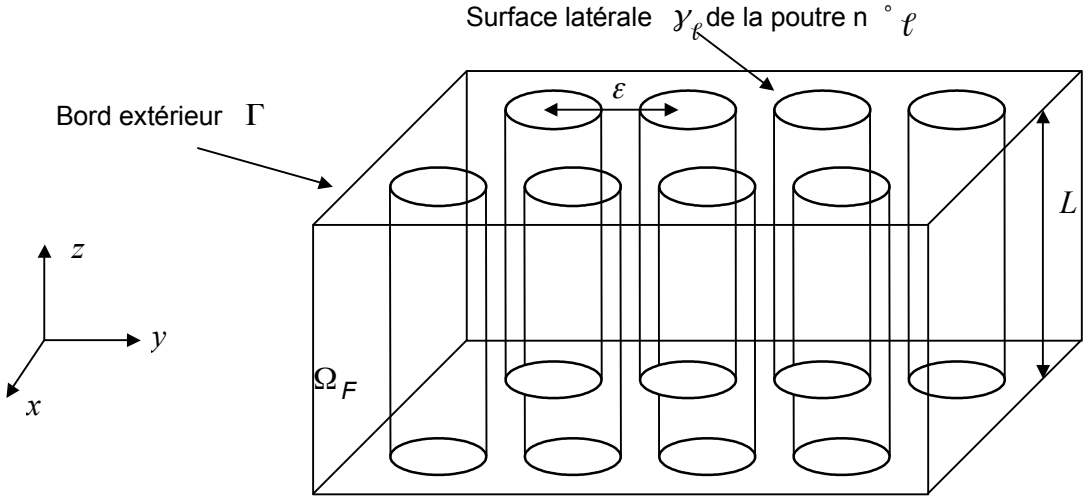


Figure 2.1-a

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Hypothèses de modélisation

On considère que le fluide est un fluide parfait initialement au repos, incompressible. Comme l'hypothèse des petits déplacements autour de la position d'équilibre a été effectué (fluide initialement au repos), le champ de déplacement des particules fluides est irrotationnel de sorte qu'il existe un potentiel de déplacement du fluide noté Φ. Il n'y a pas de flux de fluide à travers la surface extérieure Γ.

On considère que les poutres sont homogènes et à section constante suivant $z \in]0, L[$. Pour modéliser les poutres, le modèle d'Euler est utilisé et les mouvements de flexion sont seulement pris en compte. La section de poutre est rigide et le déplacement de tout point de la section est noté :

$\mathbf{s}^l$ la flexion de la poutre n° l $\left(\mathbf{s}^l(z) = \left(\mathbf{s}_x^l(z), \mathbf{s}_y^l(z)\right)\right)$.

Les poutres sont encastrées à leurs deux extrémités.

La forme variationnelle du problème fluide-structure vibro-acoustique (conservation de la masse, équation dynamique de chaque tube) s'écrit :

$$\int_{\Omega_F} \nabla \Phi . \nabla \Phi^* = \sum_l \int_{\gamma_l} \left(\mathbf{s}^l \cdot \mathbf{n}\right) \Phi^* \qquad \forall \Phi^* \in V_\Phi \qquad \textbf{éq 2.2-1}$$

$$\int_0^L \rho_S S . \frac{\partial^2 \mathbf{s}^l}{\partial t^2} \cdot \mathbf{s}^{l*} + \int_0^L E\, \mathbf{I} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{s}^l}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{s}^{l*}}{\partial z^2} = -\int_0^L \left(\int_{\gamma_l} \rho_F \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{s}^{l*} \qquad \forall \mathbf{s}^{l*} \in V_s \qquad \textbf{éq 2.2-2}$$

avec :

$$V_s = \left(H_0^2(]0, L[)\right)^2 \text{ et } V_\Phi = H^1(\Omega_F)$$

où :

- $\mathbf{n}$ est la normale entrante à la poutre n° l,
- ρ_F est la densité du fluide constante dans tout le domaine,
- ρ_S est la densité du matériau constituant la poutre,
- S est la section de la poutre,
- E est le module d'Young,
- $\mathbf{I}$ est le tenseur d'inertie de la section de la poutre.

Le second membre de l'équation [éq 2.2-2] représente les efforts exercés sur la poutre par le fluide. La pression p du fluide est liée au potentiel de déplacement par : $p = -\rho_F \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$. De la même façon, le second membre de l'équation [éq 2.2-1] représente le flux de fluide induit par les mouvements des poutres. À la frontière de chaque poutre l on a : $\mathbf{s}^l \cdot \mathbf{n} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}$.

Cette formulation conduit à un système matriciel non symétrique, ce qui n'est pas très commode, en particulier lors de la recherche de modes de vibration.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Problème homogénéisé

3.1 Problème homogénéisé obtenu

Pour tenir compte du caractère périodique du milieu étudié, on utilise une méthode d'homogénéisation basée dans ce cas précis sur un développement asymptotique des variables intervenant dans le problème physique de départ. En ce qui concerne la démarche opératoire, on renvoie le lecteur aux références suivantes [bib2], [bib4], [bib5], [bib6]. On se contentera ici d'énoncer les résultats obtenus.

Dans le milieu homogénéisé Ω_0 (voir [fig 3.1-a]), les deux variables homogénéisées suivantes sont considérées : $\mathbf{s}_0$ (déplacement des poutres) et Φ_0 (potentiel de déplacements du fluide). Sous forme variationnelle, ces variables sont reliées par les équations de vibrations propres :

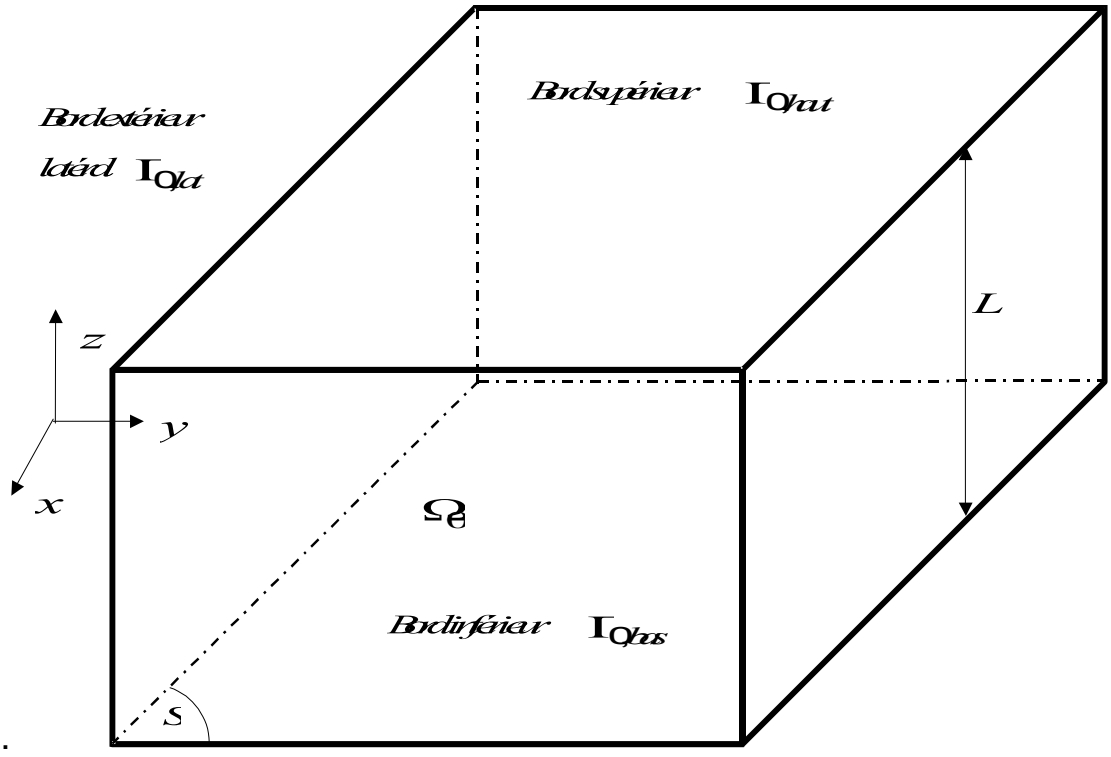
$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \mathbf{A} \,.\, \nabla \Phi_0 \,.\, \nabla \phi^* = -\int_{\Omega_0} \mathbf{D} \,.\, \mathbf{s}_0 \,.\, \phi^* & \forall\, \phi^* \in V_\Phi^{\hom} \\ \int_{\Omega_0} \mathbf{M} \,.\, \dfrac{\partial^2 \mathbf{s}_0}{\partial t^2}\, \mathbf{s}^* + \int_{\Omega_0} \mathbf{K} \,.\, \dfrac{\partial^2 \mathbf{s}_0}{\partial z^2}\, \dfrac{\partial^2 \mathbf{s}^*}{\partial z^2} = \rho_F \int_{\Omega_0} \mathbf{D} \,.\, \nabla \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} \,.\, \mathbf{s}^* & \forall\, \mathbf{s}^* \in V_s^{\hom} \end{cases} \qquad \textbf{éq 3.1-1}$$

où :

$$V_s^{\hom} = L^2\left(\Omega_0\right)^2 \times H_0^2\left(\Omega_0\right)^2$$

où $\Omega_0 = S \times]0, L[$

$$H_0^2\left(\Omega_0\right) = \left\{ v ;\ \forall (x,y) \in S \quad z \to v(x,y,z) \ \in\ H_0^2(]0,L[) \right\}$$



.

Figure 3.1-a

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

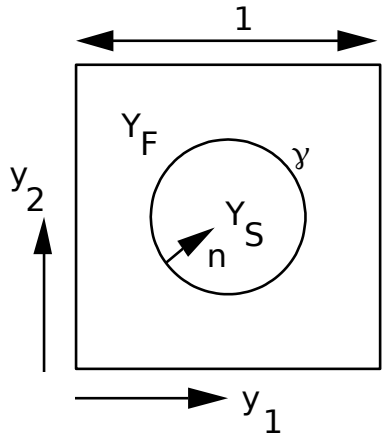


Figure 3.1-b

Les différents tenseurs qui interviennent dans [éq 3.1-1] sont définis à l'aide de deux fonctions de la $\chi_\alpha(\alpha=1,2)$ façon suivante :

$$\mathbf{B}=(b_{ij})=\frac{1}{|Y|}\begin{pmatrix}\int_{Y_F}\frac{\partial\chi_1}{\partial y_1} & \int_{Y_F}\frac{\partial\chi_1}{\partial y_2} & 0\\ \int_{Y_F}\frac{\partial\chi_2}{\partial y_1} & \int_{Y_F}\frac{\partial\chi_2}{\partial y_2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}=(a_{ij})=\left(\frac{|Y_F|}{|Y|}\delta_{ij}-b_{ij}\right) \qquad \textbf{éq 3.1-2}$$

$$\mathbf{D}=(d_{ij})=\mathbf{B}+\frac{1}{|Y|}\begin{pmatrix}Y_S & 0 & 0\\ 0 & Y_S & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}=(m_{ij})=\rho_F\mathbf{B}+\frac{\mu^2}{|Y|}\begin{pmatrix}\rho_S S & 0 & 0\\ 0 & \rho_S S & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \textbf{éq 3.1-3}$$

$$\mathbf{K}=(k_{ij})=\frac{E\mu^2}{|Y|}\begin{pmatrix}I_{xx} & I_{xy} & 0\\ I_{xy} & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

où $|Y_F|$ et $|Y_S|$ représentent respectivement les aires des domaines fluide et structure de la cellule élémentaire de référence (cf. [fig 3.1-b]). $|Y|$ représente la somme des deux aires précédentes. La cellule élémentaire de référence est homothétique de rapport μ à la cellule réelle de périodicité du milieu hétérogène.

Les deux fonctions $\chi_\alpha(\alpha=1,2)$ sont solutions d'un problème bidimensionnel, appelé problème cellulaire. Sur la cellule élémentaire de référence, les fonctions $\chi_\alpha(\alpha=1,2)$ sont définies par :

$$\int_{Y_F}\nabla\chi_\alpha.\nabla v=\int_\gamma n_\alpha.v \qquad \forall v\in V$$
$$\int_{Y_F}\chi_\alpha=0 \quad (\text{pour avoir une solution unique}) \qquad \textbf{éq 3.1-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où :

$$V = \{ v \in H_1(Y_F), \quad v(y) \text{ périodique en } y \text{ de période } 1 \}$$

Remarque :

On montre que la partie bidimensionnelle de $\mathbf{B}$ est symétrique et définie positive [bib5].

Remarque :

Dans la matrice $\mathbf{M}$, le terme $\rho_F \mathbf{B}$ joue le rôle d'une matrice de masse ajoutée propre à chaque poutre dans sa cellule.

Remarque :

Pour les différents tenseurs, on peut mettre en facteur le terme multiplicatif $\frac{1}{|Y|}$. Il a été rajouté afin d'obtenir la « bonne masse » de tubes en absence de fluide. On a alors $\int_{\Omega_0} \mathbf{M}\, dV$ = masse des tubes composant Ω_0.

3.2 Problème matriciel

En discrétisant le problème [éq 3.1-1] par éléments finis, on aboutit (avec des notations évidentes) au problème suivant :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}}\,\Phi_0 = -\hat{\mathbf{D}}\,\mathbf{s}_0 \\ \hat{\mathbf{M}}\,\dfrac{\partial^2 \mathbf{s}_0}{\partial t^2} + \hat{\mathbf{K}}\,\mathbf{s}_0 = \rho_F\,\hat{\mathbf{D}}^{\mathbf{T}}\,\dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} \end{cases} \qquad \textbf{éq 3.2-1}$$

ce qui peut se mettre sous la forme (on pré - multiplie la première équation par ρ_F) :

$$\tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{s}_0}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{M}} & -\rho_F\,\hat{\mathbf{D}}^{\mathbf{T}} \\ -\rho_F\,\hat{\mathbf{D}} & -\rho_F\,\hat{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{s}_0}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \textbf{éq 3.2-2}$$

Remarque :

Le problème obtenu est symétrique. Si au lieu de choisir le potentiel de déplacement pour représenter le fluide, on avait choisi le potentiel de vitesse, on aurait obtenu un problème matriciel non symétrique faisant aussi apparaître une matrice d'amortissement.

Remarque :

Il est nécessaire d'avoir $\rho_F > 0$ afin la matrice de masse $\tilde{\mathbf{M}}$ soit inversible. Si l'on souhaite faire un calcul en « air », cf. § 6.3, il faut bloquer les degrés de liberté en Φ_0.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Résolution du problème cellulaire

4.1 Problème à résoudre

Sur la cellule élémentaire bidimensionnelle (voir [fig 4.1-a]), on cherche à calculer les fonctions $\chi_\alpha(\alpha=1,2)$ vérifiant :

$$\int_{Y^*} \nabla \chi_\alpha . \nabla v = \int_\gamma n_\alpha v \quad \forall v \in V$$
$$\int_{Y^*} \chi_\alpha = 0 \quad (\text{pour avoir une solution unique}) \qquad \textbf{éq 4.1-1}$$

où :

$$V = \{ v \in H_1(Y^*), \quad v(y) \text{ périodique en } y \text{ de période } 1 \}$$

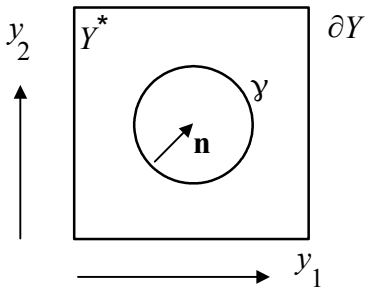


Figure 4.1-a

Après avoir déterminé les fonctions $\chi_\alpha(\alpha=1,2)$, on calcule les coefficients homogénéisés définis par $b_{\alpha\beta}(\alpha=1,2\,;\beta=1,2)$ la formule :

$$b_{\alpha\beta} = \int_{Y^*} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial y_B} \qquad \textbf{éq 4.1-2}$$

En utilisant la formule de Green et le caractère périodique de χ_α, on montre que les coefficients $b_{\alpha\beta}$ peuvent s'écrire autrement :

$$b_{\alpha\beta} = \int_\gamma \chi_\alpha n_\beta \qquad \textbf{éq 4.1-3}$$

Pour estimer cette quantité, il faut lors d'une discrétisation par éléments finis, déterminer pour chaque élément la normale sortante, ce qui peut être fastidieux. On opère alors d'une autre façon ; en prenant dans l'équation [éq 4.1-1] $v = \chi_\beta$, on obtient :

$$b_{\alpha\beta} = \int_{Y^*} \nabla \chi_\alpha \nabla \chi_\beta \qquad \textbf{éq 4.1-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A partir de la fonction énergie potentielle définie par la formule classique :

$$W(v)=-\frac{1}{2}\int_{Y^*}\nabla v\,.\,\nabla v \qquad \text{éq 4.1-5}$$

on peut réécrire les coefficients homogénéisés sous la forme :

$$b_{\alpha\beta}=-(W(\chi_\alpha+\chi_\beta)-W(\chi_\alpha)-W(\chi_\beta)) \qquad \text{éq 4.1-6}$$

Dans le cas général bidimensionnel, on doit calculer trois coefficients du problème homogénéisé (on sait que la matrice $b_{11,}\,b_{12}=b_{21,}\,b_{22}$ $\mathbf{B}=(b_{\alpha\beta})$ est symétrique). On doit résoudre les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases}\text{Calculer}\,\chi_1\in V \;/\; \int_{Y^*}\nabla\chi_1\nabla v=\int_{Y^*}n_1 v\\ \text{Calculer}\,\chi_2\in V \;/\; \int_{Y^*}\nabla\chi_2\nabla v=\int_{Y^*}n_2 v\\ \text{Calculer}\,\chi^*\in V \;/\; \chi^*=\chi_1+\chi_2\end{cases} \qquad \text{éq 4.1-7}$$

On a alors :

$$\begin{cases}b_{11}=-2W(\chi_1)\\ b_{22}=-2W(\chi_2)\\ b_{12}=b_{21}=-(W(\chi^*)-W(\chi_1)-W(\chi_2))\end{cases} \qquad \text{éq 44.1-8}$$

Remarque :

Si la cellule élémentaire possède des symétries, cela permet de résoudre le problème sur une partie de la cellule avec des conditions aux limites bien appropriées et de ne calculer que certains coefficients du problème homogénéisé. Par exemple pour la cellule de la figure n°4.1 - a on a : $b_{11}=b_{22,}\;\; b_{12}=b_{21}=0$ *.*

4.2 Problème équivalent pour définir χ_α

Dans l'équation [éq 4.1-1], le calcul du second membre nécessite la détermination de la normale au bord. Pour éviter une détermination de la normale, on peut écrire un problème équivalent, vérifié par les fonctions χ_α .

Soient les vecteurs $G_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, G_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $G^*=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, on cherche les fonctions $\chi^*, \chi_{1,}\chi_2\in V$ telles que :

$$\begin{cases}\int_{Y^*}\nabla\chi_1\,.\,\nabla v=\int_{Y^*}G_1\,.\,v \quad \forall v\in V\\ \int_{Y^*}\nabla\chi_2\,.\,\nabla v=\int_{Y^*}G_2\,.\,v \quad \forall v\in V\\ \int_{Y^*}\nabla\chi^*\,.\,\nabla v=\int_{Y^*}G^*\,.\,v \quad \forall v\in V\end{cases} \qquad \text{éq 4.2-1}$$

En utilisant la formule de Green et l'anti-périodicité de la normale $\mathbf{n}$, on montre que les problèmes [éq 4.1-1] et [éq 4.2-1] sont équivalents.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Mise en pratique dans le *Code_Aster*

Dans le *Code_Aster*, pour résoudre le problème [éq 4.2-1], l'analogie thermique en définissant un matériau ayant un coefficient c_p égal à zéro et un coefficient λ égal à un est utilisée. Pour imposer le calcul du second membre faisant intervenir le terme en G_α, le mot-clé PRE_GRAD_TEMP dans la commande AFFE_CHAR_THER est sélectionné. Le problème thermique est résolu en utilisant la commande THER_LINEAIRE. Le calcul de l'énergie potentielle W est fourni par la commande POST_ELEM avec l'option ENER_POT. Dans le cas général, trois calculs sont effectués pour déterminer les valeurs $W(\chi_1), W(\chi_2), W(\chi^*)$ et ensuite, les valeurs des coefficients du problème homogénéisé en sont déduites manuellement. Pour imposer le caractère périodique de l'espace dans lequel la solution est cherchée, le mot-clé LIAISON_GROUP dans la commande AFFE_CHAR_THER est utilisé.

5 Choix de l'élément fini pour le problème homogénéisé

5.1 Choix des éléments finis

Dans le modèle présenté précédemment, l'axe z a un rôle prépondérant en tant qu'axe principal des poutres. Les éléments finis développés vérifient cette particularité. Les mailles sont du type cylindrique : les bases quadrangulaires sont contenues dans des plans $z=Cte$ et l'axe du cylindre est parallèle à l'axe z (voir [fig 5.1-a]).

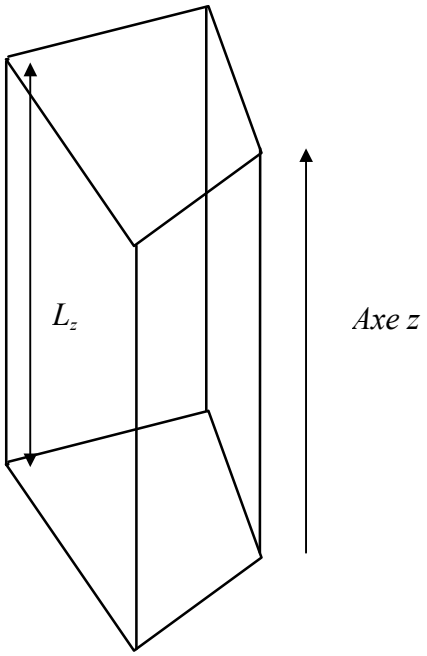


Figure 5.1-a

D'après les équations [éq 3.1-1], des dérivées secondes suivant la coordonnée z interviennent dans le modèle, ce qui nécessite des éléments finis C^1 dans la direction z. Des fonctions de forme de type Hermite pour représenter les variations de s suivant l'axe z sont donc utilisées. Aux points de discrétisation, les déplacements s_x, s_y mais aussi les dérivées $\frac{\partial s_y}{\partial z}, \frac{\partial s_x}{\partial z}$ qui sont liées aux degrés

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

de liberté de rotation θ_x, θ_y par les formules $\theta_x = \frac{\partial s_y}{\partial z}$, $\theta_y = -\frac{\partial s_x}{\partial z}$ doivent être connues. En ce qui concerne les variations suivant x, y, on se limite pour l'instant à des fonctions de forme Q_1.

Pour le degré de liberté de potentiel, des fonctions de forme Q_1 ou Q_2 suivant les trois directions x, y, z de l'espace sont utilisées.

L'élément fini a donc pour inconnues les degrés de liberté suivants : $s_x, s_y, \theta_x, \theta_y, \Phi$.

Remarque :

L'ordre des nœuds des mailles support est très important. En effet, les arêtes parallèles à l'axe z ne sont pas représentées de la même façon que les arêtes contenues dans les plans $z = Cte$. Les nœuds des mailles sont donc rangés dans un ordre bien précis : liste des nœuds de la base inférieure, puis liste des vis-à-vis de la base supérieure (ou vice-versa).

En ce qui concerne la géométrie, les fonctions de forme permettant de passer de l'élément de référence à l'élément courant sont Q_1. L'élément fini est donc sous-paramétrique.

Deux éléments finis ont été développés :

- un associé à une maille HEXA8. En chaque nœud de la maille, les inconnues sont $s_x, s_y, \theta_x, \theta_y, \Phi$. Les fonctions de forme associées au potentiel Φ sont Q_1.
- un autre associé à une maille HEXA20. En chaque nœud sommet de la maille, les inconnues sont $s_x, s_y, \theta_x, \theta_y, \Phi$. En chaque nœud milieu des arêtes, l'inconnue est Φ. Les fonctions de forme associées au potentiel Φ sont Q_2.

5.2 Éléments finis de référence

5.2.1 Maille HEXA8

Sur l'élément fini de référence HEXA8 (voir [fig 5.2-a]), les fonctions de forme suivantes sont définies :

$$N^L_{\pm1,\pm1,\pm1}(\xi) = P_{\pm1}(\xi_1) P_{\pm1}(\xi_2) P^L_{\pm1}(\xi_3) \quad \text{avec } L = \Phi \text{ ou } D \text{ ou } R \qquad \textbf{éq 5.2.1-1}$$

Les indices ±1 représentent les coordonnées des nœuds de la maille support de référence.

Les fonctions qui permettent de définir les fonctions de forme s'écrivent :

$$\begin{aligned}
P_{(-1)}(\varsigma) &= \frac{1-\varsigma}{2} & P_{(+1)}(\varsigma) &= \frac{1+\varsigma}{2} \\
P^{\Phi}_{(-1)}(\varsigma) &= \frac{1-\varsigma}{2} & P^{\Phi}_{(+1)}(\varsigma) &= \frac{1+\varsigma}{2} \\
P^{D}_{(-1)}(\varsigma) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\varsigma+\frac{1}{2}\varsigma^3\right) & P^{D}_{(+1)}(\varsigma) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\varsigma-\frac{1}{2}\varsigma^3\right) \\
P^{R}_{(-1)}(\varsigma) &= \frac{1}{4}\left(1-\varsigma-\varsigma^2+\varsigma^3\right) & P^{R}_{(+1)}(\varsigma) &= \frac{1}{4}\left(-1-\varsigma+\varsigma^2+\varsigma^3\right)
\end{aligned} \qquad \varsigma \in [-1,1] \qquad \textbf{éq 5.2.1-2}$$

Les fonctions P^D, P^R sont les fonctions d'Hermite.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les inconnues du problème homogénéisé, sur une maille, se décomposent de la manière suivante :

$$\begin{cases} s_x(\xi)=\sum_{i=1}^{8} DX_i N_i^D(\xi)+\frac{L_S}{2}\sum_{i=1}^{8} DRX_i N_i^R(\xi) \\ s_y(\xi)=\sum_{i=1}^{8} DY_i N_i^D(\xi)+\frac{L_S}{2}\sum_{i=1}^{8} DRY_i N_i^R(\xi) \qquad \xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ \Phi(\xi)=\sum_{i=1}^{8} \Phi_j N_j^{\Phi}(\xi) \end{cases} \qquad \textbf{éq 5.2.1-3}$$

où $DX_i, DY_i, DRX_i, DRY_i, \Phi_i$ sont les valeurs du déplacement selon x, du déplacement selon y, de la rotation autour de l'axe x, de la rotation autour de l'axe y et du potentiel de déplacement au sommet i de la maille. Dans le *Code_Aster*, pour chaque nœud, les degrés de liberté sont rangés dans l'ordre cité précédemment.

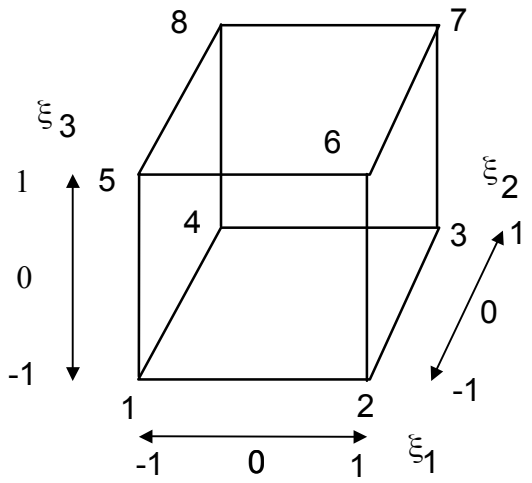


Figure 5.2.1-a

5.2.2 Maille HEXA20

Sur l'élément fini de référence HEXA20 (voir [fig 5.2-b]), les fonctions de forme suivantes sont définies :

$$N^L_{\pm1,\pm1,\pm1}(\xi)=P_{\pm1}(\xi_1)P_{\pm1}(\xi_2)P^L_{\pm1}(\xi_3) \quad \text{avec } L=\Phi \text{ ou } D \text{ ou } R \qquad \textbf{éq 5.2.2-1}$$

$$N_j^{\Phi}(\xi)=Q_j(\xi_3) \quad j=1,\ldots,20 \qquad \textbf{éq 5.2.2-2}$$

Les indices ±1 représentent les coordonnées des nœuds sommets de la maille support de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les fonctions $P_{\pm 1}, P_{\pm 1}^{L}$ ont déjà été définies au paragraphe [§5.2.1]. Les fonctions Q_i sont définies par :

$$Q_i(\xi)=\frac{1}{8}\left(1+\xi_1\xi_1^i\right)\left(1+\xi_2\xi_2^i\right)\left(1+\xi_3\xi_3^i\right)\left(\xi_1\xi_1^i+\xi_2\xi_2^i+\xi_3\xi_3^i-2\right) \qquad i=1,\ldots,8$$

$$Q_i(\xi)=\frac{1}{4}\left(1-\left(\xi_1\xi_1^i\right)^2\right)\left(1+\xi_2\xi_2^i\right)\left(1+\xi_3\xi_3^i\right) \qquad i=9,11,17,19$$

$$Q_i(\xi)=\frac{1}{4}\left(1-\left(\xi_2\xi_2^i\right)^2\right)\left(1+\xi_1\xi_1^i\right)\left(1+\xi_3\xi_3^i\right) \qquad i=10,12,18,20$$

$$Q_i(\xi)=\frac{1}{4}\left(1-\left(\xi_3\xi_3^i\right)^2\right)\left(1+\xi_1\xi_1^i\right)\left(1+\xi_2\xi_2^i\right) \qquad i=13,14,15,16$$

éq 5.2.2-3

où $(\xi_{1,}^i \xi_{2,}^i \xi_3^i)$ sont les coordonnées du nœud i de la maille.
Les inconnues du problème homogénéisé, sur une maille, se décomposent de la manière suivante :

$$\begin{cases} s_x(\xi)=\sum_{i=1}^{8} DX_i N_i^D(\xi)+\frac{L_S}{2}\sum_{i=1}^{8} DRX_i N_i^R(\xi) \\ s_y(\xi)=\sum_{i=1}^{8} DY_i N_i^D(\xi)+\frac{L_S}{2}\sum_{i=1}^{8} DRY_i N_i^R(\xi) \qquad \xi=(\xi_{1,}\xi_{2,}\xi_3) \\ \Phi(\xi)=\sum_{i=1}^{8} \Phi_j N_j^{\Phi}(\xi) \end{cases}$$

éq 5.2.2-4

où $DX_i, DY_i, DRX_i, DRY_i, \Phi_i$ sont les valeurs du déplacement fluide selon x, du déplacement selon y, de la rotation autour de l'axe x, de la rotation autour de l'axe y et du potentiel de déplacement au sommet i de la maille $(i=1,...,8)$ et Φ_j le potentiel de déplacement fluide au nœud milieu des arêtes $(j=9,...,20)$.

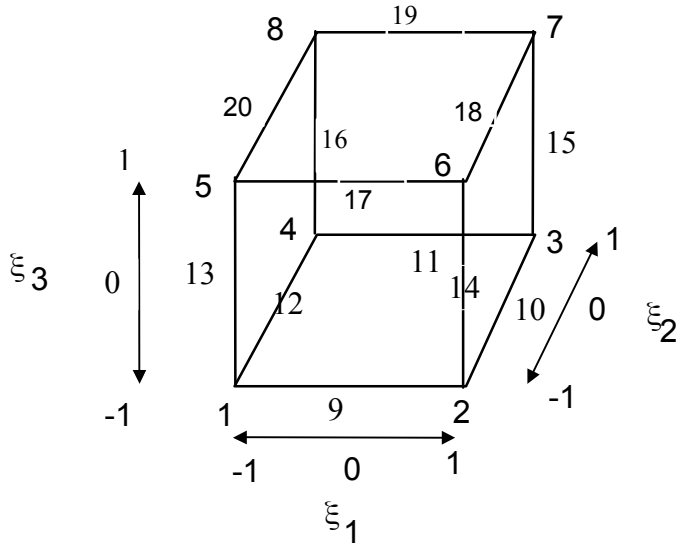


Figure 5.2.2-a

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Choix des points de Gauss

Chaque intégrale qui intervient dans les expressions des matrices élémentaires, est transformée en une intégrale sur l'élément de référence (on effectue un changement de variable) qui est ensuite calculée en utilisant une formule de quadrature de type GAUSS.

Les points de Gauss sont choisis de façon à intégrer exactement les intégrales sur l'élément de référence. Des familles de points d'intégration différentes sont utilisées pour calculer les matrices de masse et les matrices de rigidité (les degrés des polynômes à intégrer sont différents). Mais ici, pour calculer les différentes contributions de la matrice de masse, différentes familles de points de Gauss peuvent encore être utilisées.

L'élément de référence étant un HEXA8 ou un HEXA20, l'intégrale sur le volume peut être séparée en un produit de trois intégrales qui correspondent chacune à une direction de l'espace de référence. Le nombre de points d'intégration nécessaires est déterminé par direction.

Selon la maille de référence, le nombre de points d'intégration par direction est le suivant :

	Maille HEXA8		**Maille HEXA20**	
	direction x ou y	**direction z**	**direction x ou y**	**direction z**
matrice $\hat{\mathbf{K}}$	2	2	2	2
matrice $\hat{\mathbf{A}}$	2	2	3	3
matrice $\hat{\mathbf{D}}$	2	3	2	3
matrice $\hat{\mathbf{M}}$	2	4	2	4

Quatre familles de points de Gauss ont été définies. Chaque famille correspond à une des matrices du problème à résoudre.

Sur le segment [-1,1], les coordonnées des points d'intégration et leurs poids sont les suivants [bib7] :

Nombre de points d'intégration	**Coordonnées**	**Poids**
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\sqrt{3/5}$	$8/9$ $5/9$
4	$\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$ $\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6\sqrt{6/5}}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{6\sqrt{6/5}}$

Le poids d'un point de Gauss dans l'élément de référence tridimensionnel est obtenu en multipliant les trois poids correspondant à chacune des coordonnées du point de Gauss.

5.4 Ajout des problèmes de traction et de torsion

Pour compléter le problème de flexion homogénéisé décrit précédemment, le problème de traction et le problème de torsion sont rajoutés de façon découplée (ces problèmes ne font pas intervenir le fluide).

5.4.1 Problème de traction

Le problème de traction homogénéisé s'écrit sous la forme suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\int_\Omega \frac{E\,S\,\mu^2}{|Y|}\frac{\partial s_z}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+\int_\Omega \frac{\mu^2\rho_S S}{|Y|}\frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2}v=0 \quad \forall v\in V \text{ avec } V=H^1([0,L])$$

μ étant le rapport de côté de la cellule élémentaire de référence, d'aire $|Y|$, par rapport à la cellule réelle de périodicité du milieu hétérogène.
L'élément fini de référence est un HEXA8 ayant pour inconnue le déplacement DZ en chaque nœud. Les fonctions de forme associées sont Q_1.

5.4.2 Problème de torsion

Le problème de torsion homogénéisé s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_\Omega \frac{E\,J_z\,\mu^2}{2(1+\nu)|Y|}\frac{\partial \theta_z}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+\int_\Omega \frac{\mu^2\rho_S J_z}{|Y|}\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2}v=0 \quad \forall v\in V \text{ avec } V=H^1([0,L])$$

où J_z est la constante de torsion.

L'élément fini de référence est un HEXA8 ayant pour inconnue le déplacement DRZ en chaque nœud. Les fonctions de forme associées sont Q_1

5.5 Intégration dans le *Code_Aster* de cet élément fini

L'élément fini est développé dans *Code_Aster* en 3D. Une modélisation a été rajoutée dans le catalogue des modélisations :

- '`FAISCEAU_3D`' pour le 3D.

Dans le catalogue des éléments, l'élément peut s'appliquer sur les deux mailles suivantes :

Maille	Nombre de nœuds en déplacement et rotation	Nombre de nœuds en potentiel fluide	Nom de l'élément dans le catalogue
`HEXA8`	8	8	`meca_poho_hexa8`
`HEXA20`	8	20	`meca_poho_hexa20`

Dans les routines d'initialisation de cet élément, on définit :

- deux familles de fonctions de forme associées respectivement aux déplacements et rotation des poutres (fonction de forme linéaire en x, y et cubique en z) et aux termes de potentiel du fluide (fonction linéaire en x, y, z),
- quatre familles de points de Gauss pour calculer la matrice de rigidité et les différentes parties de la matrice de masse.

Lors du calcul des termes élémentaires, les dérivées premières ou secondes des fonctions de forme sur l'élément courant sont calculées. Malgré la géométrie simplifiée de l'élément fini (l'axe de la maille cylindrique est parallèle à l'axe z et les sections inférieure et supérieure sont dans des plans $z=Cte$), une subroutine générale pour calculer les dérivées secondes a été écrite [bib7]. Par ailleurs, deux nouvelles subroutines ont été développées à partir des subroutines existantes pour les éléments isoparamétriques pour tenir compte du caractère sous-paramétrique de l'élément.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Utilisation dans *Code_Aster*

6.1 Les données nécessaires

Les caractéristiques des poutres (section S, tenseur d'inertie $\mathbf{I}$, constante de torsion J_z) sont renseignées directement sous le mot clé facteur POUTRE de la commande AFFE_CARA_ELEM.

Les caractéristiques des coefficients homogénéisés et de la cellule de référence sont renseignées sous le mot clé facteur POUTRE_FLUI de la commande AFFE_CARA_ELEM. Pour les mots clés simples, la correspondance est la suivante :

B_T : b_{11}
B_N : b_{22}
B_TN : b_{12}
A_FLUI : Y_F
A_CELL : $Y = Y_F + Y_S$
COEF_ECHELLE : μ

Les caractéristiques des matériaux sont renseignées dans la commande DEFI_MATERIAU. Pour les tubes, le mot clé facteur ELAS est utilisé pour indiquer le module d'Young (E : E), le coefficient de Poisson (NU : ν) et la masse volumique (RHO : ρ_S). Pour le fluide, le mot clé facteur FLUIDE est utilisé pour indiquer la masse volumique du fluide (RHO : ρ_F).

6.2 Orientation des axes des poutres

Les génératrices des mailles cylindriques sont obligatoirement parallèles à l'axe des poutres et les bases des mailles perpendiculaires à ce même axe. Lors de l'élaboration du maillage, il faut s'assurer que l'ordre des nœuds (numérotation locale) de chaque maille cylindrique est correct : les noeuds de la base inférieure puis les nœuds de la base supérieure (ou vice versa). La direction de l'axe des poutres est renseignée sous le mot clé facteur ORIENTATION de la commande AFFE_CARA_ELEM.
L'hypothèse suivante a été effectuée : le repère de référence est le même que le repère principal d'inertie du tube caractéristique représentant le milieu homogénéisé. Cela signifie que dans les équations [éq 3.1-3], le terme I_{xy} est nul.

6.3 Calcul modal

L'élément fini développé permet de caractériser le comportement vibratoire d'un réseau de poutres baignées par un fluide. Il est intéressant de déterminer les fréquences de vibration d'un tel réseau en air et en eau.

Pour effectuer un calcul modal en air ($\rho_F = 0$), il faut bloquer tous les degrés de liberté correspondant au potentiel de déplacement fluide Φ, sinon la matrice de rigidité (et même la matrice shiftée du problème modal) est non inversible [R5.01.01].

Pour effectuer un calcul modal en eau ($\rho_F \neq 0$), il faut utiliser dans la commande CALC_MODES avec OPTION='CENTRE'. La matrice shiftée $(\tilde{\mathbf{K}} - \sigma \tilde{\mathbf{M}})$ est alors inversible si σ n'est pas valeur propre ou si σ est différent de zéro.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Caractérisation du spectre du modèle homogénéisé

7.1 Modèle hétérogène

Soit un réseau à pas carré de n poutres encastrées en leurs extrémités basses et dont les extrémités supérieures se déplacent de la même façon (mouvement uniforme) (Cf. figure [fig 7.1-a]). Seuls les mouvements de flexion sont considérés.

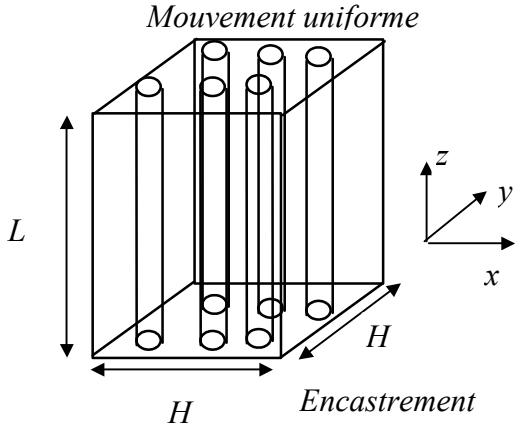


Figure 7.1-a

Le spectre de vibration en air de ce réseau à la forme suivante. Pour chaque ordre de mode de vibration de flexion, la structure modale est constituée d'une fréquence double correspondant à un mode en x et à un mode en y où toute la partie supérieure se déplace (toutes les poutres ont la même déformée) et d'une fréquence de multiplicité $(2n-2)$ correspondant à des modes où toute la partie supérieure des poutres est immobile et où des poutres se déplacent en opposition de phase.

En présence de fluide, le spectre est modifié. Pour chaque ordre de mode de vibration en flexion, les $2n$ fréquences de vibration sont inférieures aux fréquences de vibration obtenues en air. L'effet du fluide incompressible est comparable à une masse ajoutée. On a toujours une fréquence double correspondant à un mode en x et à un mode en y où toute la partie supérieure se déplace (toutes les poutres ont la même déformée). Par contre, on obtient $(n-1)$ couples différents de fréquence double (un en x et un en y) correspondant à des modes où toute la partie supérieure des poutres est immobile et où des poutres se déplacent en opposition de phase.

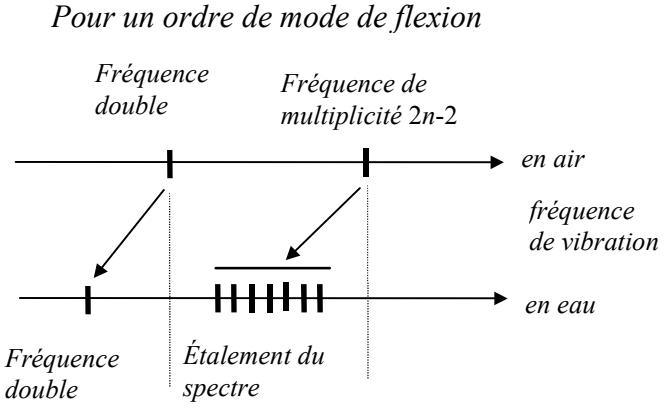


Figure 7.1-b

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.2 Modèle homogène

Le milieu hétérogène a été remplacé par un milieu homogène.

7.2.1 Problème continu

Des travaux récents, concernant un problème d'homogénéisation plane d'un réseau de masselottes retenues par des ressorts et baignées par un fluide, montrent que le spectre du modèle homogène continu est constitué d'une partie continue et de deux fréquences de multiplicité infinie [bib10]. Le spectre des fréquences propres du problème en eau est également contenu dans un intervalle bien défini borné supérieurement par la fréquence de vibration en air d'une masselotte [bib5].

Ces résultats sont transposables pour chaque ordre de flexion du réseau de tubes.

7.2.2 Problème discrétisé

Soit le domaine homogène maillé par des hexaèdres. Soit p le nombre de génératrices parallèles à l'axe z du réseau de poutres.

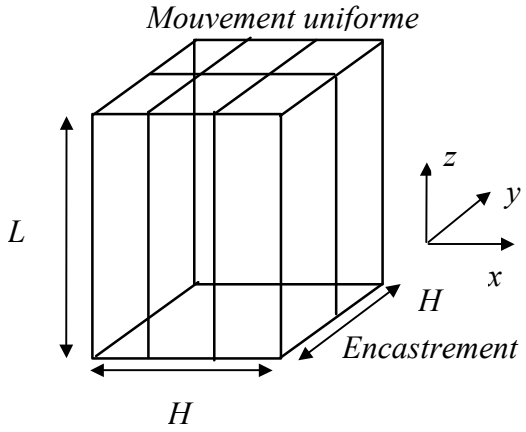


Figure 7.2.2-a

On trouve des résultats analogues à ceux obtenus pour le modèle hétérogène. Il suffit de remplacer n par p. Pour un ordre de flexion de poutre, le nombre de fréquences correspondant à des modes où les poutres ne vibrent pas toutes dans le même sens, dépend de la discrétisation utilisée dans les directions transverses à l'axe des poutres.

Selon l'élément fini utilisé (maille HEXA8 ou maille HEXA20), la répartition des $(2p-2)$ dernières fréquences est différente. La première fréquence double (celle correspondant au mode où la partie supérieure se déplace) est la même pour les deux éléments finis.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

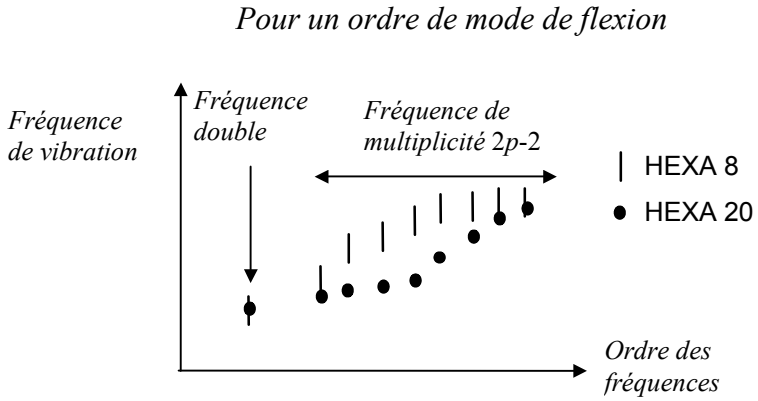


Figure 7.2.2-b

Globalement, le modèle homogène permet d'obtenir aisément les fréquences de vibration correspondant à des modes où toutes les poutres vibrent dans le même sens. Les autres modes obtenus ne fournissent qu'une vision partielle du spectre. Dans le spectre discrétisé, on peut retourner une ou les deux fréquences de multiplicité infinie présente dans le spectre du modèle continu.

8 Conclusion

L'utilisation des éléments finis développés associés au modèle homogénéisé d'un faisceau de tubes périodique baignés par un fluide permet de caractériser les mouvements vibratoires d'ensemble (toute la structure se déplace dans le même sens) d'une telle structure.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Bibliographie

1) E. Sanchez-Palencia (1980), "Non homogeneous media and vibration theory", Springer Verlag.

2) "Étude asymptotique du comportement dynamique des assemblages combustibles d'un réacteur nucléaire" Siaka Berete, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, soutenue le 19 avril 1991.

3) "Comportement sous sollicitations dynamiques de cœurs de réacteurs à eau pressurisée" E. Jacquelin, Thèse effectuée à l'Ecole Centrale de Lyon avec EDF-SEPTEN (Division : MS, Groupe : DS), Décembre 1994.

4) "Étude de l'interaction fluide-structure dans les faisceaux de tubes par une méthode d'homogénéisation : application à l'analyse sismique des cœurs RNR" L. Hammami, Thèse de L'Université de Paris VI, 1990.

5) "Problèmes mathématiques en couplage fluide-structure, Applications aux faisceaux tubulaires" C. Conca, J. Planchard, B. Thomas, M. Vanninathan, Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, n°85, Eyrolles.

6) "Prise en compte d'un fluide parfait incompressible au repos comme masse ajoutée sur une structure, Synthèse bibliographique" G. Rousseau, Rapport Interne EDF - DER, HP-61/94/009.

7) "Une présentation de la méthode des Eléments finis" G. Dhatt et G.Touzot, Maloine S.A. Éditeur Paris.

8) D. Brochard, F. Jedrzejewski et al. (1996), "3D Analysis of the fluid structure interaction in tub bundles using homogenization methods", PVP-Vol. 337, Fluid-Structure Interaction ASME 1996.

9) H. Haddar, B. Quinnez, " Modélisation par homogénéisation des grilles de mélange des assemblages combustible", Rapport interne EDF-DER, HI-75/96/074/0.

10) G. Allaire, C. Conca, J. Planchard, "Homogenization and Bloch wave method for fluid-tube bundle interaction", Article en préparation.

10 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
4.0	*B. QUINNEZ (EDF/IMA/MMN)*	Texte initial
10.2	F.VOLDOIRE (EDF/AMA)	Corrections de mise en forme ; correction équation 3.2-2.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)