Réponse sismique par méthode spectrale

Résumé :

L'étude de la réponse d'une structure sous l'effet de mouvements imposés de type sismique, avec un mouvement imposé unique (mono-appui) ou multiple (multi-appui) est possible en analyse transitoire (time history). On se reportera à la note [R4.05.01].

Pour des études de dimensionnement, on peut ne s'intéresser qu'à une estimation des efforts maximaux induits par les sollicitations, pour évaluer la marge de sécurité avec des règlements de construction, sans recourir à une analyse transitoire.

La méthode spectrale s'appuie sur la notion de spectre d'oscillateur d'un accélérogramme de séisme. On détaille la méthode d'élaboration de ce spectre de réponse disponible dans l'opérateur CALC_FONCTION [U4.32.04].

On montre comment ce spectre d'oscillateur peut être utilisé pour évaluer un majorant de la réponse en déplacement relatif d'un oscillateur simple. Cette approche se justifie si on ne désire pas connaître l'histoire des déplacements et des efforts, en se limitant à l'analyse des effets inertiels.

La méthode spectrale utilise des notions générales de la méthode de recombinaison modale [R5.06.01].

On décrit les différentes règles de combinaison utilisables pour obtenir un majorant réaliste mais conservatif de la réponse maximale de la structure. Ces méthodes sont disponibles dans l'opérateur COMB_SISM_MODAL [U4.84.01].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notion de spectre d'oscillateur....4
1.1 Mouvement imposé défini par un accélérogramme A(t)....4
1.2 Spectre d'oscillateur d'un accélérogramme....5
1.2.1 Spectre d'oscillateur en déplacement relatif....5
1.2.2 Spectre d'oscillateur en pseudo-vitesse relative....6
1.2.3 Spectre d'oscillateur en pseudo-accélération absolue....7
1.3 Détermination du spectre d'oscillateur....7
1.4 Représentation et utilisation des spectres d'oscillateurs....8
1.4.1 Représentation tri-logarithmique....8
1.4.2 Utilisation des spectres d'oscillateurs....8
1.5 Spectres d'oscillateurs utilisés pour des études....9
1.5.1 Spectre de sol de conception et vérification des bâtiments....9
1.5.2 Spectre de plancher de vérification des équipements....10
2 Réponse sismique par recombinaison modale....10
2.1 Rappels de la formulation....10
2.1.1 Mouvement imposé multiple : multi-appui....12
2.1.2 Mouvement imposé unique : mono-appui....13
2.1.3 Résumé....14
2.2 Réponse sur base modale....14
2.2.1 Réponse temporelle d'un oscillateur modal....14
2.2.2 Facteur de participation modal en mono-appui....15
2.2.3 Facteur de participation modal en multi-appui....15
3 Réponse sismique par méthode spectrale....16
3.1 Réponse spectrale d'un oscillateur modal en mono-appui....16
3.2 Réponse spectrale d'un oscillateur modal en multi-appui....16
3.3 Généralisation à d'autres grandeurs....16
4 Règles de combinaison des réponses modales....17
4.1 Direction du séisme et réponse directionnelle....17
4.2 Choix des modes propres à combiner....17
4.2.1 Expression de l'énergie de déformation modale....18
4.2.2 Expression de l'énergie cinétique modale....18
4.2.3 Conclusion....19
4.3 Correction statique par pseudo-mode....19
4.3.1 Mono-appui....19
4.3.2 Multi-appui....20
4.4 Généralités sur les règles de combinaison....21
4.4.1 Combinaison arithmétique....21

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.4.2 Combinaison en valeur absolue....21
4.4.3 Combinaison quadratique simple....21
4.5 Établissement de la réponse directionnelle en mono-appui....22
4.5.1 Réponse combinée des oscillateurs modaux....22
4.5.1.1 Somme des valeurs absolues....22
4.5.1.2 Combinaison quadratique simple (CQS)....22
4.5.1.3 Combinaison quadratique complète (CQC)....23
4.5.1.4 Combinaison de ROSENBLUETH....23
4.5.1.5 Combinaison avec règle des 10%....24
4.5.1.6 Combinaison selon Gupta....24
4.5.2 Contribution de la correction statique des modes négligés....24
4.6 Établissement de la réponse directionnelle en multi-appui....24
4.6.1 Calcul de la réponse globale....24
4.6.1.1 Cas avec groupes d'appuis décorrélés....24
4.6.1.2 Cas avec appuis corrélés....25
4.6.2 Calcul séparé des composantes primaire et secondaire de la réponse....25
4.6.2.1 Composante primaire RIX (réponse inertielle)....25
4.6.2.2 Composante secondaire RII (réponse quasi-statique)....26
4.6.3 Cumul sur les modes....26
4.6.4 Contribution du pseudo-mode....26
4.6.5 Contribution des mouvements d'entraînement....26
4.6.6 Cumul sur les appuis....26
4.6.7 Équivalence mono-appui multi-appui....26
4.7 Combinaison des réponses directionnelles....27
4.7.1 Combinaison quadratique....27
4.7.2 Combinaison de NEWMARK....27
4.8 Avertissement sur les combinaisons....27
4.9 Pratiques réglementaires....28
4.9.1 Partition des composantes primaires et secondaires de la réponse....28
4.9.2 Méthode du spectre enveloppe....28
5 Bibliographie....29
6 Description des versions du document....29

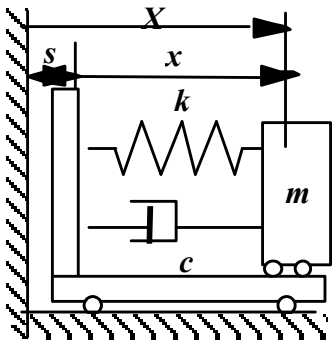
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notion de spectre d'oscillateur

La méthode spectrale pour l'étude de la réponse d'une structure sous l'effet de mouvements imposés de type sismique s'appuie sur la notion de spectre d'oscillateur d'un accélérogramme de séisme.

1.1 Mouvement imposé défini par un accélérogramme A(t)

Pour un mouvement imposé s de type sismique, on peut traiter le problème en déplacement absolu X ou en déplacement relatif x tel que : $X=x+s$. Les équations générales du mouvement d'un oscillateur simple s'écrivent alors :



	Mouvement absolu	**Mouvement relatif**
	$m\ddot{X}+c\dot{X}+kX=c\dot{s}+ks$	$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{s}$

On retient la formulation à partir du **mouvement relatif** pour deux raisons principales :

- l'analyse sismique des structures utilise les contraintes induites par les effets inertiels du séisme, contraintes calculées à partir des déformations de la structure qui s'expriment à partir des déplacements relatifs ;
- la caractérisation du signal d'excitation peut se réduire dans ce cas à l'accélérogramme du séisme $\ddot{s}=A(t)$, grandeur fournie directement par les sismographes. Les signaux de déplacement s et de vitesse $\dot{s}$ ne sont en général pas disponibles dans les bases de données géotechniques.

Pour la détermination de la réponse d'un oscillateur simple à un mouvement imposé et les notations conventionnelles, on se reportera à l'annexe 2 [R4.05.03 Annexe 2].

Si le séisme est défini par un accélérogramme $A(t)$, accélération absolue appliquée à la base, l'équation réduite est dans ce cas :

$$\ddot{x}+2\xi\ \omega_0\dot{x}+\omega_o^2 x=-\ddot{s}=-A(t) \qquad \text{éq 1.1-1}$$

La solution de ce problème est l'intégrale de DUHAMEL présentée à l'annexe A [éq A3.3-1] :

$$x(t)=\frac{1}{\omega'_0}\int_0^t A(\tau)\,e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\sin\omega'_0(t-\tau)\,d\tau=f(A,\xi,\omega'_0) \qquad \text{éq 1.1-2}$$

$$\omega'_0=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.2 Spectre d'oscillateur d'un accélérogramme

La notion de spectre d'oscillateur a été introduite initialement pour comparer entre eux les effets de différents accélérogrammes. Le spectre de FOURIER d'un signal $A(t)$ renseigne sur son contenu fréquentiel. La réponse d'un système mécanique à un mouvement imposé à la base dépend largement des caractéristiques dynamiques de ce système : fréquences propres et amortissement réduit (ξ, ω'_0). L'annexe A détaille cet aspect.

Si l'on souhaite connaître la valeur maximale de la réponse d'un oscillateur simple aux paramètres , (A, ξ, ω'_0) on doit évaluer l'intégrale de DUHAMEL qui fournit la réponse de l'oscillateur [éq 1.1-2] à une excitation imposée à la base.

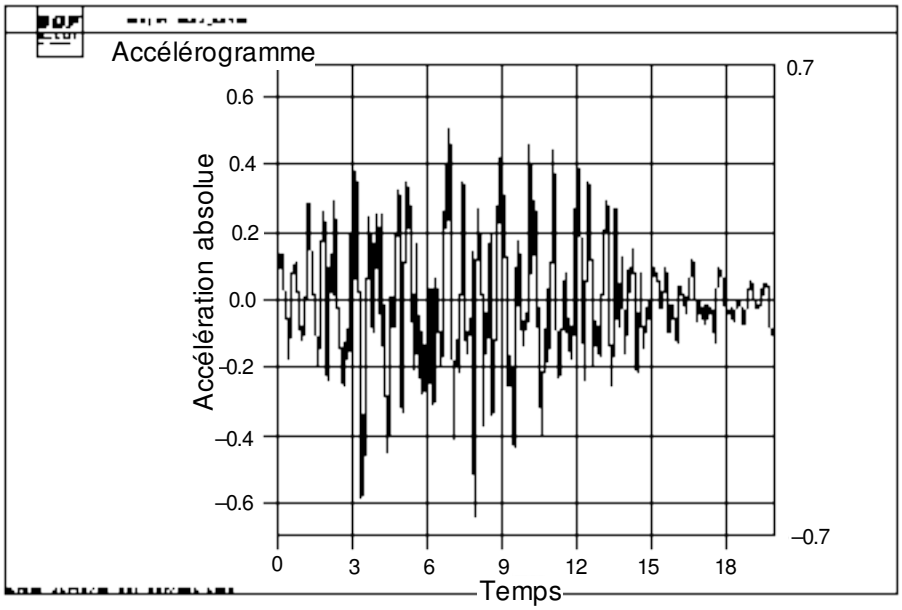


Figure 1.2-a : Accélérogramme

1.2.1 Spectre d'oscillateur en déplacement relatif

A partir de l'intégrale de DUHAMEL, on peut définir le spectre d'oscillateur d'un accélérogramme $A(t)$ comme la fonction des valeurs maximales du déplacement relatif $x(t)=f(A,\xi,\omega'_0)$ pour chaque valeur de (ξ, ω'_0) en rappelant que : $\omega'_0=\omega_0\sqrt{(1-\xi^2)}$.

$$Srox(A,\xi,\omega'_0)=|x(t)|_{max}$$

$$x(t)=\frac{1}{\omega'_0}\int_0^t A(\tau)\,e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\sin\omega'_0(t-\tau)\,d\tau=f(A,\xi,\omega'_0)$$

On constate, sur la figure [Figure 1.2.1-a], qu'au delà d'une certaine fréquence ($35\,Hz$ ici), dite fréquence de coupure du spectre, il n'y a pas d'amplification dynamique significative : le déplacement relatif est nul.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

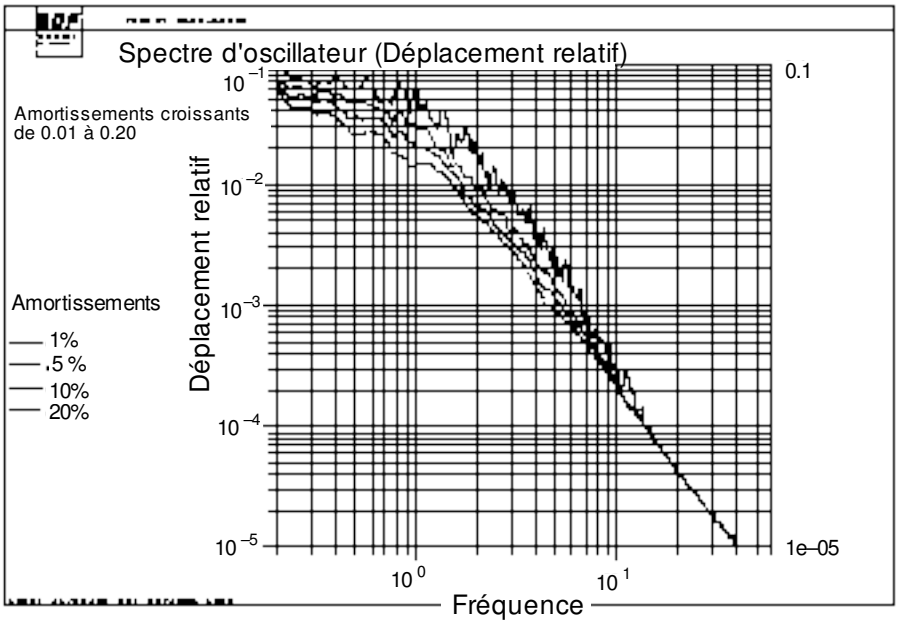


Figure 1.2.1-a : Spectre d'oscillateur en déplacement relatif

1.2.2 Spectre d'oscillateur en pseudo-vitesse relative

Pour des structures avec amortissement réduit faible $\xi < 0.2 = 20\%$, pour lesquelles il est acceptable d'assimiler ω_0 et ω'_0, on utilise couramment le spectre de pseudo-vitesse défini par :

$$Sro\dot{x}(A,\xi,\omega_0) = \omega_0 Srox(A,\xi,\omega_0) = \omega_0 |x(t)|_{max}$$

La pseudo vitesse est la valeur de la vitesse qui donne une valeur de l'énergie cinétique de la masse de l'oscillateur égale à celle de l'énergie de déformation maximale du ressort :

$$E_c = \frac{1}{2} m(\dot{x}(t))^2 = \frac{1}{2} m\left[Sro\dot{x}(A,\xi,\omega_0)\right]^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 |x(t)|_{max}^2 = \frac{1}{2} k|x(t)|_{max}^2 = E_p$$

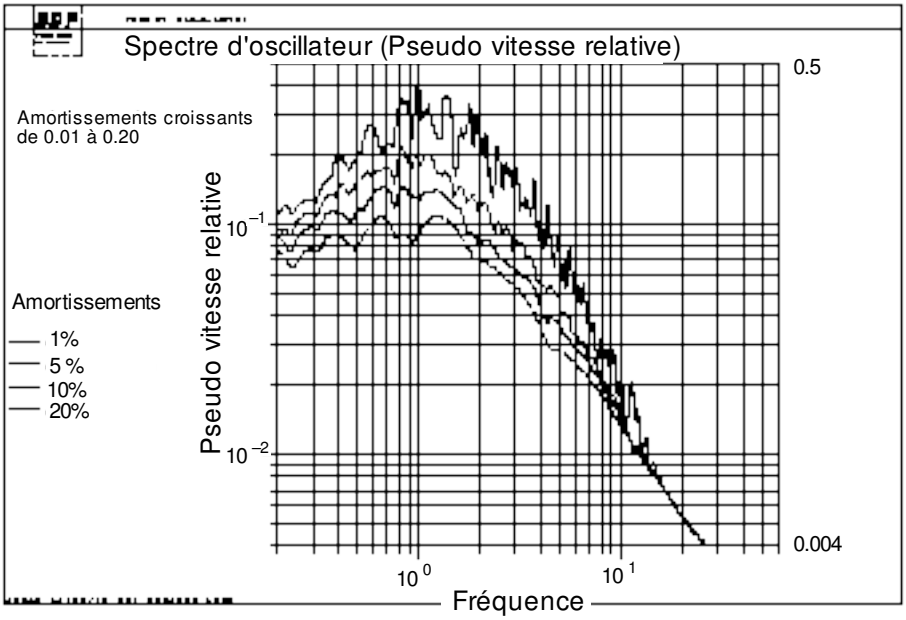


Figure 1.2.2-a : Spectre d'oscillateur en pseudo vitesse relative

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.2.3 Spectre d'oscillateur en pseudo-accélération absolue

De même pour un amortissement réduit faible, on peut définir le spectre de pseudo-accélération défini par :

$$Sro\,\ddot{x}(A,\xi,\omega_0)=\omega_O^2\,Srox(A,\xi,\omega_0)=\omega_0^2|x(t)|_{max}$$

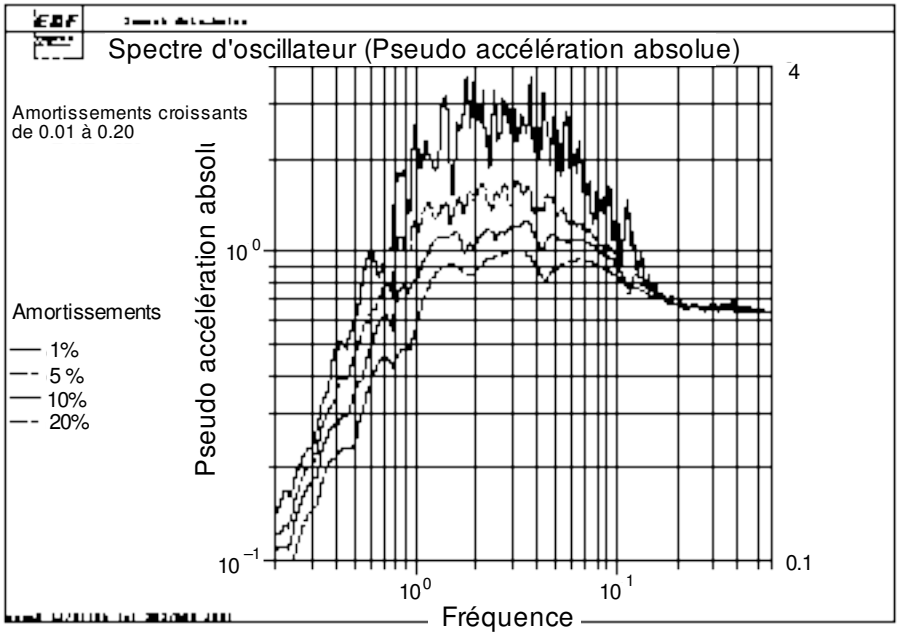


Figure 1.2.3-a : Spectre d'oscillateur en pseudo accélération absolue

L'intérêt de ce spectre de pseudo-accélération réside dans le fait que $Sro\,\ddot{x}(A,\xi,\omega_0)$ est une bonne approximation du maximum d'accélération absolue $\ddot{X}(t)$. En effet, à l'instant où le déplacement relatif est maximal, la vitesse relative s'annule et l'équation réduite s'écrit $\ddot{x}+0+\omega_0^2 x_{max}=-\ddot{s}$, ce qui nous montre que

$$|\ddot{X}|_{max}=|\ddot{x}+\ddot{s}|_{max}=|\omega_0^2 x_{max}|=\omega_O^2\,Srox(A,\xi,\omega_0)=Sro\,\ddot{x}(A,\xi,\omega_0)$$

Pour cette raison, ce spectre d'oscillateur est appelé **spectre de pseudo-accélération absolue**.

L'asymptote de ce spectre à haute fréquence (accélération à période nulle) correspond à la réponse d'un oscillateur de haute fréquence propre, c'est-à-dire très rigide. Dans ce cas, la masse tend à suivre intégralement le mouvement imposé de la base. Cette asymptote correspond donc à l'accélération maximale $|A(t)|_{max}$ du mouvement imposé (sol ou point d'accrochage de l'oscillateur). Elle est atteinte en pratique à partir de la fréquence de coupure du spectre. Pour cette raison, on dit qu'un accélérogramme est calé, par exemple, sur $0.15\,g$, quand son amplitude maximale et son spectre d'oscillateur de pseudo-accélération absolue à période nulle sont égaux à $0.15\,g$.

1.3 Détermination du spectre d'oscillateur

La détermination du spectre d'oscillateur d'un accélérogramme $A(t)$ est disponible dans l'opérateur CALC_FONCTION [U6.34.04] avec le mot clé SPEC_OSCI : il est obtenu par intégration numérique de l'équation de DUHAMEL par la méthode de NIGAM [R5.05.01]. Cette commande fournit le spectre de pseudo-accélération absolue et, sur demande, le spectre de pseudo-vitesse ou le spectre de déplacement relatif.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.4 Représentation et utilisation des spectres d'oscillateurs

1.4.1 Représentation tri-logarithmique

Les spectres de réponse d'oscillateur sont couramment représentés par des graphiques tri-logarithmiques qui permettent de lire sur un seul graphique les trois grandeurs : le déplacement relatif, la pseudo-vitesse relative, la pseudo-accélération absolue.

Cette représentation est obtenue en traçant le spectre de pseudo-vitesse relative $Sro\,\dot{x}$ en coordonnées $\log-\log$ telles que $\log Sro\,\dot{x}=f(\log\omega_0)$, sur lequel on reporte deux graduations complémentaires à $\pm 45°$ si l'échelle des graduations logarithmiques est la même sur les deux axes :

- une graduation logarithmique à $+45°$ pour mesurer les déplacements relatifs $\log Sro\,x=\log(\frac{Sro\,\dot{x}}{\omega_0})=\log Sro\,\dot{x}-\log\omega_0$
- une graduation logarithmique à $-45°$ pour mesurer les accélérations absolues $\log Sro\,\ddot{x}=\log(\omega_0\,Sro\,\dot{x})=\log Sro\,\dot{x}+\log\omega_0$

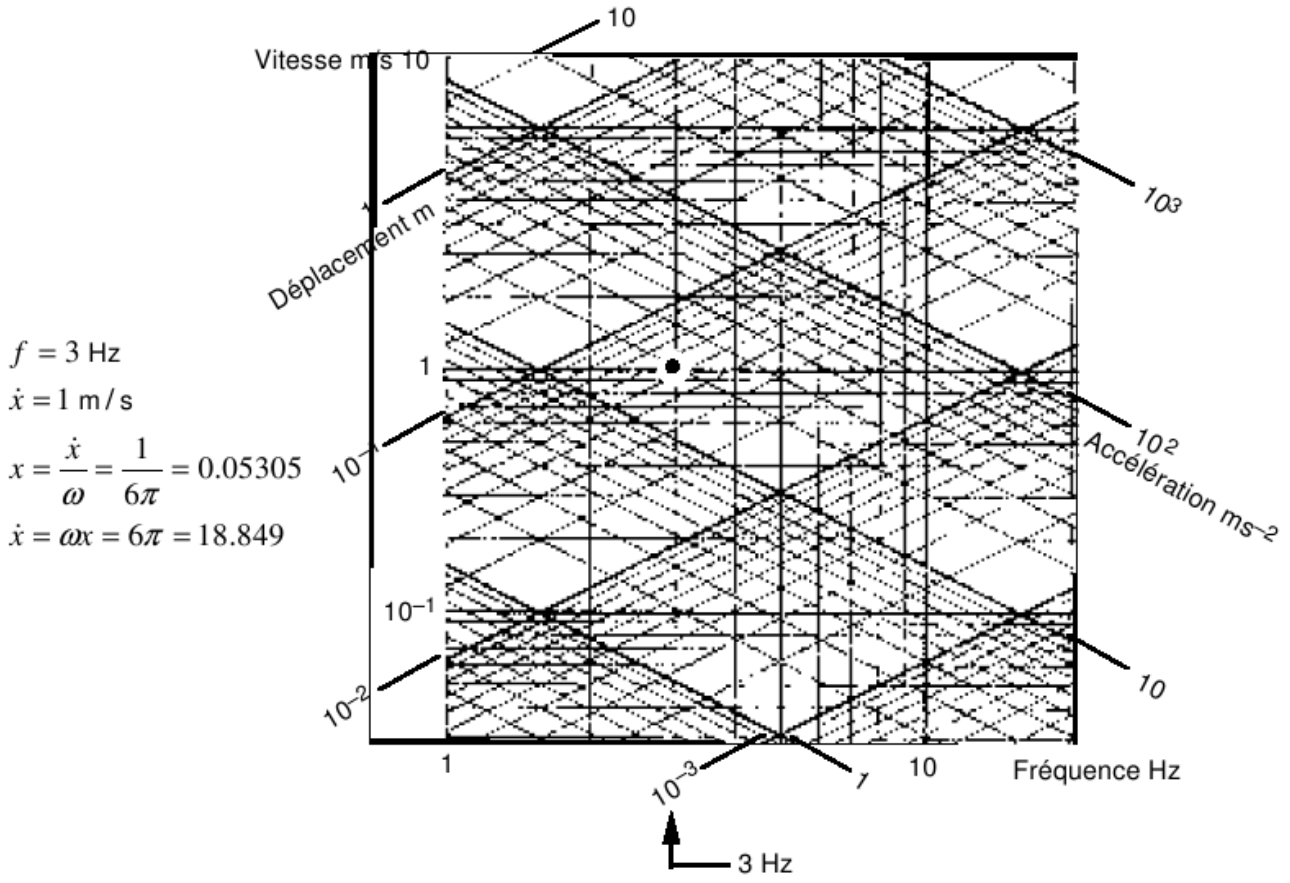


Figure 1.4.1-a : Représentation tri-logarithmique

1.4.2 Utilisation des spectres d'oscillateurs

Pour évaluer la réponse maximale d'un oscillateur modal (ω_i,ξ_i) à un accélérogramme $A(t)$, on utilise **le spectre de pseudo-accélération absolue**.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il est représenté dans *Code_Aster* par une nappe constituée de plusieurs fonctions $Sro\ \ddot{x} = f(freq)$ à $\xi_n = cte$.

On utilise une interpolation linéaire sur l'amortissement réduit pour $\xi_n < \xi_i < \xi_{n+1}$ car l'amplification dynamique à la résonance pour $\omega = \omega_0$ (soit $\eta = 1$) est égale à $\frac{x_m}{s_0} = \frac{1}{2\xi_i}$ [éq A2.2-3].

La variation du module de la réponse au voisinage de la résonance justifie également une interpolation logarithmique pour $\omega_m < \omega_i < \omega_{m+1}$. Le spectre d'oscillateur doit être représenté avec une discrétisation en fréquence suffisamment fine pour limiter les effets de l'interpolation.

1.5 Spectres d'oscillateurs utilisés pour des études

Pour les études d'installations industrielles, telles que les centrales nucléaires, l'analyse sismique conduit à établir plusieurs modèles :

- un modèle du génie civil de conception des bâtiments pour déterminer :
  - les sollicitations accidentelles pour le calcul des ossatures de ces bâtiments ;
  - les mouvements imposés aux points d'accrochage des équipements (cuve de réacteur, appuis des réseaux de tuyauteries, armoires électriques, ..) à différents niveaux des bâtiments ;
- des modèles d'étude de vérification de chaque équipement soumis aux mouvements imposés amplifiés par le comportement dynamique des bâtiments.

1.5.1 Spectre de sol de conception et vérification des bâtiments

A ce stade, les équipements ne sont connus que comme des surcharges inertielles et l'on peut admettre qu'ils n'apportent aucune rigidité au bâtiment. Les structures sont dans ce cas soumises à un spectre de sol.

Le contenu fréquentiel d'un spectre d'oscillateur reflète celui de l'accélérogramme utilisé et est donc "marqué" par les propriétés du sol au lieu d'enregistrement. Pour élaborer le spectre de sol au stade du projet, il est donc recommandé d'établir les spectres d'oscillateurs pour plusieurs accélérogrammes et de construire un spectre enveloppe qui lisse les anti-résonances.

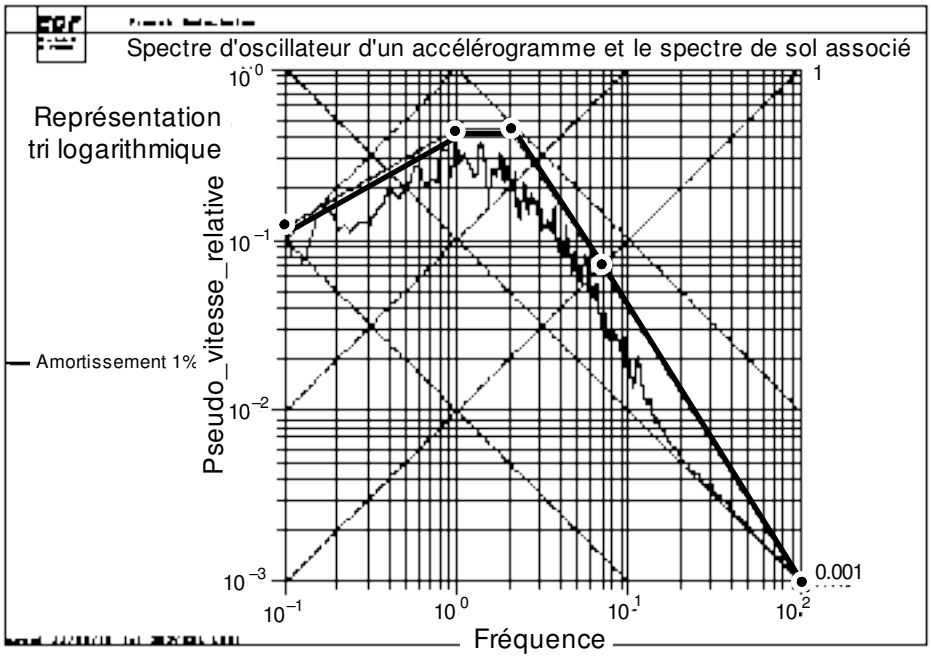


Figure 1.5.1-a : Spectre de sol pour un projet

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque :

Dans de nombreux cas, on ne connaît pas le mouvement de rotation imposé par le séisme, puisque les accélérogrammes de séismes connus sont issus d'enregistrements de sismographes, capteurs à un degré de liberté de translation.

1.5.2 Spectre de plancher de vérification des équipements

L'étude du comportement dynamique des équipements soumis aux mouvements imposés par la structure support aux points d'appuis est possible à partir des accélérogrammes de réponse en ces points, résultats de l'analyse transitoire du comportement du bâtiment : ces accélérogrammes, dits de plancher, permettent de construire des spectres de planchers.

Pour une vérification de l'équipement, on peut se limiter à une analyse spectrale à partir des spectres de plancher et des déplacements différentiels imposés aux appuis.

Les spectres de plancher sont représentatifs de l'amplification dynamique apportée par la structure support : un lissage du spectre peut être utile pour prendre en considération l'incertitude sur la position des fréquences propres du bâtiment, mais on veillera à conserver des marges réalistes, puisque le spectre de sol est déjà un majorant de la sollicitation sismique. Le spectre d'oscillateur doit être représenté avec une discrétisation en fréquence suffisamment fine pour "capter" les résonances de la structure.

Remarque :

Des techniques de détermination directe des spectres de planchers, à partir du spectre de sol et des modes de la structure ont été mises au point [bib1], mais ne sont pas disponibles actuellement dans Code_Aster.

2 Réponse sismique par recombinaison modale

2.1 Rappels de la formulation

La méthode spectrale d'analyse sismique s'appuie sur la formulation de la réponse dynamique transitoire par recombinaison modale présentée dans les documents "Méthodes de RITZ en dynamique linéaire et non linéaire" [R5.06.01] et "Analyse sismique par méthode directe ou recombinaison modale" [R4.05.01].

Résumons les principes de la démarche détaillée dans la note [R4.05.01] pour une structure représentée sous forme discrétisée par le système matriciel :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}+\mathbf{K}\,\mathbf{U}=\mathbf{F}(t) \qquad \text{éq 2.1-1}$$

Notations en mouvement absolu

$\mathbf{U}$ *représente toutes les composantes du mouvement (les degrés de liberté internes de structure et les degrés de liberté soumis à un mouvement imposé) : on les sépare sous la forme* $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}$ *. Les opérateurs décrivant la structure deviennent :*

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{xx} & \mathbf{k}_{xs}\\ \mathbf{k}_{sx} & \mathbf{k}_{ss}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_{xx} & \mathbf{c}_{xs}\\ \mathbf{c}_{sx} & \mathbf{c}_{ss}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{m}_{xx} & \mathbf{m}_{xs}\\ \mathbf{m}_{sx} & \mathbf{m}_{ss}\end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le problème en mouvement relatif de la structure par rapport aux appuis avec la décomposition Mouvement absolu = Mouvement relatif + Mouvement d'entraînement conduit à introduire le changement de variable $\mathbf{U}=\mathbf{u}+\mathbf{E}$.

Hypothèse

On suppose qu'aucune force d'excitation n'est appliquée sur les degrés de liberté de structure, ce qui réduit le second membre $\mathbf{F}(t)$ *, avec la même partition à* $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_x\\ \mathbf{r}_s\end{pmatrix}$

L'équation 2.1-1 devient alors :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{m}_{xx} & \mathbf{m}_{xs}\\ \mathbf{m}_{sx} & \mathbf{m}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{X}}\\ \ddot{\mathbf{s}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{c}_{xx} & \mathbf{c}_{xs}\\ \mathbf{c}_{sx} & \mathbf{c}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{X}}\\ \dot{\mathbf{s}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{xx} & \mathbf{k}_{xs}\\ \mathbf{k}_{sx} & \mathbf{k}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_x\\ \mathbf{r}_s\end{bmatrix} \qquad \textbf{éq. 2.1-2}$$

Le premier système d'équations extrait de [éq. 2.1-2] :

$$\mathbf{m}_{xx}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{c}_{xx}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{k}_{xx}\mathbf{X}=-\mathbf{m}_{xs}\ddot{\mathbf{s}}-\mathbf{c}_{xs}\dot{\mathbf{s}}-\mathbf{k}_{xs}\mathbf{s} \qquad \textbf{éq. 2.1-3}$$

permet la détermination de la réponse des degrés de liberté internes de structure, tandis que le second :

$$\mathbf{m}_{sx}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{c}_{sx}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{k}_{sx}\mathbf{X}+\mathbf{m}_{ss}\ddot{\mathbf{s}}+\mathbf{c}_{ss}\dot{\mathbf{s}}+\mathbf{k}_{ss}\mathbf{s}=r$$

permet la détermination de la réaction $r(t)$ entre la structure et ses supports.

Notations en mouvement relatif

On décompose le vecteur du mouvement $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}$ en la somme de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{E}$ avec :

$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{xs}\mathbf{s}_x\\ \mathbf{s}_x\end{pmatrix}$ le mouvement de déformation statique de la structure sous l'effet des déplacements imposés aux supports, qu'on appelle mouvement d'entraînement,

et $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{0}_s\end{pmatrix}$ le mouvement de déformation résiduelle de la structure par rapport à la déformation précédente pour obtenir la déformation absolue $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\mathbf{e}_{xs}\mathbf{s}_s$ est obtenu en effectuant le relèvement statique, sur les degrés de liberté internes de la structure, des déplacements imposés aux appuis soit (en utilisant la première ligne de l'équation 2.1-2 et en éliminant les composantes dynamiques) : $\mathbf{e}_{xs}\mathbf{s}_s=-\mathbf{k}_{xx}^{-1}\mathbf{k}_{xs}\mathbf{s}_s$, soit $\mathbf{e}_{xx}=-\mathbf{k}_{xx}^{-1}\mathbf{k}_{xs}$.

Le passage du mouvement absolu au mouvement relatif peut également s'écrire en introduisant l'opérateur de passage Ψ :

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}=\mathbf{u}+\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{0}_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{xs}\mathbf{s}_s\\ \mathbf{s}_s\end{pmatrix}=\Psi\begin{pmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{s}_s\end{pmatrix} \text{ avec } \Psi=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{xx} & \mathbf{e}_{xs}\\ \mathbf{0}_{sx} & \mathbf{I}_{ss}\end{bmatrix}$$

Le système [éq. 2.2.1-1] prend alors la forme générale :

$$\mathbf{M}\Psi\begin{pmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_x\\ \ddot{\mathbf{s}}_s\end{pmatrix}+C\Psi\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}_x\\ \dot{\mathbf{s}}_s\end{pmatrix}+\mathbf{K}\Psi\begin{pmatrix}\mathbf{x}_x\\ \mathbf{s}_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_x\\ \mathbf{r}_s\end{pmatrix} \qquad \text{éq 2.1-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.1 Mouvement imposé multiple : multi-appui

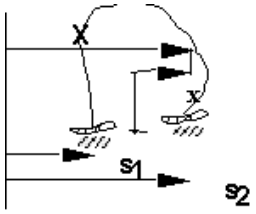
Cette situation correspond à un nombre discret de points de liaison de la structure à des appuis soumis à des déplacements imposés différents.

Intéressons-nous d'abord à la réponse quasi-statique $\mathbf{X}^{qs}$ des degrés de liberté de structure. Alors, $\mathbf{e}_{xs}=\varphi_s$, où la matrice φ_s désigne la matrice des modes statiques réduite aux degrés de liberté de structure.

On obtient donc : $\mathbf{X}^{qs}=\varphi_s \mathbf{s}$

La matrice φ_s regroupe $6\,n_{appuis}$ modes statiques pour les modèles de structures et 3 fois le nombre d'appuis pour les modèles de milieux continus. Chaque mode statique $\varphi_s=-\mathbf{k}_{xx}^{-1}\mathbf{k}_{xs_j}$ est un mode d'attache, correspondant à un déplacement imposé unitaire sur une composante d'appui, les autres composantes étant nulles, et produit par l'opérateur MODE_STATIQUE [28].

Le changement de repère peut alors s'exprimer par :



$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{0}_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varphi_s \mathbf{s}_s\\ \mathbf{s}_s\end{pmatrix}$$

La réponse absolue s'écrit alors sous la forme : $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{xx} & \varphi_s\\ \mathbf{0}_{sx} & \mathbf{I}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_x\\ \mathbf{s}_s\end{bmatrix}$

où $\mathbf{I}$ désigne la matrice identité, $\mathbf{x}_x$ le vecteur des déplacements relatifs de la structure par rapport aux supports, et $\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{xx} & \varphi_s\\ \mathbf{0}_{sx} & \mathbf{I}_{ss}\end{bmatrix}=\Psi$ est la matrice de passage du mouvement absolu au mouvement relatif.

Le système [éq. 2.1-3] devient ainsi :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{m}_{xx} & \mathbf{m}_{xs}\\ \mathbf{m}_{sx} & \mathbf{m}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{xx} & \varphi_s\\ \mathbf{0}_{sx} & \mathbf{I}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_x\\ \ddot{\mathbf{s}}_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{c}_{xx} & \mathbf{c}_{xs}\\ \mathbf{c}_{sx} & \mathbf{c}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{xx} & \varphi_s\\ \mathbf{0}_{sx} & \mathbf{I}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_x\\ \dot{\mathbf{s}}_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{xx} & \mathbf{k}_{xs}\\ \mathbf{k}_{sx} & \mathbf{k}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{xx} & \varphi_s\\ \mathbf{0}_{sx} & \mathbf{I}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_x\\ \mathbf{s}_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_x\\ \mathbf{r}_s\end{bmatrix} \qquad \text{éq 2.1.1-1}$$

La première équation de ce système s'écrit :

$$\mathbf{m}_{xx}\ddot{\mathbf{x}}_x+\mathbf{c}_{xx}\dot{\mathbf{x}}_x+\mathbf{k}_{xx}\mathbf{x}_x=-\left(\mathbf{m}_{xx}\varphi_s+\mathbf{m}_{xs}\right)\ddot{\mathbf{s}}_s-\left(\mathbf{c}_{xx}\varphi_s+\mathbf{c}_{xs}\right)\dot{\mathbf{s}}_s-\left(\mathbf{k}_{xx}\varphi_s+\mathbf{k}_{xs}\right)\mathbf{s}_s$$

La diagonalisation du terme de rigidité est acquise :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{xx} & \mathbf{k}_{xs}\\ \mathbf{k}_{sx} & \mathbf{k}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_s\\ \mathbf{I}_{ss}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_x\\ \mathbf{r}_s\end{bmatrix}$$

Concernant les termes d'amortissement, le découplage n'est acquis que si l'amortissement est proportionnel à la rigidité, hypothèse couramment admise.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ceci permet bien de découpler le système [éq 2.1.1-1] :

$$\mathbf{m}_{xx}\ddot{\mathbf{x}}_x+\mathbf{c}_{xx}\dot{\mathbf{x}}_x+\mathbf{k}_{xx}\mathbf{x}_x=\mathbf{g}_x(t) \qquad \text{éq 2.1.1-2}$$

avec $\mathbf{g}_x(t)=-\mathbf{m}_{xx}\left(\boldsymbol{\varphi}_s+\mathbf{m}_{xx}^{-1}\mathbf{m}_{xs}\right)\ddot{\mathbf{s}}_s=-\mathbf{m}_{xx}\ddot{\mathbf{x}}^{qs}-\mathbf{m}_{xs}\ddot{\mathbf{s}}_s$

Le chargement équivalent $\mathbf{g}_x(t)$ est dû à l'opposé de la somme de l'accélération des supports et de l'accélération relative aux modes statiques.
Cette formulation doit être interprétée comme la décomposition du mouvement de la structure en un mouvement d'entraînement correspondant à une déformée statique instantanée (déplacement différentiel des appuis) et un mouvement relatif correspondant aux effets inertiels autour de cette nouvelle déformée statique.

Cette interprétation est conforme au classement des sollicitations définies par les règles de construction (ASME, RCC-M) :

- les contraintes induites par le mouvement relatif sont, comme pour les sollicitations statiques, des contraintes primaires (effets d'inertie),
- les contraintes induites par les déplacements différentiels des appuis qui sont elles classées en contraintes secondaires.

La réponse des degrés de liberté de structure étant ainsi déterminée, la deuxième équation du système [éq. 2.1.1.-1] permet d'obtenir la réaction $\mathbf{s}(t)$.

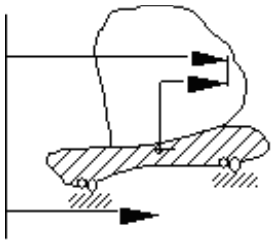
2.1.2 Mouvement imposé unique : mono-appui

Le mouvement d'entraînement correspond alors à un mouvement de corps rigide noté $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_R\\ \mathbf{s}_R\end{bmatrix}$. La matrice $\boldsymbol{\varphi}_R$ désigne la matrice regroupant les modes de corps rigides de la structure réduite aux degrés de liberté de structure.
La structure est soumise à ce mouvement global avec une accélération $\gamma(t)$, auquel on superpose le mouvement relatif des degrés de liberté de structure : l'accélération absolue peut donc s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\mathbf{U}}=\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{X}}\\ \ddot{\mathbf{s}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_x\\ \mathbf{0}_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_R\\ \mathbf{s}_R\end{bmatrix}\gamma(t)$$

La partie rigide du déplacement vérifie la relation : $\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{xx} & \mathbf{k}_{xs}\\ \mathbf{k}_{sx} & \mathbf{k}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_R\\ \mathbf{s}_R\end{bmatrix}=\mathbf{0}$

On en déduit que : $\boldsymbol{\varphi}_R=\boldsymbol{\varphi}_S\mathbf{s}_R$



$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{0}_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_R\mathbf{s}_x\\ \mathbf{s}_s\end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{xx} & \boldsymbol{\varphi}_R\\ \mathbf{0}_{sx} & \mathbf{I}_{ss}\end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le second membre de l'équation [éq. 2.1.1-2] peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{g}_x(t) = -\mathbf{m}_{xx}\left(\varphi_s + \mathbf{m}_{xx}^{-1}\mathbf{m}_{xs}\right)\ddot{\mathbf{s}}_{xx} = -\left(\mathbf{m}_{xx}\varphi_R + \mathbf{m}_{xs}\mathbf{s}_R\right)\gamma(t) \qquad \textbf{éq. 2.1.2-1}$$

Cette écriture met bien en évidence que le chargement sismique ne dépend que de l'accélération d'ensemble et l'inertie associée aux modes de corps rigides.

2.1.3 Résumé

Les équations [éq 2.1.1-2] et [éq 2.1.2-1] conduisent à la forme générale (écrite sans indice pour plus de clarté) :

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}\mathbf{z} = -\mathbf{m}\left(\varphi_X + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{m}_{xs}\right)\ddot{\mathbf{s}} = -\mathbf{m}\mathbf{O}\ddot{\mathbf{s}} \qquad \text{éq 2.1.3-1}$$

Les termes $\mathbf{m}_{xs}$ correspondent aux termes de couplage de la matrice de masse avec les degrés de liberté d'appui : cette fraction de la masse totale est très faible et il est justifié de la négliger. Rappelons que ce terme est effectivement nul pour les modèles de structures dont la matrice de masse est diagonale : modèles masse - ressort, modèles avec éléments de type "lumped mass".

Dans ce cas, on obtient les formules simplifiées :

- mono-appui : $\mathbf{O} = \varphi_R$ où φ_R sont les six modes de corps solide,
- multi-appui : $\mathbf{O} = \boldsymbol{\varphi}_s$ où $\boldsymbol{\varphi}_s$ sont les $6n$ appuis modes d'attache.

Le second membre $-\mathbf{m}\mathbf{O}$ est construit par l'opérateur CALC_CHAR_SEISME [U4.63.01].

2.2 Réponse sur base modale

2.2.1 Réponse temporelle d'un oscillateur modal

Si la structure étudiée est représentée par son spectre de modes propres réels à basse fréquence φ en base encastrée, solution de $\left(K - M\omega^2\right)\varphi = 0$ ou de $\left(k - m\omega^2\right)\varphi = 0$ on peut introduire une nouvelle transformation $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{q}$ et le système d'équations [éq 2.1.3-1] s'écrit, en utilisant la matrice de facteurs de participation modaux $\mathbf{P}$:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{c}\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}}\dot{\mathbf{q}} + \omega^2\mathbf{q} = -\frac{\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{m}\mathbf{O}}{\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}}\ddot{\mathbf{s}} = -\mathbf{P}\ddot{\mathbf{s}} \qquad \text{éq 2.2.1-1}$$

Hypothèse :

Pour des études industrielles relevant de l'analyse sismique par méthode spectrale, on se limite au cas de l'amortissement proportionnel, dit de RAYLEIGH, pour lequel on peut diagonaliser le terme $\frac{\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{c}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{m}\boldsymbol{\varphi}} = 2\xi\boldsymbol{\omega}$. *L'amortissement est alors représenté par un amortissement modal* ξ_i *éventuellement différent pour chaque mode propre [R4.05.01].*

Chaque mode propre, caractérisé par les paramètres $\left(\omega_i, \xi_i\right)$ est assimilé à un oscillateur simple dont le comportement est représenté dans le cas général par :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega^2 q_i = -(\mathbf{P}\ddot{\mathbf{s}})_i \qquad \text{éq 2.2.1-2}$$

Rappelons que les $\ddot{\mathbf{s}}$ sont des accélérations d'entraînement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2.2 Facteur de participation modal en mono-appui

Lorsque le mouvement d'entraînement est unique, [éq 2.2.1-2] devient :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega^2 q_i = -p_i \ddot{s} \qquad \text{éq 2.2.2-1}$$

avec

$$p_i = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T . \mathbf{m} . \mathbf{O}}{\boldsymbol{\varphi}_i^T . \mathbf{m} . \boldsymbol{\varphi}_i} = \frac{\boldsymbol{\varphi}^T . \mathbf{m} . \boldsymbol{\varphi}_R}{\mu_i} \qquad \text{éq 2.2.2-2}$$

où μ_i est la masse modale généralisée, qui dépend de la normalisation du mode propre. Énonçons quelques propriétés des facteurs de participation modale p_i dans le cas des modes rigides de translation, mais extensibles aux modes de rotation.

- Un mode φ_{RX}, que nous noterons δ_X, pour rappeler que les composantes dans la direction X sont unitaires, appartient à l'espace de dimension N degrés de liberté dont les N modes propres constituent une base dans laquelle $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{X} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\varphi}$.

  A partir des propriétés d'orthogonalité des modes propres $\boldsymbol{\varphi}_i^T . \mathbf{m} . \boldsymbol{\varphi}_j = \mu_i \delta_{ij}$, on identifie les coefficients α_i aux facteurs de participation modale p_{iX} dans la direction X et

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{X} = \sum_{i=1,\dots,N} p_{iX} \boldsymbol{\varphi}_i \qquad \text{éq 2.2.2-3}$$

- De plus $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{X}^\mathbf{T} . \mathbf{m} . \boldsymbol{\delta}_\mathbf{X} = m_T$ masse totale de la structure entraînée dans le mouvement $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{X}$, ce qui conduit à, ayant noté N le nombre total de degrés de liberté du système, égal au nombre de modes :

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{X}^\mathbf{T} . \mathbf{m} . \boldsymbol{\delta}_\mathbf{X} = \sum_{ij} p_{iX}\, p_{jX}\, \boldsymbol{\varphi}_j^T . \mathbf{m} . \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=1,\dots,N} p_{iX}^2 \mu_i \quad \text{et} \quad m_T = \sum_{i=1,\dots,N} p_{iX}^2 \mu_i \quad \text{ou} \quad \frac{\sum_{i=1,\dots,N} p_{iX}^2 \mu_i}{m_T} = 1 \qquad \text{éq 2.2.2-4}$$

Le paramètre modal p_{iX} dépend de la norme du mode propre et est accessible, pour chaque mode propre, dans le concept résultat de type `mode_meca` sous le nom `FACT_PARTICI_DX` ; de même $p_{iX}^2 \mu_i$, indépendant de la norme, est accessible sous le nom de `MASS_EFFE_UN_DX`.

2.2.3 Facteur de participation modal en multi-appui

Pour un mouvement imposé multiple, [éq 2.2.1-2] devient :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega^2 q_i = -\sum_j p_{ij} \ddot{s}_j \qquad \text{éq 2.2.3-1}$$

avec

$$p_{ij} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T . \mathbf{m} . \mathbf{O}}{\boldsymbol{\varphi}_i^T . \mathbf{m} . \boldsymbol{\varphi}_i} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T . \mathbf{m} . \boldsymbol{\varphi}_{s_j}}{\mu_i} \qquad \text{éq 2.2.3-2}$$

où μ_i est la masse modale généralisée, qui dépend de la normalisation du mode propre et les p_{ij} peuvent être considérés comme des facteurs de participation relatifs au mode i et à une direction j de mouvement imposé d'un appui.

Comme précédemment, on peut établir [bib4] les deux propriétés :

$$\boldsymbol{\varphi}_{sj} = \sum_i p_{ij} \boldsymbol{\varphi}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi}_{sj}^T . \mathbf{m} . \boldsymbol{\varphi}_{sj} = \sum_{i=1,\dots,N} p_{ij}^2 \mu_i \qquad \text{éq 2.2.3-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On ne fait, à ce stade, aucune hypothèse de dépendance entre les différents termes p_{ij} . Rappelons que les composantes $\ddot{s}_j$ expriment l'accélération d'entraînement appliquée à une direction d'appui j .
Les facteurs de participation p_{ij} ne sont pas construits indépendamment et n'apparaissent que comme variables intermédiaires dans la commande COMB_SISM_MODAL [U4.84.01].

3 Réponse sismique par méthode spectrale

La méthode spectrale est une technique approchée d'évaluation du maximum de la réponse de la structure à partir des maximums de réponse de chaque oscillateur modal lus sur le spectre d'oscillateur de l'excitation.

3.1 Réponse spectrale d'un oscillateur modal en mono-appui

La réponse maximale en déplacement relatif d'un oscillateur modal (ω_i, ξ_i) pour une direction X est déterminée en lisant sur un spectre d'oscillateur de pseudo-accélération absolue confer [§1.4.2] la valeur de la pseudo-accélération absolue $a_{iX} = Sro\,\ddot{x}_X(A, \xi_i, \omega_i)$ et en divisant par ω_i^2 , d'où :

$$q_{iXmax} = p_{iX} \frac{SRO\,\ddot{x}_X(A, \xi_i, \omega_i)}{\omega_i^2} = p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i^2} \qquad \text{éq 3.1-1}$$

La contribution de cet oscillateur au déplacement relatif de la structure pour la composante x^k dépend du facteur de participation et de la composante φ_i^k dans l'espace physique :

$$x_{iXmax}^k = \phi_i^k q_{iXmax} = \phi_i^k p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i^2} \qquad \text{éq 3.1-2}$$

et la contribution à la pseudo accélération absolue $\ddot{x}^k$ est de même $\ddot{x}_{iXmax}^k = \phi_i^k p_{iX} a_{iX}$.

3.2 Réponse spectrale d'un oscillateur modal en multi-appui

On procède de la même manière pour déterminer, à partir de la valeur lue $\ddot{S}_{jX}$ sur le spectre d'oscillateur de pseudo-accélération absolue associé à $\ddot{s}_j$, la contribution de l'appui j dans la direction X :

$$q_{iXmax\,j} = p_{ijX} \frac{SRO\,\ddot{s}_j(A, \xi_i, \omega_i)}{\omega_i^2} = \frac{\ddot{S}_{jXX}}{\omega_i^2} \qquad \text{éq 3.2-1}$$

L'expression de la contribution de cet oscillateur au déplacement relatif de la structure pour la composante x^k dans l'espace physique et pour un mouvement imposé j devient :

$$x_{iXmax\,j}^k = \phi_i^k q_{iXmax\,j} = \phi_i^k p_{ijX} \frac{\ddot{S}_{jX}}{\omega_i^2} \qquad \text{éq 3.2-2}$$

3.3 Généralisation à d'autres grandeurs

Remarque :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La méthode d'analyse spectrale est strictement limitée aux grandeurs dépendant linéairement des déplacements en élasticité linéaire : déformations, contraintes, efforts généralisés, forces nodales, réactions d'appuis.

Notamment elle ne peut s'appliquer à des grandeurs équivalentes de déformation ou de contraintes (VON MISES).

Pour chaque grandeur R^k, composante d'un champ par éléments, il est possible de calculer la composante modale r_i^k associée au mode propre φ_i ce qui conduit à :

$$R^k_{iXmax} = r^k_i \, q_{iXmax} = r^k_i \, p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i^2} \qquad \text{éq 3.3-1}$$

ou

$$R^k_{iXmax\,j} = r^k_i \, q_{iXmax\,j} = r^k_i \, p_{ijX} \frac{\ddot{S}_{jX}}{\omega_i^2} \qquad \text{éq 3.3-2}$$

4 Règles de combinaison des réponses modales

Pour évaluer un majorant de la réponse R de la structure, on doit maintenant combiner les réponses modales R^k_{imax} définies précédemment. Plusieurs niveaux de combinaison sont nécessaires :

- combinaison des modes propres retenus φ_i, pour $i = 1, \ldots, N_r \leqslant N$,
- correction statique par pseudo-mode,
- effet des excitations différentes appliquées à des groupes d'appuis,
- combinaison suivant les directions d'excitation séisme.

4.1 Direction du séisme et réponse directionnelle

Différentes considérations conduisent à étudier le comportement sismique séparément suivant chaque direction de l'espace :

- pour l'étude d'un bâtiment sur un sol, l'accélérogramme du mouvement imposé verticalement est différent de celui décrivant le mouvement horizontal, lui-même différent suivant deux directions orthogonales de l'espace ;
- pour l'étude d'un équipement, les spectres de plancher diffèrent significativement suivant les trois directions de l'espace, puisqu'ils intègrent les participations de différents modes du bâtiment (flexion de planchers, flexion ou torsion de l'ossature, ..).

Ceci conduit à établir une réponse modale directionnelle R_x à partir de spectres d'oscillateur différents et de facteurs de participation modale établis dans chaque direction X représentant une des directions du repère GLOBAL de définition du maillage (X, Y, Z) ou une direction particulière définie explicitement par l'utilisateur.

4.2 Choix des modes propres à combiner

Pour représenter correctement les modes de déformation susceptibles d'être excités par le mouvement imposé, il faudrait connaître tous les modes propres de fréquence inférieure à la fréquence de coupure du spectre, au delà de laquelle il n'y a pas d'amplification dynamique significative. Cette condition peut s'avérer difficile à remplir pour les structures complexes ayant un grand nombre de modes propres.

La taille de la base modale nécessaire (N_r modes) doit donc être évaluée pour s'assurer qu'aucun mode ayant une contribution importante dans les efforts internes et les contraintes n'a été omis dans chaque direction étudiée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2.1 Expression de l'énergie de déformation modale

L'énergie de déformation associée à chaque mode propre $U_i = \frac{1}{2}\mathbf{x}_{\mathbf{imax}}^{\mathbf{T}}.\mathbf{k}.\mathbf{x}_{\mathbf{imax}}$ peut être exprimée pour une direction particulière :

$$U_{iX} = \frac{1}{2}\left(p_i \frac{a_{iX}}{\omega_i^2}\right)^2 \boldsymbol{\varphi}_i^T.\mathbf{k}.\boldsymbol{\varphi}_i = \frac{1}{2}\left(p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i^2}\right)^2 \omega_i^2 \mu_i = \frac{1}{2}\frac{a_{iX}^2}{\omega_i^2} p_{iX}^2 \mu_i \qquad \text{éq 4.2.1-1}$$

Cette expression correspond à une excitation mono-appui et peut s'étendre au cas du multi-appui.

Le classement des modes avec des énergies de déformation décroissantes permet de ne pas retenir systématiquement, pour une étude globale de la structure, des modes qui ne produisent pas de déformations significatives. Par contre, pour l'étude de l'effet des sollicitations dans une zone particulière de la structure, il sera nécessaire d'utiliser les modes "locaux" qui peuvent être détectés par une analyse de la répartition de l'énergie de déformation sur des groupes de maille.

Notons que l'on ne dispose pas d'une estimation de l'énergie de déformation totale pour quantifier l'erreur commise en ignorant certains modes.

4.2.2 Expression de l'énergie cinétique modale

L'énergie cinétique associée à chaque mode propre s'écrit $V_i = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{imax}}^{\mathbf{T}}.\mathbf{m}.\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{imax}}$ qui donne :

$$V_{iX} = \frac{1}{2}\left(p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i}\right)^2 \boldsymbol{\varphi}_i^T.\mathbf{m}.\boldsymbol{\varphi}_i = \frac{1}{2}\frac{a_{iX}^2}{\omega_i^2} p_{iX}^2 \mu_i \qquad \text{éq 4.2.2-1}$$

L'expression [éq 4.2.2-1] fait intervenir la masse modale effective $p_{iX}^2 \mu_i$ définie au [§2.2], ce qui permet d'énoncer le critère de cumul des masses modales effectives unitaires [éq 2.2.2-4].

Critère de cumul des masses modales effectives

La qualité d'une base modale, du point de vue de la représentation des propriétés inertielles de la structure, est évaluée en cumulant, pour cette direction, les masses modales effectives unitaires des modes disponibles. Un seuil d'admissibilité de 95% de la masse totale est couramment admis. Le même critère peut s'appliquer partiellement dans le cas d'une excitation multi-appui avec N_r *modes en comparant* $\boldsymbol{\varphi}_{sj}^T.\mathbf{m}.\boldsymbol{\varphi}_{si}$ *et* $\sum_{i=1}^{N_r} p_{ij}^2 \mu_i$ *.*

La somme des masses modales effectives vaut en fait la masse totale qui travaille sur la base modale choisie. Autrement dit, cette masse totale travaillante vaut la masse totale moins les contributions en masse qui sont portées par des degrés de liberté encastrés (qui ne travaillent donc pas sur la base modale). Ainsi, par exemple, sur un système à 1 degré de liberté masse-ressort avec une masse $M1$ *au sommet et une autre masse* $M2$ *au niveau du radier, alors la masse travaillante vaudra* $M1$ *et la masse totale* $M1+M2$ *. Par suite, la masse modale effective unitaire pour le seul mode du système vaudra* $M1/(M1+M2)$ *. Le cumul total aura donc la même valeur et, suivant le ratio en* $M1$ *et* $M2$ *, on ne pourra donc pas forcément atteindre 90 % de la masse totale* $(M1+M2)$ *, même en considérant tous les modes (on n'a qu'un seule mode sur cet exemple). En pratique, plus le modèle aux éléments finis sera afin et réaliste, plus l'écart entre la masse travaillante et la masse totale sera faible.*

Estimation de l'erreur commise avec une base modale incomplète

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le critère de cumul des masses modales effectives ne peut pas toujours être satisfait. En effet on se limite en général à une base modale de N_r modes propres avec $N_r \ll N$ degrés de liberté. Pour des fondations rigides, le spectre des fréquences propres nécessaires dépasse couramment la fréquence de coupure du spectre d'oscillateur.

A partir de l'expression [éq 4.2.2-1], on peut écrire l'énergie cinétique totale sous la forme :

$$V_X = \sum_{i=1}^{N_r} V_{iX} + \sum_{i=N_r+1}^{N} V_{iX}$$

qui permet d'exprimer l'erreur absolue à partir de [éq 3.1-1] :

$$2\Delta V_X = \sum_{N_r+1}^{N} V_{iX} = \sum_{N_r+1}^{N} \frac{a_{iX}^2}{\omega_i^2} p_{iX}^2 \mu_i \leq \frac{a_{(N_r+1)X}^2}{\omega_i^2} \sum_{N_r+1}^{N} p_{iX}^2 \mu_i$$

en notant $a_{(n+1)X} = SRO\,\ddot{x}_X(A, \xi_{min}, \omega_{N_r+1})$ la valeur lue sur le spectre de pseudo-accélération absolue pour $\omega_n \leq \omega_{n+1}$ et l'amortissement modal le plus faible ξ_{min} susceptible de donner l'amplitude majorante. Si la fréquence maximale de la base f_n dépasse la fréquence de coupure, alors $a_{(n+1)X} = a_{nX} = |A(t)_{max}|$. Ceci donne un majorant de l'erreur absolue :

$$\Delta V_X = \frac{1}{2} \frac{a_{(n+1)X}^2}{\omega_i^2} \sum_{N_r+1}^{N} p_{iX}^2 \mu_i = \frac{1}{2} \frac{a_{(N_r+1)X}^2}{\omega_i^2} \left(m_T - \sum_{1}^{N_r} p_{iX}^2 \mu_i \right) \quad \text{éq 4.2.2-2}$$

4.2.3 Conclusion

Les grandeurs permettant de choisir les modes nécessaires à chaque analyse sont disponibles dans *Code_Aster* (opérateur POST_ELEM avec les options MASS_INER, ENER_POT et ENER_CIN et paramètres modaux FACT_PARTICI_DX et MASS_EFFE_UN_DX dans le concept résultat de type mode_meca).

Aucun critère d'admissibilité automatique n'est programmé actuellement et les grandeurs $\boldsymbol{\varphi}_{Sj}^T . \mathbf{m} . \boldsymbol{\varphi}_{Sj}$ et $\sum_{1}^{N_r} p_{ij}^2 \mu_i$, nécessaires à la vérification du critère pour une excitation multi-appui, ne sont pas imprimées.

4.3 Correction statique par pseudo-mode

4.3.1 Mono-appui

L'évaluation d'un majorant de la réponse à une excitation sismique nécessite, comme le suggère l'analyse précédente, une correction par un terme représentant la contribution statique des modes propres négligés.

Si l'on soumet la structure à une accélération uniforme statique dans la direction X, la réponse élastique linéaire $\boldsymbol{\varphi}_{aX}$ est solution de $\mathbf{k} . \boldsymbol{\varphi}_{aX} = \mathbf{m} . \delta_X \mathbf{I}$, sans amplification dynamique. Le champ de déplacements élastiques $\boldsymbol{\varphi}_{aX}$ des nœuds de la structure soumise à une accélération uniforme dans chaque direction est produit par l'opérateur MODE_STATIQUE [U4.52.14] avec le mot clé PSEUDO_MODE.

En décomposant cette déformée sur la base des modes propres, on obtient (cf. [§2.2.2]) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{k}.\boldsymbol{\varphi}_{aX}=\mathbf{m}.\sum_{i}^{N} p_{IX}\boldsymbol{\varphi}_i \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{\varphi}_{aX}=\mathbf{k}^{-1}.\mathbf{m}.\sum_{i=1}^{N} p_{iX}\boldsymbol{\varphi}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_{iX}}{\omega_i^2}\boldsymbol{\varphi}_i$$

Ceci permet d'introduire un pseudo-mode $\boldsymbol{\varphi}_{cX}$, pour chaque direction, en soustrayant au mode quasi-statique $\boldsymbol{\varphi}_{aX}$ les contributions statiques des N_r modes utilisés $\boldsymbol{\varphi}_i$ dans la basse retenue :

$$\boldsymbol{\varphi}_{cX}=\boldsymbol{\varphi}_{aX}-\sum_{i=1}^{N_r}\frac{p_{iX}}{\omega_i^2}\boldsymbol{\varphi}_i \qquad \text{éq 4.3.1-1}$$

L'expression [éq 4.3.1-1] est homologue du terme $\left(m_T-\sum_{i=1}^{N_r} p_{iX}^2\mu_i\right)$ de l'[éq 4.2.2-2] et le pseudo-mode permet d'introduire une correction des effets statiques des modes négligés.

La contribution du pseudo-mode de correction statique est la valeur lue sur le spectre de pseudo-accélération absolue pour une pulsation infinie, dite ZPA (zero period acceleration). En pratique cependant, comme il n'est pas toujours facile de respecter le critère de cumul des masses modales effectives pour la base des N_r modes propres choisis, il est admis de prendre la valeur : $a_{(N_r+1)X}=SRO\,\ddot{x}_X(A,\xi_{min},\omega_{N_r})$ pour la pulsation $\omega_{N_r+1}\geq\omega_{N_r}$ du mode suivant le dernier de la base de modes propres choisie, et pour l'amortissement modal le plus faible ξ_{min}. Ceci est considéré majorer cette contribution afin d'obtenir un résultat conservatif.
Si la base modale a été correctement choisie, c'est-à-dire si elle inclut tous les modes jusqu'à la fréquence de coupure du signal sismique, le mot-clef FREQ_COUP de l'opérateur COMB_SISM_MODAL offre la possibilité de préciser la valeur de la fréquence où commence l'asymptote (valeur de ZPA). On s'assure ainsi de ne pas majorer indûment la réponse.

La correction à apporter aux déplacements relatifs et aux grandeurs qui s'en déduisent (efforts généralisés, contraintes, réactions d'appuis) en excitation mono-appui est alors :

$$\mathbf{x}_{cX}^{k}=a_{(N_r+1)X}\cdot\boldsymbol{\varphi}_{cX}^{k}$$

conformément aux conditions d'estimation de l'erreur cf. [§ 4.2.2].

Pour l'évaluation de la correction d'accélération absolue, on obtient :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{cX}^{k}=a_{(N_r+1)X}\cdot\left(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{X}}-\sum_{i=1}^{N_r} p_{iX}\boldsymbol{\varphi}_i\right)^{k}$$

4.3.2 Multi-appui

En excitation multi-appui, la formulation du pseudo-mode et de sa contribution reprennent le principe précédent.
Le champ de déplacements élastiques $\boldsymbol{\phi}_{ajX}=\mathbf{k}^{-1}.\mathbf{m}.\boldsymbol{\phi}_{SjX}$ des nœuds de la structure soumise à une accélération unitaire de l'appui j dans la direction X est produit par l'opérateur MODE_STATIQUE [U4.52.14] avec le mot-clé PSEUDO_MODE.

On définit, de la même façon que pour le mono-appui, $a_{(N_{rj}+1)jX}$ comme la « ZPA » à l'appui j dans la direction X. Elle donnée, par défaut, par la valeur lue sur le SRO pour le dernier mode de la base modale. Pour une base bien choisie, elle doit correspondre en pratique à la valeur asymptotique de l'accélération. On peut l'ajuster, si nécessaire, par le mot-clef FREQ_COUP.
La correction à apporter aux déplacements relatifs et aux grandeurs qui s'en déduisent s'écrit alors, pour l'appui j dans la direction X :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{x}_{cjX} = \phi_{cjX}\, a_{(N_{rj}+1)\,jX} \quad \text{avec} \quad \phi_{cjX} = \phi_{ajX} - \sum_{i=1}^{N_r} \frac{P_{ijX}\,\phi_i}{\omega_i^2}$$

Pour l'accélération absolue, la correction s'écrit :

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_{cjX} = \left(\phi_{SjX} - \sum_{i=1}^{N_r} \phi_i\, P_{ijX} \right) a_{(N_{rj}+1)\,jX}$$

4.4 Généralités sur les règles de combinaison

Les règles de combinaison ou de cumul des différentes composantes, modales ou directionnelles, sont multiples et plus ou moins complexes à mettre en œuvre.

On présente les méthodes "naturelles" du point de vue de leur aptitude à fournir un majorant réaliste des sollicitations induites dans une structure représentée par une base de modes propres réels issus d'un modèle en élasticité linéaire, majorant estimé sans analyse transitoire pour une grandeur de composante G^k, que l'on nommera G^k_{max}. Pour la suite le suffixe max désigne l'estimation de la valeur maximale atteinte au cours de l'excitation sismique, en ignorant l'instant où elle a été atteinte et l'indice r s'applique à des modes propres, des pseudo-modes, des directions d'appuis...

Remarque :

Quelle que soit la méthode de combinaison utilisée, la valeur d'une composante obtenue par combinaison ne peut servir de donnée pour calculer une nouvelle grandeur : par exemple, le calcul d'un majorant d'un déplacement différentiel entre deux points doit être calculé mode par mode, puis combiné.

4.4.1 Combinaison arithmétique

$$G^k_{max} = \sum_r G^k_{r\max}$$

Elle n'est pas utilisable pour les réponses directionnelles puisque la méthode spectrale fait abstraction des instants où les valeurs maximales sont atteintes dans deux directions ou pour deux modes différents. Aucune relation de phase, et donc de signe, n'existe entre les contributions à combiner. Elle n'est donc disponible que dans le cas multi-appui, pour le cumul des réponses directionnelles modales d'appui et pour le cumul des déplacements différentiels.

4.4.2 Combinaison en valeur absolue

$$G^k_{max} = \sum_r |G^k_{r\max}|$$

De façon évidente, elle peut fournir une borne supérieure, puisqu'elle suppose que toutes les contributions atteignent leur maximum au même instant avec le même signe. Trop pénalisante, elle est disponible, mais inutilisable industriellement.

4.4.3 Combinaison quadratique simple

Cette méthode est aussi connue sous la dénomination SRSS (Square Root of Sum of Squares).

$$G^k_{max} = \sqrt{\sum_r (G^k_{r\max})^2}$$

Hypothèse :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

*L' **hypothèse** qui justifie cette méthode de combinaison peut s'énoncer :*
le maximum probable de l'énergie stockée dans la structure est la somme des maximums probables de l'énergie stockée sur chacun des modes et sur chacune des composantes directionnelles du séisme, c'est-à-dire que, vis-à-vis de l'énergie, les modes propres et les composantes du séisme sont découplés. Elle est analogue à la règle d'addition des variables aléatoires gaussiennes et à moyenne nulle.

La validité de cette hypothèse, qui sera discutée pour chaque cas particulier d'utilisation de cette méthode de combinaison, n'est pas établie et diverses propositions ont été présentées pour obtenir une meilleure approximation dans les cas où elle est mise en défaut cf. [§3.4.1.2].

Par ailleurs, on pourra se reporter à [bib3] pour une critique de cette approche, notamment de son aptitude à estimer un maximum probable des déformations et des contraintes, mais l'approche alternative qu'elle évoque n'a fait l'objet d'aucun développement dans *Code_Aster*.

4.5 Établissement de la réponse directionnelle en mono-appui

La réponse directionnelle, définie précédemment, est obtenue par combinaison quadratique simple de deux termes que nous allons discuter :

$$R_X = \sqrt{R_m^2 + \left(R_{qs} + R_c\right)^2}$$

avec :
R_m réponse combinée dynamique des N_r oscillateurs modaux,
R_{qs} réponse combinée quasi-statique des oscillateurs modaux (=0 sauf pour la combinaison de type Gupta),
R_c contribution de la correction statique des modes négligés (pseudo-mode).

Les hypothèses justifiant la méthode de combinaison quadratique simple, à ce niveau, ne semblent pas devoir être remises en cause [bib1].

Pour simplifier les notations, on note R_m au lieu de R_{mX} ,…

4.5.1 Réponse combinée des oscillateurs modaux

La réponse de la structure R_m , dans une direction de séisme, est obtenue par une des combinaisons possibles des contributions de chacun des modes propres pris en considération pour cette direction. Le nombre de méthodes possibles prouve simplement la difficulté de dégager une justification suffisante pour garantir une estimation conservative et réaliste. Si la combinaison quadratique simple (SRSS ou CQS) est évoquée par tous, on retiendra de [bib1] qu'elle est souvent mise en défaut et on lui préférera la combinaison quadratique complète (CQC). Les autres méthodes sont disponibles pour des comparaisons éventuelles.

4.5.1.1 Somme des valeurs absolues

Cette combinaison correspond à une hypothèse de dépendance complète des oscillateurs associés à chaque mode propre et conduit à une surévaluation systématique de la réponse :

$$R_m = \sum_{i=1}^{N_r} |R_i|$$

4.5.1.2 Combinaison quadratique simple (CQS)

En considérant que la contribution de chaque oscillateur modal est une variable aléatoire indépendante, une estimation de la réponse maximale, pour la composante de déplacement x_{max}^k , peut être obtenue par combinaison quadratique simple des contributions de chaque mode d'où, pour une excitation mono-appui :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$x_{max}^{k}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N_r}\left(x_{i\,max}^{k}\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N_r}\left(\varphi_i^k\ p_i q_{i\,max}\right)^2}$$ éq 4.5.1.2-1

D'une manière générale, pour toute grandeur R_i associée à un oscillateur modal (ω_i,ξ_i) :

$$R_m=\sqrt{\sum_{i=1}^{N_r}R_i^2}$$

Elle constitue une bonne approximation de la réalité quand le spectre d'oscillateur définissant le séisme est à large bande de fréquences, et quand les modes propres de la structure sont bien séparés les uns des autres et se situent à l'intérieur ou au voisinage de cette bande. Elle est notamment mise en défaut dans le cas où des modes propres sont à des fréquences voisines ou pour des modes éloignés du pic d'excitation [bib2]. Les autres méthodes de combinaison des réponses modales tentent de corriger ce point.

4.5.1.3 Combinaison quadratique complète (CQC)

La combinaison quadratique complète (établie par DER KIUREGHIAN [bib5]) apporte une correction à la règle précédente en introduisant des coefficients de corrélation dépendant des amortissements et des distances entre modes propres voisins :

$$R_m=\sqrt{\sum_{i_1}\sum_{i_2}\rho_{i_1 i_2}R_{i_1}R_{i_2}}$$

avec le coefficient de corrélation :

$$\rho_{ij}=\frac{8\sqrt{\xi_i\xi_j\omega_i\omega_j}(\xi_i\omega_i+\xi_j\omega_j)\omega_i\omega_j}{(\omega_i^2-\omega_j^2)^2+4\xi_i\xi_j\omega_i\omega_j(\omega_i^2+\omega_j^2)+4(\xi_i^2+\xi_j^2)\omega_i^2\omega_j^2}$$

ou en introduisant le rapport de pulsation ou de fréquences entre deux modes $\eta=\omega_j/\omega_i$:

$$\rho_{ij}=\frac{8\eta\sqrt{\xi_i\xi_j\eta}(\xi_i+\xi_j\eta)}{(1-\eta^2)^2+4\eta\xi_i\xi_j(1+\eta^2)+4\eta^2(\xi_i^2+\xi_j^2)}$$

et pour ξ constant :

$$\rho_{ij}=\frac{8\eta\xi^2(1+\eta)\sqrt{\eta}}{(1-\eta^2)^2+4\eta\xi^2(1+\eta^2)+8\eta^2\xi^2}$$

4.5.1.4 Combinaison de ROSENBLUETH

Cette règle (proposée par E. ROSENBLUETH et J. ELORDY [bib6]) introduit une corrélation entre modes, différente de celle de la méthode CQC. Les réponses des oscillateurs sont combinées par double somme (Double Sum Combination) :

$$R_m=\sqrt{\sum_{i_1}\sum_{i_2}\rho_{i_1 i_2}R_{i_1}R_{i_2}}$$

Elle nécessite une donnée supplémentaire, la durée s de la phase “forte” du séisme. Le coefficient de corrélation est alors :

$$\rho_{ij}=\left(1+\left(\frac{\omega'_i-\omega'_j}{\xi'_i\omega_i+\xi'_j\omega_j}\right)^2\right)^{-1}\quad\text{où}\quad\omega'_i=\omega_i\sqrt{1-\xi'^2_i}\ \text{et}\ \xi'^2_i=\xi_i+\frac{2}{s\,\omega_i}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.5.1.5 Combinaison avec règle des 10%

Les modes voisins (dont les fréquences différent de moins de 10%) sont d'abord combinés par sommation des valeurs absolues. Les valeurs résultant de cette première combinaison sont ensuite combinées quadratiquement (combinaison quadratique simple). Cette méthode a été proposée par le règlement américain U.S. Nuclear Regulatory Commission (Regulatory Guide 1.92 - Février 1976) pour atténuer le conservatisme de la méthode de somme des valeurs absolues. Elle reste en défaut pour des structures avec un spectre de fréquences propres dense et ne devrait plus être utilisée.

4.5.1.6 Combinaison selon Gupta

GUPTA [NRC1.92], pour prendre en compte les corrélations entre modes dues à la partie quasi-statique de la réponse, introduit le facteur de réponse rigide, qui fait varier de 0 à 1 la corrélation entre les réponses modales de fréquences intermédiaires entre f_1 et f_2, deux fréquences à déterminer (typiquement de $2\ Hz$ à $20\ Hz$).

GUPTA décompose chaque réponse modale R_r en une partie dynamique R_r^p et une partie quasi-statique R_r^{qs} : $R_r^{qs}=\alpha_r R_r$ et $R_r^p=\sqrt{1-\alpha_r^2}R_r$

Ainsi, pour chaque mode r, on affecte le facteur de réponse rigide α_r à la réponse modale R_r :

- $\alpha_r=0$ pour $f\le f_1$ et $\alpha_r=1$ pour $f\ge f_2$
- α_r est estimé pour la fréquence f_r selon la formule suivante :

$$\alpha_r=\frac{\ln f_r/f_1}{\ln f_2/f_1}$$

La réponse combinée dynamique des oscillateurs modaux est effectuée selon la combinaison 'CQC' :

$$R_d=\sqrt{\sum_{r_1}\sum_{r_2}\rho_{r_1r_2}R_{r_1}^pR_{r_2}^p}$$

La réponse combinée quasi-statique des oscillateurs modaux est effectuée selon une combinaison algébrique :

$$R_{qs}=\sum_{i=1}^{N_r}R_r^{qs}$$

Cette combinaison selon GUPTA n'est disponible que dans le cas mono-appui.

4.5.2 Contribution de la correction statique des modes négligés

La contribution du pseudo-mode Cf. [§4.3.1] peut être combinée quadratiquement car l'indépendance avec les contributions des modes de vibration n'est pas contestée.

4.6 Établissement de la réponse directionnelle en multi-appui

4.6.1 Calcul de la réponse globale

L'ordre des combinaisons à effectuer diffère selon que les excitations des appuis (ou des groupes d'appuis) peuvent être considérées comme corrélées ou décorrélées entre elles.

4.6.1.1 Cas avec groupes d'appuis décorrélés

L'enchaînement des combinaisons peut s'énoncer comme suit, dans l'ordre :

- pour chaque direction X, pour chaque mode i, pour chaque groupe d'appuis :

1) calcul des réponses directionnelles d'appuis modales (combinaison intra-groupe sur les appuis) : considérant que les appuis d'un même groupe sont corrélés, on propose une sommation des valeurs algébriques ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- pour chaque direction X , pour chaque groupe d'appuis j :
- calcul de la réponse combinée des oscillateurs modaux (combinaison sur les modes) ;
- calcul du pseudo-mode R^c_{Xj} (correction statique des modes négligés) ;
- calcul du mouvement d'entraînement R^e_{Xj} ;
- calcul de la réponse directionnelle d'appui : $R_{Xj}=\sqrt{R^{m\,2}_{Xj}+R^{c\,2}_{Xj}+R^{e\,2}_{Xj}}$
- pour chaque direction (combinaison inter-groupe sur les groupes d'appuis) : calcul de la réponse directionnelle, selon une sommation quadratique CQS car les groupes sont supposés décorrélés entre eux ;
- calcul de la réponse totale (combinaison sur les directions).

4.6.1.2 Cas avec appuis corrélés

Dans le cas où tous les appuis sont corrélés entre eux (quand on ne peut pas exhiber de groupes d'appuis décorrélés), on propose le schéma suivant, qui présente l'avantage de pouvoir établir un parallèle entre le traitement du cas mono-appui traité comme tel et le cas mono-appui traité comme un cas particulier du cas multi-appui. L'enchaînement des combinaisons peut se résumer comme suit :

- pour chaque direction X , pour chaque mode i :
  - calcul des réponses directionnelles modales (combinaison sur les appuis) : les appuis étant supposés corrélés entre eux, on propose une sommation des valeurs algébriques ou des valeurs absolues ;
  - pour chaque direction X :
  - calcul de la réponse combinée R^m_X des oscillateurs modaux (combinaison sur les modes) ;
  - calcul du pseudo-mode R^c_X (correction statique des modes négligés, sommation algébrique sur les appuis des pseudo-modes d'appui R^c_{Xj}) ;
  - calcul du mouvement d'entraînement R^e_{Xj} (sommation algébrique sur les appuis des mouvements d'entraînement d'appui R^e_{Xj}) ;
  - calcul de la réponse directionnelle : $R_X=\sqrt{R^{m2}_X+R^{c\,2}_X+R^{e\,2}_X}$,
  - calcul de la réponse totale (combinaison sur les directions).

4.6.2 Calcul séparé des composantes primaire et secondaire de la réponse

Chaque composante fait l'objet d'un traitement séparé similaire. Cette démarche est adaptée aux post-traitements RCC-M en vigueur pour l'analyse sismique des tuyauteries [§ 4.9] :

4.6.2.1 Composante primaire R_{Ix} (réponse inertielle)

L'ordre des combinaisons à effectuer diffère selon que les excitations des appuis (ou des groupes d'appuis) peuvent être considérées comme corrélées ou décorrélées entre elles.

- <u>groupes d'appuis décorrélés :</u>

  •pour chaque mouvement imposé $\ddot{s}_j$, calcul des réponses directionnelles d'appui (cumul sur les modes) :

$$R_{IjX}=\sqrt{R^{m2}_j+R^{c2}_j}$$

  R^m_j réponse d'appui combinée des oscillateurs modaux (cumul sur les modes)

  R^c_j contribution de la correction statique des modes négligés (pseudo-mode d'appui)

  •combinaison des réponses R_{IjX} (cumul sur les appuis).

- <u>appuis corrélés :</u>

  •pour chaque mouvement imposé $\ddot{s}_j$, calcul des réponses directionnelles modales (cumul sur les appuis) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$R_{IiX}=\sqrt{R_i^{m2}+R^{c2}}$$

R_i^m réponse modale combinée des oscillateurs modaux (cumul sur les appuis)

R^c contribution de la correction statique des modes négligés (pseudo-mode)

•combinaison des réponses R_{IiX} (cumul sur les modes).

4.6.2.2 Composante secondaire R_{II} (réponse quasi-statique)

•combinaison des réponses R_{ej}

4.6.3 Cumul sur les modes

Le critère de choix de la méthode de combinaison des contributions des modes est le même que pour une excitation mono-appui et on utilisera préférentiellement la méthode CQC.

4.6.4 Contribution du pseudo-mode

Le terme correctif par pseudo-mode Cf. [§4.3.2] peut être combiné quadratiquement.

4.6.5 Contribution des mouvements d'entraînement

Le mouvement d'entraînement de la structure n'étant pas uniforme, on peut rajouter un terme au calcul de la réponse directionnelle. Ceci n'est pas nécessaire si l'on choisit de considérer cette contribution statique comme un cas de charge spécifique induisant des contraintes secondaires. Ce terme est défini à partir du déplacement relatif maximal qui ne peut être connu à partir des seuls spectres de pseudo-accélération absolue des appuis.

$$R_{ej}=\varphi_{Sj}\delta_{jmax}$$

φ_{Sj} mode statique pour l'appui j

δ_{jmax} déplacement relatif maximal de l'appui j par rapport à un appui de référence (pour lequel $\delta_{jmax}=0$)

4.6.6 Cumul sur les appuis

Cette étape est obligatoire, mais le choix de la méthode de combinaison des réponses directionnelles reste très ouvert. En effet, l'hypothèse d'indépendance des $\ddot{s}_j$ dépend fortement des modes propres de la structure support de l'équipement étudié. Une analyse du système étudié est nécessaire pour éventuellement regrouper les appuis par groupes : par exemple, pour une tuyauterie reliant deux bâtiments, soit tous les appuis sont considérés comme corrélés entre eux, soit on peut exhiber des groupes décorrélés entre eux (le groupe des appuis du bâtiment 1, celui du bâtiment 2 et, enfin, celui des appuis intermédiaires), dont les appuis à l'intérieur de chaque groupe sont corrélés.

Cumul intra-groupe

Les excitations aux appuis d'un même groupe étant supposées corrélées entre elles, le cumul est réalisé algébriquement selon la combinaison linéaire définie par : $R_X=\sum R_{jX}$

Cumul inter-groupe

Les groupes d'appuis étant constitués de telle sorte qu'ils soient décorrélés entre eux, le cumul inter-groupe s'effectue par combinaison quadratique simple.

4.6.7 Équivalence mono-appui multi-appui

Un calcul relatif à des excitations aux appuis toutes identiques peut être mené selon deux chemins différents, théoriquement équivalents :

- calcul mono-appui ;
- calcul multi-appui avec excitations identiques aux appuis.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On attire l'attention sur le fait que, si les résultats sont bien strictement égaux en l'absence de correction statique via le pseudo-mode, ils peuvent présenter de légères différences quand la correction statique est prise en compte, car les traitements respectifs de cette correction statique ne sont alors pas strictement équivalents.

4.7 Combinaison des réponses directionnelles

Deux règles de combinaison des réponses directionnelles sont disponibles.

4.7.1 Combinaison quadratique

Cette combinaison correspond à l'hypothèse d'indépendance stricte des réponses dans chaque direction cf. [§ 3.3.3]. Rappelons que cette règle de combinaison n'a aucune signification géométrique, bien que les trois directions d'analyse soient orthogonales.

$$R=\sqrt{R_X^2+R_Y^2+R_Z^2}$$

Les hypothèses justifiant la méthode de combinaison quadratique simple, à ce niveau, ne semblent pas devoir être remises en cause [bib3], mais cette méthode n'est pas la plus utilisée.

4.7.2 Combinaison de NEWMARK

Cette règle de combinaison empirique est la plus couramment utilisée et conduit en général à des estimations légèrement plus fortes que la précédente. Elle suppose que lorsque l'une des réponses directionnelles est maximale, les autres sont au plus égales aux $4/10$ de leurs contributions maximales respectives. Pour chacune des directions $i(X,Y,Z)$, on calcule les 8 valeurs :

$$R_l=\pm R_X \pm 0{,}4\, R_Y \pm 0{,}4\, R_Z$$

ce qui conduit, par permutation circulaire, à 24 valeurs et $R=\max\,(R_l)$

4.8 Avertissement sur les combinaisons

Plusieurs remarques s'imposent pour mettre en garde l'utilisateur sur la façon d'utiliser les méthodes de combinaison et les grandeurs combinées dans une note d'étude.

Remarque 1 :

Si l'on souhaite utiliser des combinaisons arithmétiques (direction) et des combinaisons quadratiques (modes), les cumuls quadratiques doivent toujours s'effectuer en dernier.

Remarque 2 :

Toute combinaison quadratique ne s'applique qu'aux grandeurs pour lesquelles, en valeurs instantanées, le cumul a le sens d'une somme : combinaison des composantes de déplacement, ou effort généralisé ou de contrainte de chaque mode propre.
La combinaison quadratique modale ou directionnelle ne peut donc s'appliquer à des intensités de contrainte (contraintes principales, de Von Mises, de Tresca).

Remarque 3 :

Les résultats d'une combinaison, quelle que soit la règle de cumul, ne doivent pas servir de données pour calculer d'autres grandeurs : par exemple, un déplacement différentiel entre deux points (ou une déformation) ne peut être calculé qu'à partir des déplacements différentiels modaux que l'on combine ensuite.
A fortiori les efforts généralisés et les contraintes ne peuvent être calculés que mode par mode avant toute combinaison et non à partir de forces d'inerties déduites des champs d'accélération obtenus par combinaison des accélérations modales.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.9 Pratiques réglementaires

4.9.1 Partition des composantes primaires et secondaires de la réponse

Les différents supports d'une ligne de tuyauterie peuvent être animés de mouvements différents. Un même tronçon de tuyauterie peut se répartir sur des bâtiments différents, des niveaux ou des équipements différents. Il subit donc une excitation multiple. Ceci se traduit par deux types de chargement [§ 2.1.2] :

- une excitation dont le contenu fréquentiel varie d'un support à l'autre et qui constitue un chargement primaire selon la classification RCC-M,
- des Déplacements Différentiels Sismiques (DDS) induisant un état de contrainte par déplacements imposés aux appuis et classé comme secondaire.

Les moments généralisés résultant de ces 2 chargements interviennent séparément dans les inéquations de dimensionnement RCC-M et à plusieurs niveaux.
En vue d'un post-traitement RCC-M approfondi, Il est donc nécessaire de disposer des composantes primaire et secondaire de la réponse sismique.
D'une manière plus générale, la méthode de combinaison des réponses d'appuis peut différer suivant que l'on traite le cas des composantes inertielles ou différentielles. De plus, le nombre d'appuis concernés par ces deux sommations peut ne pas être égal. On est souvent amené à imposer des mouvements différentiels d'ensemble même pour des appuis associés à des spectres utilisateurs différents. D'autre part, des DDS formulés en rotation sont parfois à considérer. Ils ne peuvent être associés à un chargement inertiel (limité aux translations).

Code_Aster propose donc deux traitements :

- Détermination de la réponse globale :
- Les contributions inertielle et statique d'entraînement sont cumulées lors du calcul des réponses directionnelles d'appui [§4.6].
- Partition des composantes primaires et secondaires de la réponse globale :
  Les deux contributions précédentes ne sont plus cumulées lors du calcul des réponses directionnelles et font l'objet de 2 traitements indépendants :
- La composante inertielle s'obtient en supprimant le terme d'entraînement R_{ej} dans le calcul de la réponse globale [§ 4.6].
- La composante statique est déterminée en combinant les termes d'entraînement définis sous le mot-clé `DEPL_MULT_APPUI`. Les méthodes de combinaison de ces cas de charge DDS sont renseignées dans le mot clé `COMB_DEPL_APPUI`.

4.9.2 Méthode du spectre enveloppe

Même si les tuyauteries sont soumises à une excitation sismique multiple, la pratique courante est de se ramener au calcul d'une structure mono-supportée tout en conservant les cas de charge DDS. Cette démarche simplifiée implique de définir un spectre unique par direction pour tous les supports de la tuyauterie. Pour chaque direction, on adopte alors un spectre « enveloppe » des différents spectres aux supports. Les spectres retenus pour les directions horizontales X et Y sont identiques.
Dans la quasi totalité des cas, cette méthode est génératrice de « marge de dimensionnement ».

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Bibliographie

1 "Génie Parasismique" Ouvrage collectif - Presses de l'E.N.P.C. (1985).

2 "État de l'art en matière de calcul dynamique des structures" Jacques BETBEDER-MATIBET in Génie Parasismique (1985).

3 "Le problème de la superposition des modes propres en vibration. Utilisation des modes propres de déformation des éléments." Vincent GUILLOT in Génie Parasismique (1985).

4 "Calcul des structures soumises à des excitations multiples" Jean RIGAUDEAU - Pierre SOLLOGOUB in Génie Parasismique (1985).

5 "A response spectrum method for random vibrations" DER KIUREGHIAN in Report UCB/EERC - 80/15 Berkeley (1980).

6 "Response of linear systems to certain transient disturbances" ROSENBLUETH, ELORDY in Proceedings, Fourth World conference on earthquake engineering-Santiago of Chile (1969).

7 "Short communication: a replacement for the SRSS method in seismic analysis" DER KIUREGHIAN, WILSON, BAYO in "Earthquake engineering and structural dynamics", vol 9 (1980).

8 Analyse sismique transitoire [R4.05.01].

9 Opérateur COMB_SISM_MODAL [U4.84.01].

10 Opérateur CALC_FONCTION [U4.32.04].

11 "Mechanical vibrations. Theory and application to structural dynamics" M. GERADIN, D. RIXEN , Wiley Masson (1994).

12 « Combining Modal Responses and Spatial Components in Seismic Response Analysis », U.S. Nuclear Regulatory Commission , Regulatory Guide 1.92 » (July 2006).

6 Description des versions du document

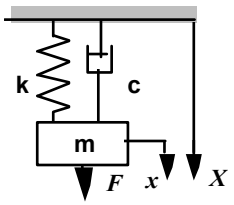
Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
5	*J.R. LEVESQUE, L. VIVAN, D. SELIGMANN, EDF*-R&D/AMA	Texte initial
06/04/11	*J.R. LEVESQUE, L. VIVAN, Y. PONS EDF*-R&D/AMA	
9.4	S.AUDEBERT EDF-R&D/AMA	
10	S.AUDEBERT EDF-R&D/AMA	Prise en compte de la fiche REX 12005 : modification du cumul intra-groupe §4.6.6
11	S.AUDEBERT EDF-R&D/AMA	Prise en compte de la fiche REX 17054 : introduction de la méthode de recombinaison modale selon GUPTA

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1 Réponse transitoire d'un oscillateur simple amorti

A1.1 Vibration forcée d'un système à un degré de liberté en translation

Pour un oscillateur simple de rigidité k, de masse m et d'amortissement visqueux c, l'équation du mouvement est de la forme :



$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = 0$$

pour laquelle les notations traditionnelles sont :

- La pulsation propre du système non-amorti : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$;
- l'amortissement critique : $c_{\text{critique}} = 2\,m\,\omega_0$;
- l'amortissement réduit, exprimé en pourcentage de l'amortissement critique) : $\xi = \frac{c}{c_{\text{critique}}} = \frac{c}{2\,m\,\omega_0}$;
- la pulsation propre du système amorti : $\omega_0' = \omega_0\sqrt{(1-\xi^2)}$;
- la déflexion statique pour une force F_0 : $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$;
- la fréquence réduite : $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$;
- l'équation réduite du système : $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$.

La réponse **globale** à une excitation harmonique de la forme $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ est la somme :

•d'une réponse libre $X_1(t)$ solution générale oscillatoire amortie où X_{l0} et φ_0 sont déterminées par les conditions initiales :

$$X_1(t) = X_0 e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega'_0 t + \varphi_0)$$

•d'une réponse forcée $X_f(t)$ solution particulière permanente $X_f(t) = X_{f0}\cos(\omega t - \varphi)$

$$X_{f0} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \varphi = arctg\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \qquad \text{éq A1.1-1}$$

qui s'écrit sous forme réduite :

$$\frac{X_{f0}}{\delta_{st}} = \frac{k\,X_{f0}}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \quad \varphi = arctg\left(\frac{2\xi\eta}{1-\eta^2}\right) \qquad \text{éq A1.1-2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

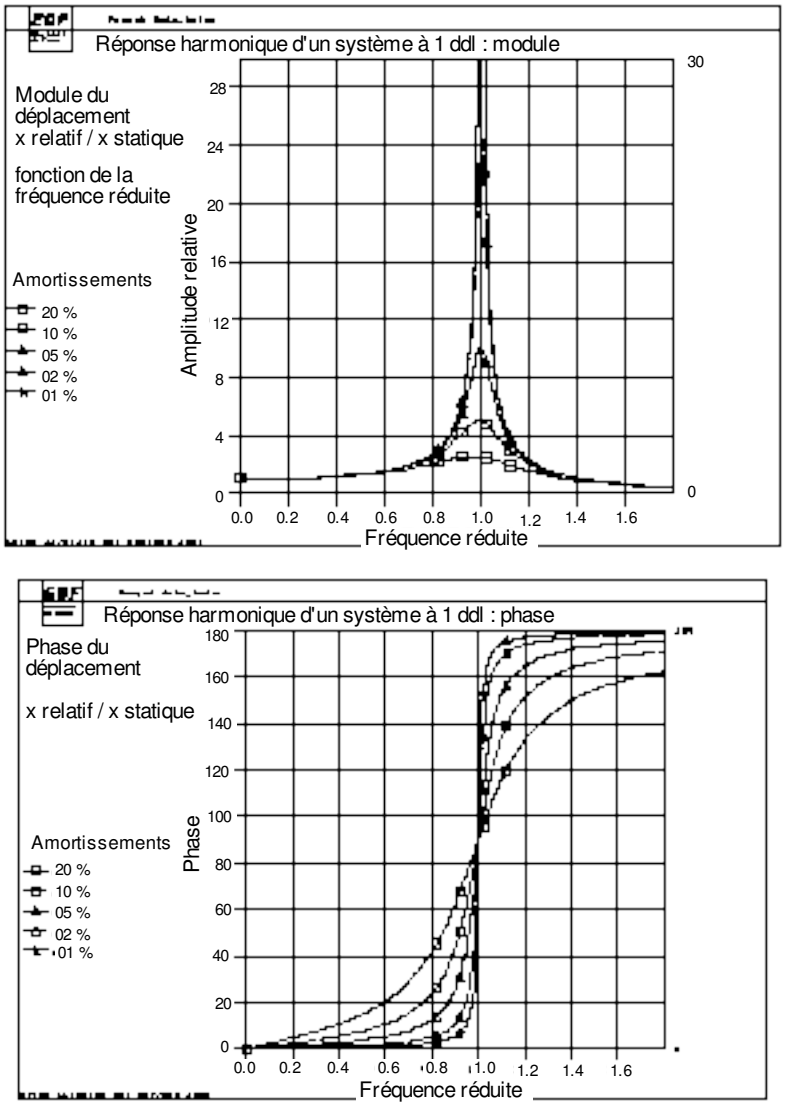


Figure A1.1-a : Réponse d'un oscillateur en force imposée (module et phase)

La réponse à une excitation harmonique de la forme $F(t)=F_0 e^{j\omega t}$ s'écrit avec une réponse forcée solution particulière permanente $X_f(t)=X_{f0} e^{(j\omega t-\varphi)}$

$$X_{f0}=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \varphi=\text{arctg}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right) \qquad \text{éq A1.1-3}$$

qui s'écrit sous forme réduite :

$$\frac{k X_{f0}}{F_0}=\frac{1}{1-\eta^2+j2\xi\eta}\equiv H(j\omega)\varphi=\text{arctg}\left(\frac{2\xi\eta}{1-\eta^2}\right) \qquad \text{éq A1.1-4}$$

où $H(j\omega)$ est la réponse harmonique complexe d'un oscillateur simple :

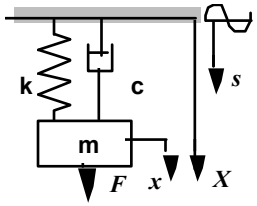
$$H(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\xi\eta)^2}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2Mouvement imposé d'un système à un degré de liberté en translation

A2.1 Mouvement absolu d'un système à un degré de liberté

Pour un oscillateur simple de rigidité k, de masse m et d'amortissement visqueux c, l'équation du mouvement **absolu** est de la forme :



$$m\ddot{X} + c(\dot{X} - \dot{s}) + k(X - s) = 0$$
$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = ks + c\dot{s}$$
$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 s + 2\xi\omega_0\dot{s}$$

La réponse **forcée** à un mouvement imposé harmonique de la forme $s(t)=s_0\cos(\omega t)$ est de la forme $X_m(t)=X_{m0}\cos(\omega t-\varphi_1-\varphi_2)$ somme de deux termes de réponse, solutions particulières permanentes :

•terme induit par l'excitation en déplacement $X_{d0}\cos(\omega t-\varphi_d)$

$$X_{d0}=\frac{k\,s_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\,\omega)^2}} \qquad \varphi_d=\mathrm{arctg}\left(\frac{c\,\omega}{k-m\omega^2}\right)$$

•terme induit par l'excitation en vitesse $X_{v0}\cos(\omega t-\varphi_v)$

$$X_{v0}=\frac{\omega c\,s_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\,\omega)^2}}\varphi_v=\mathrm{arctg}\left(\frac{c\,\omega}{k-m\omega^2}\right)$$

ce qui conduit à une réponse forcée totale :

$$X_m(t)=X_m\cos(\omega t-\varphi_1-\varphi_2)\equiv s_0\sqrt{\frac{k^2+(c\,\omega)^2}{[(k-m\omega^2)^2+(c\,\omega)^2]}}\cos(\omega t-\varphi_1-\varphi_2)$$

d'où la forme réduite de l'amplitude absolue :

$$\frac{X_m}{s_0}=\sqrt{\frac{1+(2\xi\eta)^2}{[(1-\hat{e}ta^2)^2+(2\xi\eta)^2]}} \qquad \varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{2\xi\eta}{1-\eta^2}\right) \qquad \varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2\xi\eta}\right)$$

Si le mouvement imposé à la base est exprimé sous forme complexe $s(t)=\Re(s_0 e^{j\omega t})$, l'amplitude relative ou transmissibilité peut s'écrire à partir de la réponse harmonique complexe d'un oscillateur simple $H(j\omega)$

$$\frac{X_m}{s_0}=\sqrt{1+(2\xi\eta)^2}\,|H(j\omega)| \qquad \text{éq A2.1-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A2.2 Mouvement relatif d'un système à un degré de liberté

Le problème de la réponse à un mouvement imposé peut être traité en déplacement relatif de la masse par rapport à la base en posant $x = X - s$

L'équation du mouvement **relatif** pour un mouvement imposé harmonique de la forme $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$ est alors de la forme $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{s}$ ou sous forme réduite :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{s} = \omega^2 s_0 \cos(\omega t) \qquad \text{éq A2.2-1}$$

La réponse **forcée** relative est alors, pour une solution permanente $x_{m0}\cos(\omega t - \varphi)$,

$$x_{m0} = \frac{m\omega^2 s_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad \varphi = \text{arctg}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \qquad \text{éq A2.2-2}$$

qui s'écrit sous forme réduite :

$$\frac{x_{m0}}{s_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \qquad \text{éq A2.2-3}$$

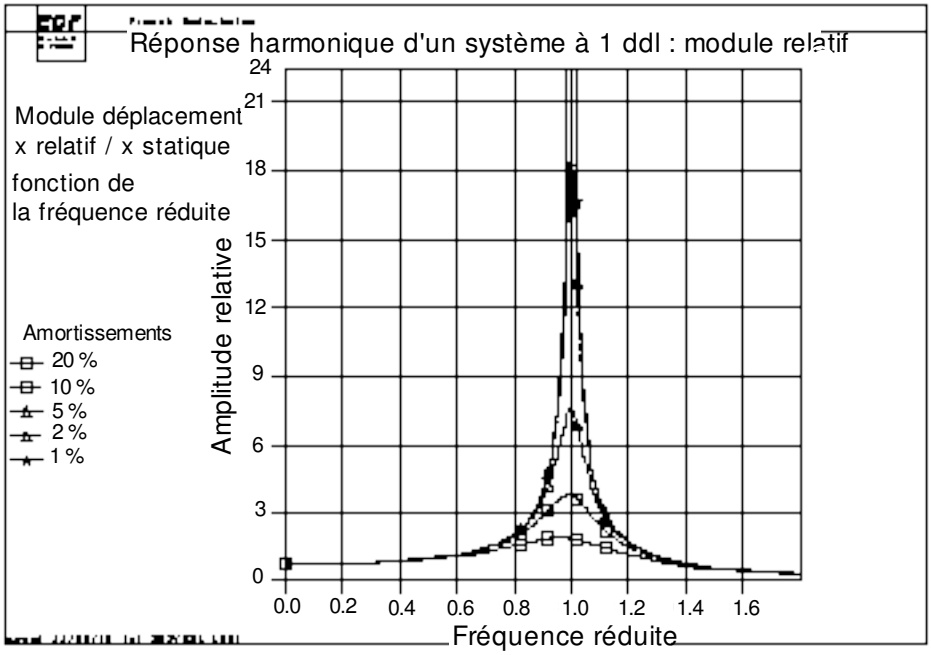


Figure A2.2-a : Réponse d'un oscillateur en mouvement imposé (module du déplacement relatif)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 3Mouvement imposé non périodique d'un système à un degré de liberté

Le problème traité précédemment se limitait à un mouvement imposé périodique. Pour une excitation non périodique, d'amplitude variable avec le temps, s'exerçant pendant une durée finie, on considère la réponse à une série d'impulsions.

A3.1 Réponse impulsionnelle

La forme la plus simple est la force impulsionnelle unitaire, qui appliquée à une masse au repos avant l'application de l'impulsion ($x=\dot{x}=0$ pour $t<0$ ou $t=0^-$) peut s'écrire :

$$\tilde{f}=\lim_{\Delta t\to 0}\int_t^{t+\Delta t} F\,dt=F\cdot dt=1=m\dot{X}(t=0)-m\dot{X}(t=0^-)=m\dot{X}_0$$

Les conditions initiales sont alors notées $X(t=0)=X_0$ et $\dot{X}(t=0)=\dot{X}_0=\frac{1}{m}$

L'équation générale de la réponse en vibration libre d'un système à un degré de liberté :

$$X_l(t)=e^{-\xi\omega_0 t}\left(X_0\cos\omega'_0 t+\frac{\dot{X}_0+\xi\omega_0 x_0}{\omega'_0}\sin\omega'_0 t\right)$$

devient alors la réponse impulsionnelle $g(t)$ d'un système à un degré de liberté

$$X_l(t)=g(t)=\frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{m\omega'_0}\sin\omega'_0 t \qquad \text{éq A3.1-1}$$

Pour une impulsion non unitaire $\tilde{F}=F\cdot\Delta t$, la vitesse initiale est $\dot{X}_0=\frac{F}{m}$ et la réponse devient :

$$X_l(t)=\frac{\tilde{F}e^{-\xi\omega_0 t}}{m\omega'_0}\sin\omega'_0 t=\tilde{F}g(t) \qquad \text{éq A3.1-2}$$

Si la force impulsionnelle est appliquée à un instant τ quelconque, la réponse est :

$$X_l(t)=\tilde{F}g(t-\tau)$$

A3.2 Réponse en vibration forcée quelconque

La force d'excitation $F(t)$ peut être décomposée en une série d'impulsions d'amplitude variable $F(\tau)$ appliquées à l'instant τ pendant un temps τ . Si $\Delta\tau\to 0$, la réponse à un instant t est obtenue par :

$$X(t)=\int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

et en remplaçant par l'expression de la réponse impulsionnelle [éq A.3-2], on obtient l'équation de convolution pour une système au repos à l'instant 0 de la forme :

$$X(t)=\frac{1}{m\omega'_0}\int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\sin\omega'_0(t-\tau)d\tau \qquad \text{éq A3.2-1}$$

connue sous le nom d'intégrale de DUHAMEL.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A3.3 Réponse en mouvement imposé quelconque

Pour une analyse en mouvement relatif représentée par [éq A2.2-1] :

$$\ddot{x}+2\xi\omega_0\dot{x}+\omega_0^2 x=-\ddot{s}=\omega^2 s_0\cos(\omega t)$$

l'intégrale de DUHAMEL devient :

$$x(t)=\frac{1}{\omega'_0}\int_0^t \ddot{s}(\tau)e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\sin\omega'_0(t-\tau)d\tau \qquad \text{éq A3.3-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)