Calcul de matrice de masse ajoutée sur base modale

Résumé :

Ce document présente un aspect du couplage fluide/structure : lorsqu'une structure vibrante se trouve immergée dans un fluide qu'on suppose au repos, incompressible et non visqueux, elle ressent des forces de pression dont la résultante est proportionnelle à l'accélération de la structure dans le fluide : le coefficient de proportionnalité est homogène à une masse : on l'appelle **masse ajoutée**. On précise ici le moyen d'estimer une matrice de masse ajoutée pour une (ou des) structure(s) à plusieurs degrés de liberté sur la base modale de la (des) structure(s) dans le vide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notations....3
2 Introduction....3
3 Rappels des équations du problème....4
3.1 Équations dans le fluide....4
3.2 Équations dans les structures....5
3.3 Équations du problème couplé - mise en évidence de la matrice de masse ajoutée....6
3.4 Quelques définitions....7
3.4.1 Définition 1....7
3.4.2 Définition 2....7
3.4.3 Définition 3....7
3.5 Propriétés de la matrice de masse ajoutée....7
3.5.1 Théorème 1 : la matrice de masse ajoutée est symétrique....7
3.5.2 Théorème 2 : la matrice de masse ajoutée est définie positive....8
3.5.3 Théorème 3....8
3.5.4 Autres propriétés....9
4 Mise en œuvre numérique....9
4.1 Résolution de l'équation de Laplace par éléments finis de volume....9
4.2 Calcul des coefficients de la matrice de masse ajoutée sur base modale....10
5 Mise en œuvre dans Code_Aster....11
5.1 Analogie thermique....11
5.2 Mise en œuvre pratique....12
6 Bibliographie....12
7 Description des versions du document....12

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

p : la pression fluctuante dans le fluide,
γ_l : contour de la structure indexée par l
$\ddot{x}_{s_l}$: le champ des déplacements dans la structure l ,
ρf , ρs : la masse volumique du fluide, de la structure,
X_{il} : le mode propre d'ordre i de la structure l en air
a_{il} , $\dot{a}_{il}$, $\ddot{a}_{il}$: les coordonnées, vitesses, accélérations généralisées relatives au mode i de la structure l en air
$\bar{\bar{\sigma}}$: le tenseur des contraintes dans la structure
$\mathbf{\Phi}$: le vecteur de flux fluide
$\mathbf{H}$: la matrice de rigidité du fluide
$\mathbf{v}$: le champ des vitesses fluides
$\mathbf{n}$: la normale intérieure du fluide.

2 Introduction

De nombreux composants industriels se trouvent au contact de milieux fluides, qui plus est souvent en écoulement. Ces milieux fluides environnants perturbent les caractéristiques vibratoires des structures, notamment leurs caractéristiques modales. Cette action du fluide sur la structure se traduit par des effets de couplage fluide/structure.

On suppose ici le milieu fluide environnant incompressible, parfait et au repos. On va montrer qu'alors, une structure qui vibre avec une petite amplitude dans ce fluide modifie le champ de pression dans le fluide au repos, et ressent donc une force de pression, proportionnelle à son accélération. Le coefficient de proportionnalité est une masse. Elle décrit l'effet inertiel du fluide sur la structure : c'est pourquoi on nomme cette masse **masse ajoutée** du fluide sur la structure.

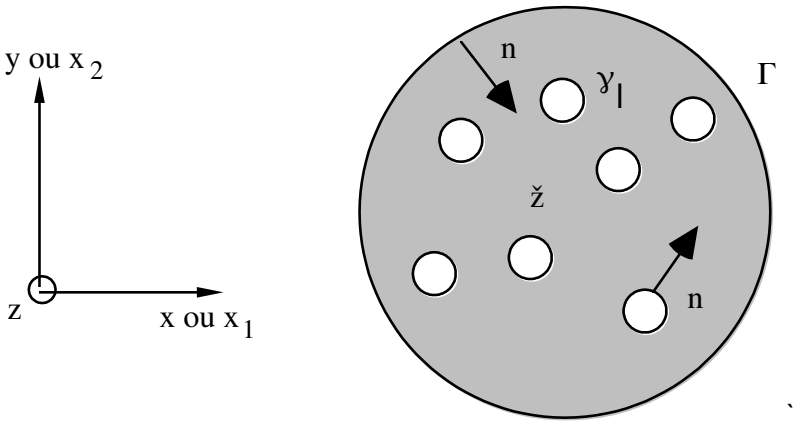
Lorsque plusieurs structures sont en contact d'un même fluide, lorsqu'une des structures se met à vibrer, non seulement elle ressent l'inertie du fluide, mais elle modifie le champ de pression autour des interfaces avec le fluide de toutes les autres structures. Les efforts que chacune ressent sont proportionnels à l'accélération de la structure vibrante : là encore les coefficients de proportionnalité sont des masses appelées **masses ajoutées de couplage**.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Rappels des équations du problème

3.1 Équations dans le fluide

On suppose que K structures vibrantes sont immergées dans un fluide parfait (non visqueux), incompressible et au repos. On néglige l'effet de la pesanteur. On peut donc écrire les équations d'Euler associées au fluide au repos :



- conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + div(\rho_f \mathbf{v}) = 0 \qquad \text{éq 3.1-1}$$

- conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} . \boldsymbol{grad})\mathbf{v} + \frac{1}{\rho_f} \boldsymbol{grad}\ p = 0 \qquad \text{éq 3.1-2}$$

Du fait de l'incompressibilité du fluide, l'équation [éq 3.1-1] devient :

$$\text{div}\ \mathbf{v} = 0 \qquad \text{éq 3.1-3}$$

Dans le volume Ω du fluide, on néglige la convection induite par le mouvement de faible amplitude de la structure. L'équation [éq 3.1-2] devient donc :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \boldsymbol{grad}\ p = 0 \qquad \text{éq 3.1-4}$$

En dérivant [éq 3.1-3] par rapport au temps et en reportant l'expression de $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ en fonction de la pression dans cette équation, on obtient :

$$\text{div}\ \boldsymbol{grad}\ p = 0$$

soit :

$$\Delta p = 0 \text{ dans } \Omega$$

qui est l'équation de Laplace dans un fluide au repos.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

À l'interface fluide/structure, on peut écrire que l'accélération normale de la paroi de la structure est égale à l'accélération normale du fluide (continuité des accélérations normales - condition d'imperméabilité de la structure). On utilise ici la convention suivante pour la normale : il s'agit de la normale **extérieure** à la structure, **orientée de la structure vers le fluide.**

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.\boldsymbol{n}=\ddot{\mathbf{x}}_{S_l}.\boldsymbol{n}$$

Avec l'équation [éq 3.1-4], on obtient :

$$\mathbf{grad}\ p.\boldsymbol{n}=-\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.\boldsymbol{n}=-\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_{S_l}.\boldsymbol{n}$$

Soit :

$(\frac{\partial p}{\partial n})_{\gamma_l}=-\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_{S_l}.\boldsymbol{n}$ sur γ_l, interface fluide/structure de la structure indexée par l.

En résumé, le problème fluide consiste à résoudre une équation de Laplace avec conditions aux limites de type von Neumann :

$$\begin{cases} \Delta p=0 \ \text{ dans } \ \Omega \\ (\frac{\partial p}{\partial n})_{\Gamma_1}=-\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_s.\mathbf{n} \ \text{ sur } \ \Gamma_1,\ \Gamma_1=\underset{l=1,K}{\cup}\gamma_l \\ (\frac{\partial p}{\partial n})_{\Gamma_2}=0 \ \text{ sur } \ \Gamma_2,\ \Gamma_2=\partial\Omega-\Gamma_1 \end{cases} \qquad \text{éq 3.1-5}$$

3.2 Équations dans les structures

Considérons K structures élastiques plongées dans un milieu fluide. L'équation de leur mouvement en présence de fluide s'écrit :

$$\begin{cases} \forall l \ \text{ indice de structure}, l\in\{0,...,K\},\ \mathbf{M_l}\ddot{\mathbf{X}}_l+\mathbf{K_l}\mathbf{X_l}=0 \ \text{ dans } \ \Omega_{S_l}, \text{volume de la structure } l \\ \forall l, \bar{\bar{\sigma}}\boldsymbol{n}=-p\boldsymbol{n} \ \text{ sur}\gamma_l, \text{contour de la structure } l \end{cases}$$

$\mathbf{M_l}$ est la matrice de masse de la structure, $\mathbf{K_l}$ sa matrice de rigidité. La condition aux limites sur le contour des structures traduit la continuité de la contrainte normale à l'interface fluide/structure (le tenseur des contraintes fluides étant réduit à sa partie non déviatorique, le fluide étant parfait). En intégrant sur le contour de chaque structure cette contrainte normale, on obtient une force $\mathbf{F_l}$ résultante des forces de pression du fluide à l'interface fluide/structure. Cette force est l'intégrale du champ de pression sur le contour γ_l de chaque structure :

$$\forall l \ \text{ indice de structure}, l\in\{0,...,K\},\ \mathbf{F_l}=-\int_{\gamma_l} p\boldsymbol{n}\,d\Gamma$$

Le champ de pression vérifie le problème [éq 3.1-5].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Équations du problème couplé - mise en évidence de la matrice de masse ajoutée

En définitive, le problème couplé fluide/structure s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \text{ dans } \Omega \\ \forall l \in \{0,\dots,K\}, \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\gamma_l} = -\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_{S_l}.\boldsymbol{n} \text{ sur } \gamma_l \\ \forall l \in \{0,\dots,K\}, \ \mathbf{M_l}\ddot{\mathbf{X}}_l + \mathbf{K_l}\mathbf{X_l} = 0 \text{ dans } \Omega_{S_l} \\ \forall l \in \{0,\dots,K\}, \ F_l = -\int_{g_l} p\,\boldsymbol{n}\,d\Gamma \text{ sur } \gamma_l \end{cases}$$

éq 3.3-1

On va montrer désormais que l'effort que ressentent les structures immergées est proportionnel à leur accélération. Un bon moyen de démontrer cela est de se placer dans la base modale des structures dans le vide. On peut ainsi décomposer l'accélération sur cette base (qui est en fait la réunion des bases modales de chacune des structures). Ainsi :

$$\mathbf{x}_{S_l}(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{il}(t)\mathbf{X}_{il}(\mathbf{r})$$

En reportant cette expression dans la deuxième équation du système [éq 3.3-1], on est amené à rechercher le champ de pression sous la forme :

$$p = \sum_{l=1,\dots,K} \sum_{i=1,\dots,\infty} \ddot{a}_{il}(t)\, p_{il}(\mathbf{r})$$

En reportant dans le problème [éq 3.3-1] ces expressions, on a à résoudre dans le fluide autant de problèmes de Laplace qu'on a choisi de modes pour chacune des structures. Ceci se traduit par :

$$\forall l \in \{1,\dots,K\}, \ \forall i \{1,\dots,\infty\}, \ \begin{cases} \Delta p_{il} = 0 \ \text{ dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial p_{il}}{\partial n}\right)_{\gamma_l} = -\rho_f \mathbf{X_{il}}.\boldsymbol{n} \text{ sur } \gamma_l \\ \left[\mathbf{m_{il}}\right](\ddot{\mathbf{a}}_l) + \left[\mathbf{k_{il}}\right](\mathbf{a_l}) = (\mathbf{f_{il}}) \text{ dans } \Omega_l \end{cases}$$

Les "matrices" de masse et de rigidité écrites dans ces bases sont diagonales.

Chacune des composantes de l'effort de pression résultant projeté sur base modale s'écrit :

$$\forall i \{1,\dots,\infty\}, \forall l \{1,\dots,K\}, \ (f_{il}) = -\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{a}_{jk} \int_{\gamma_l} p_{jk} \boldsymbol{X_{il}}.\boldsymbol{n}\, N_j\, d\Gamma$$

On peut alors écrire le vecteur de l'effort généralisé de pression sur une structure immergée sous forme matricielle :

$$(\mathbf{f_{il}}) = -\left[\boldsymbol{m}_{il\,jk}\right]\ddot{\boldsymbol{a}}_{jk} \text{ avec } m_{il\,jk} = \int_{\gamma_l} p_{jk} \boldsymbol{X_{il}}.\boldsymbol{n}\, d\Gamma$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ici, l est fixé : la matrice $\left[\boldsymbol{m}_{il\,jk}\right]$ s'appelle **matrice de masse ajoutée** du fluide sur la structure de contour γ_l. Lorsqu'on considère la base modale de l'ensemble des K structures, on généralise la notation de la **matrice de masse ajoutée** $\left[\boldsymbol{m}_{il\,jk}\right]$ sur base modale dans le vide, l variant de 1 à K. Cette matrice est en général non diagonale.

3.4 Quelques définitions

3.4.1 Définition 1

Lorsque $l=k$ (même structure) et $i=j$ (même ordre de mode), le coefficient m_{ilil} est l'**auto-masse ajoutée** du mode i de la structure l. Il s'agit de l'inertie supplémentaire due au fluide déplacé par le mode d'ordre i de la structure, compte tenu des confinements géométriques induits dans le fluide par la présence des autres structures supposées fixes.

3.4.2 Définition 2

Lorsque $l=k$ (même structure) et $i\neq j$ (ordres de mode différents), le coefficient m_{iljl} est la **masse ajoutée de couplage** entre les modes d'ordre i et j de la structure l. En air, ces termes de masse extra-diagonaux sont nuls, car les modes sont orthogonaux entre eux. Compte tenu de l'expression générale du coefficient $m_{il\,jk}$, les modes i et j peuvent être couplés en masse, car le champ de pression p_{jl} créé par le mode j de la structure l n'est pas nécessairement orthogonal au mode d'ordre i de cette même structure. Il suffit que cette structure soit immergée dans un environnement ne comportant pas de symétrie géométrique pour que ce coefficient soit non nul. Dans un environnement symétrique, en revanche, l'orthogonalité du champ de pression avec le mode est observée.

3.4.3 Définition 3

Lorsque $l\neq k$ (structures différentes) et $i\neq j$ (ordres de mode différents), le coefficient $m_{il\,jk}$ est la **masse ajoutée de couplage** entre les modes d'ordre i et j respectivement des structures l et k. Ce coefficient traduit l'effort inertiel que fait subir la structure k vibrant sur son mode d'ordre j à la structure l vibrant sur son mode i.

3.5 Propriétés de la matrice de masse ajoutée

3.5.1 Théorème 1 : la matrice de masse ajoutée est symétrique

Pour simplifier la démonstration, nous allons considérer une unique structure immergée dans un fluide parfait, incompressible et non visqueux. Nous décomposons le mouvement de la structure sur sa base modale (tronquée à n modes), mais le résultat peut être tout aussi bien démontré en base "physique" (*i.e.* la base des fonctions d'interpolation nodales). Enfin, le résultat se généralise au cas de K structures immergées dans un même fluide.

On doit démontrer que : $m_{ij}=\int_{\Gamma} p_i \boldsymbol{X_j}.\boldsymbol{n}\,d\Gamma = m_{ji}=\int_{\Gamma} p_j \boldsymbol{X_i}.\boldsymbol{n}\,d\Gamma$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- p_i (respectivement p_j) représente le champ de pression créé dans le fluide et à l'interface avec la structure par le mode d'ordre i (respectivement d'ordre j) de la structure,
- $\boldsymbol{X_j}$ (respectivement $\boldsymbol{X_i}$) représente la déformée modale du mode d'ordre j (respectivement d'ordre i).

Or :

$$\begin{cases} \Delta p_i = 0 \text{ dans } \Omega \text{ volume fluide} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial n} = -\rho_f X_i . \boldsymbol{n} \text{ sur } \Gamma \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta p_j = 0 \text{ dans } \Omega \text{ volume fluide} \\ \dfrac{\partial p_j}{\partial n} = -\rho_f \mathbf{X_j} . \boldsymbol{n} \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

D'où, en utilisant la formule de Green avec une normale orientée de la structure vers le fluide et l'harmonicité de p_i et de p_j :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_\Gamma p_i \boldsymbol{X_j} . \boldsymbol{n} \, d\Gamma = -\frac{1}{\rho_f} \int_\Gamma p_i \frac{\partial p_j}{\partial n} d\Gamma \\ &= -\frac{1}{\rho_f} \left(\underbrace{\int_\Omega p_i \Delta p_j \, d\Omega}_{0} - \int_\Omega \boldsymbol{grad}\, p_i . \boldsymbol{grad}\, p_j \, d\Omega \right) \\ &= -\frac{1}{\rho_f} \left(\underbrace{\int_\Omega p_j \Delta p_i \, d\Omega}_{0} - \int_\Omega \boldsymbol{grad}\, p_j . \boldsymbol{grad}\, p_i \, d\Omega \right) \\ &= -\frac{1}{\rho_f} \int_\Gamma p_j \frac{\partial p_i}{\partial n} d\Gamma = \int_\Gamma p_j \boldsymbol{X_i} . \boldsymbol{n} \, d\Gamma \\ &= m_{ji} \end{aligned}$$

3.5.2 Théorème 2 : la matrice de masse ajoutée est définie positive

On renvoie à la référence [bib1] pour la démonstration complète.

3.5.3 Théorème 3

Supposons qu'on ait K structures ayant des propriétés d'élasticité linéaire identiques et qui soient immergées dans un même fluide. En outre, ces structures admettent deux degrés de liberté de déplacement dans le plan Oxy (cf schéma). Chacune de ces structures admet le même spectre $f_1, ..., f_n, ...$ de fréquences propres dans le vide.

Pour toute fréquence propre f_n, il existe $2K$ fréquences propres $\{\omega_1, ..., \omega_{2K}\}$ du système couplé fluide/structure vérifiant $\forall i \in [1, ..., 2K], \ \omega_i \leq f_n$

On renvoie à la référence [bib1] pour la démonstration complète.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.5.4 Autres propriétés

- les coefficients d'auto-masse ajoutée sont toujours positifs

On suppose toujours qu'on a une seule structure immergée dans un fluide parfait, incompressible et au repos. La démonstration se généralise sans difficulté à K structures immergées.

On doit démontrer que :

$$\forall\, i \text{ indice de mode} \in \{1,\dots,n\},\ m_{ii} = \int_\Gamma p_i \boldsymbol{X_i}.\boldsymbol{n}\, d\Gamma \geq 0$$

Or :

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \int_\Gamma p_i \boldsymbol{X_i}.\boldsymbol{n}\, d\Gamma = -\frac{1}{\rho_f}\int_\Gamma p_i \frac{\partial p_i}{\partial n} d\Gamma \\ &= -\frac{1}{\rho_f}\Big(\underbrace{\int_\Omega p_i \Delta p_i\, d\Omega}_{0} - \int_\Omega \boldsymbol{grad}\, p_i.\boldsymbol{grad}\, p_i\, d\Omega\Big) \\ &= \frac{1}{\rho_f}\int_\Omega (\boldsymbol{grad}\, p_i)^2\, d\Omega \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- supposons qu'on ait K structures immergées dans un même fluide. On suppose qu'elles ont un seul degré de liberté de translation suivant Ox. Alors la somme de tous les coefficients de masse ajoutée de cette matrice donne l'auto-masse ajoutée sur l'ensemble des K structures se déplaçant toutes d'un même mouvement rectiligne sinusoïdal.

On renvoie à la référence [bib2] pour la démonstration complète.

4 Mise en œuvre numérique

4.1 Résolution de l'équation de Laplace par éléments finis de volume

Reprenons le problème fluide de Laplace avec conditions aux limites de type von Neumann :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \quad \text{dans}\,\Omega \\ \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\Gamma_1} = -\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_s.\boldsymbol{n} \quad \text{sur}\,\Gamma_1, \quad \Gamma_1 = \underset{l=1,K}{\cup} \gamma_l \\ \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\Gamma_2} = 0 \quad \text{sur}\,\Gamma_2, \quad \Gamma_2 = \partial\Omega - \Gamma_1 \end{cases}$$

Écrivons une formulation variationnelle de ce problème :

$$\int_\Omega \mathbf{v}\,\Delta p\, d\Omega = 0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En utilisant la formule de Green avec une normale qu'on suppose orientée de la structure vers le fluide (donc intérieure au volume fluide) et en posant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\int_\Omega \boldsymbol{grad}\, v . \boldsymbol{grad}\, p \, d\Omega + \int_\Gamma v \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = 0$$

Soit :

$$\int_\Omega \boldsymbol{grad}\, v . \boldsymbol{grad}\, p \, d\Omega = \rho_f \int_{\Gamma_1} v \ddot{x}_n d\Gamma \qquad \text{éq 4.1-1}$$

On considère une partition du volume Ω en un nombre fini d'éléments. Sur cette discrétisation du domaine, on peut écrire une forme approchée du champ de pression hydrodynamique :

$$p = \sum_{i=1}^{N} N_i(\mathbf{r})\, p_i$$

N_i représente les fonctions d'interpolation nodales définies sur les éléments : elles valent 1 au nœud numéro i, et 0 sur tous les autres.

Ensuite, en prenant comme fonctions-tests v successivement les fonctions d'interpolation nodales, on obtient un système de N équations en reportant dans [éq 4.1-1] :

$$j = 1, \ldots, N ; \quad \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} p_i \boldsymbol{grad}\, N_i(\boldsymbol{r}) . \boldsymbol{\Delta}\, N_j(\boldsymbol{r}) \, d\Omega = \rho_f \int_{\gamma_1} N_j \ddot{x}_n d\Gamma$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$\mathrm{HP} = \boldsymbol{\Phi}$ avec $\boldsymbol{\Phi}$ vecteur de composantes $\Phi_j = \rho_f \int_\Gamma N_j \ddot{x}_n d\Gamma$

avec $\boldsymbol{H}$ matrice de coefficients $H_{ij} = \int_\Omega \boldsymbol{grad}\, N_i . \boldsymbol{grad}\, N_j \, d\Omega$ éq 4.1-2

En toute rigueur, ce système est singulier. Il admet une infinité de solutions différant d'une constante. Il faut donc imposer une pression (condition aux limites de type Dirichlet) en un point du fluide pour lever l'indétermination sur la solution.

Ces précautions prises, en inversant le système [éq 4.1-2], on obtient le champ de pression dans tout le volume Ω de fluide, y compris à l'interface fluide/structure, là où il nous intéresse évidemment.

4.2 Calcul des coefficients de la matrice de masse ajoutée sur base modale

Il faut estimer numériquement la valeur de l'intégrale :

$$m_{il\,jk} = \int_{\gamma_l} p_{jk} \boldsymbol{X}_{il} . \boldsymbol{n} \, d\Gamma \qquad \text{éq 4.2-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

à partir d'un champ aux nœuds de pression représenté par un vecteur colonne noté $\boldsymbol{P}_{jk}$ et d'un champ aux nœuds de déplacement correspondant à une déformée modale de structure en air et représenté par le vecteur colonne $\boldsymbol{X}_{il}$.
Or, sur l'interface fluide/structure, le champ de pression approché p_{jk} dû à la discrétisation de l'interface en N éléments de bord peut s'écrire :

$$p_{jk}=\sum_{m=1}^{N} N_m(\boldsymbol{r})\, p_{jk_m}$$

tandis que le champ de déplacement "modal" s'écrit sur cette même discrétisation :

$$\mathbf{X}_{il}=\sum_{n=1}^{N} N_n(\mathbf{r})\, \boldsymbol{X}_{il_n}$$

Ainsi, en reportant ces deux expressions dans l'intégrale [éq 4.2-1], on obtient :

$$m_{il\,jk}\simeq\int_{\gamma_l}\Big(\sum_{m=1}^{N} N_m(\boldsymbol{r})\, p_{jk_m}\Big)\left[\sum_{n=1}^{N} N_n(\boldsymbol{r})\, X_{ilx_n} A\, n_x+\sum_{n=1}^{N} N_n(\boldsymbol{r})\, X_{ily_n} A\, n_y\right] d\,\Gamma$$

$$m_{il\,jk}\simeq\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jk_m}\Big(\int_{\gamma_l} N_m(\boldsymbol{r})\, N_n(\boldsymbol{r}) n_x\, d\,\Gamma\Big) X_{ilx_n}+\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jk_m}\Big(\int_{\gamma_l} N_m(\boldsymbol{r})\, N_n(\boldsymbol{r}) n_y\, d\,\Gamma\Big) X_{ily_n}$$

On suppose dans la démonstration que le problème est bidimensionnel.

Ceci peut se mettre sous la forme d'un produit scalaire, faisant intervenir un produit matrice vecteur :

$m_{il\,jk}=\mathbf{P}_{jk}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{X}_{\mathbf{ilx}}+\mathbf{P}_{jk}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{X}_{\mathbf{ily}}$ avec $\boldsymbol{A}_x$ matrice de coefficients $\int_{\gamma_l} N_i N_j n_x\, d\,\Gamma$

et $\boldsymbol{A}_y$ matrice de coefficients $\int_{\gamma_l} N_i N_j n_y\, d\,\Gamma$

5 Mise en œuvre dans *Code_Aster*

5.1 Analogie thermique

Pour résoudre le problème de Laplace en pression, on utilise une analogie thermique : il s'agit de résoudre l'équation de la chaleur en stationnaire avec un matériau de conductivité thermique égale à l'unité. Ainsi :

$$\begin{cases} \Delta\, p=0 \text{ dans } \Omega \\ \left(\dfrac{\partial\, p}{\partial\, n}\right)_G=-\rho_f\, \ddot{\mathbf{x}}_s\cdot\mathbf{n} \text{ dans } \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} div(\lambda\, grad\, T)=0 \quad \text{dans } \Omega \Leftarrow \Delta\, T=0 \text{ si } \lambda=1 \\ \left(\dfrac{\partial\, T}{\partial\, n}\right)_G=\Phi_n \text{dans } \Gamma \end{cases}$$

T représente la température dans le milieu, elle joue le rôle de la pression dans le milieu fluide. Φ_n est le flux de chaleur normal à la paroi, il joue le rôle du terme $-\rho_f\, \ddot{\mathbf{x}}_s.\boldsymbol{n}$ qui est assimilable à la variation au cours du temps du flux de masse (fluide) à la paroi de la structure. Cette quantité $-\rho_f\, \ddot{\mathbf{x}}_s.\boldsymbol{n}$ est en effet homogène à une masse divisée par une surface et un temps au carré.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Mise en œuvre pratique

L'opérateur CALC_MATR_AJOU [U4.66.01] a été développé pour prendre en compte le couplage inertiel (masse ajoutée : OPTION = 'MASS_AJOU') entre des structures baignées dans un même fluide parfait, incompressible et au repos. Le fluide est décrit par des caractéristiques thermiques équivalentes (opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01]) et la partie du maillage représentant est affectée par des éléments thermiques (opérateur AFFE_MODELE [U4.41.01]). Cet opérateur CALC_MATR_AJOU permet aussi de calculer la raideur ou l'amortissement ajouté. Afin de faciliter son usage dans certains cas, il existe aussi la macro-commande MACRO_MATR_AJOU [U4.66.11].

L'opérateur utilise cinq mots-clés obligatoires :

- le mot-clé MODELE_FLUIDE : c'est sur ce modèle qu'on résout le problème de Laplace avec conditions aux limites de Von Neumann (ou son problème thermique équivalent),
- le mot-clé MODE_MECA (ou CHAM_NO, ou MODELE_GENE) : ce mot-clé permet de calculer les conditions aux limites de type flux à la paroi de la structure,
- le mot-clé MODELE_INTERFACE : c'est sur ce modèle qui comprend tous les éléments thermiques de bord de l'interface fluide/structure qu'on calcule le produit scalaire mentionné au paragraphe [§4.2],
- le mot-clé CHAM_MATER : il s'agit du matériau fluide (décrit par des caractéristiques thermiques équivalentes),
- le mot-clé CHARGE : c'est une charge thermique (température imposée en un nœud quelconque du maillage fluide) qui correspond à la condition à la limite de Dirichlet pour lever la singularité du problème de Laplace (voir [§4.1]).

On obtient ainsi une matrice de masse ajoutée généralisée. Cette matrice possédant un profil ligne de ciel mais plein (opérateur NUME_DDL_GENE [U4.65.03]) peut être sommée à la matrice de masse généralisée de la structure en utilisant l'opérateur COMB_MATR_ASSE [U4.72.01]. Ceci permet de calculer les modes couplés fluide/structure des structures immergées (modes "mouillés") (opérateur CALC_MODES [U4.52.02]).

6 Bibliographie

1) C. CONCA, J. PLANCHARD, B. THOMAS, M. VANNINATHAN : "Problèmes mathématiques en couplage fluide/structure" _ EYROLLES (1994).

2) F. BEAUD, G. ROUSSEAU : "Validation inter-logiciels du calcul de masse ajoutée avec le *Code_Aster* et le code CALIFE", HT-32/95/004/A

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	***G.ROUSSEAU*** *(EDF/EP/AMV)*	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)