Modélisation élasto(visco)plastique prenant en compte des transformations métallurgiques

Résumé :

Ce document présente la modélisation mise en place dans *code_aster* pour l'analyse mécanique d'opérations générant des transformations métallurgiques. On présente les différents effets mécaniques résultant des transformations structurales à prendre en compte et leurs modélisations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction....4
2 Notations générales....6
3 Influence des transformations structurales sur la déformation thermique....8
3.1 Phases métallurgiques....8
3.2 Essai de dilatométrie....8
3.3 Zones de déformation thermique....9
3.4 Déformation thermique....9
4 Plasticité de transformation....11
5 Restauration d'écrouissage....13
5.1 Restauration visqueuse d'écrouissage....13
5.1.1 Modèle monophasique....13
5.1.2 Modèle multiphasique....13
5.2 Restauration d'écrouissage isotrope métallurgique....14
5.2.1 Modèle à deux phases avec un sens de transformation....14
5.2.2 Généralisation du modèle à n phases avec transformations à double sens....15
5.2.3 Restauration d'écrouissage cinématique métallurgique....16
5.3 Paramètres matériaux....16
6 Modèles de déformation (visco)plastique....18
6.1 Partition de la déformation....18
6.2 Lois de comportement....18
6.2.1 Cas de l'écrouissage isotrope....18
6.2.2 Cas de l'écrouissage cinématique....19
6.3 Cas limites....19
6.3.1 Modèle plastique indépendant du temps....19
6.3.2 Modèle de comportement de fluide visqueux....19
6.4 Plasticité multiphasée....20
6.4.1 Loi linéaire des mélanges....20
6.4.1.1 Viscoplasticité avec écrouissage isotrope....20
6.4.1.2 Viscoplasticité avec écrouissage cinématique....21
6.4.2 Loi non- linéaire des mélanges....21
6.5 Résumé des modèles disponibles....23
6.5.1 Modèle viscoplastique avec écrouissage isotrope, restauration visqueuse et plasticité de transformation....23
6.5.2 Modèle viscoplastique avec écrouissage cinématique, restauration visqueuse et plasticité de transformation....24
6.5.3 Sélection du comportement....24
7 Formulation numérique....26
7.1 Discrétisation....26
7.2 Intégration des relations métallurgiques....26

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.2.1 Expression des contraintes....26
7.2.2 Expression de l'incrément plastique....27
7.3 Quantités en prédiction....28
7.3.1 Multiplicateur plastique....28
7.3.2 Incrément de contrainte....30
7.3.3 Second membre en prédiction – Contribution de la métallurgie....31
7.3.4 Matrice tangente en prédiction (option RIGI_MECA_TANG)....32
7.4 Quantités en correction....32
7.4.1 Matrice tangente en correction (option FULL_MECA)....32
7.5 Synthèse des matrices....34
8 Description des versions du document....35
9 Bibliographie....35

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Certains matériaux subissent des transformations structurales lorsqu'ils sont soumis à des évolutions thermiques particulières [1], [2], [3]. C'est par exemple le cas des aciers faiblement alliés au cours d'opérations de type soudage et traitement thermique ou encore les alliages de zircaloy des gaines de combustible pour certains cas de situation accidentelle (APRP).
Ces transformations ont une influence plus ou moins forte sur les évolutions thermiques et mécaniques.

D'un point de vue thermique, les transformations structurales s'accompagnent d'une modification des caractéristiques thermiques (capacité calorifique volumique, conductivité thermique) du matériau qui les subit, ainsi que d'une production ou d'une absorption d'énergie (chaleurs latentes de transformation) [2] . Toutefois, les chaleurs latentes de transformation à l'état solide sont relativement faibles comparées aux chaleurs latentes de changement d'état liquide-solide et on peut donc, en première approximation, considérer les évolutions thermiques et structurales comme découplées. C'est actuellement le cas des options de calculs thermiques et métallurgiques implantées dans *code_aster*. [U4.85.01]

D'un point de vue mécanique, les conséquences des transformations structurales (à l'état solide) sont de quatre types [2] :

- Les caractéristiques mécaniques du matériau qui les subit sont modifiées. Plus précisément, les caractéristiques élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson) sont peu affectées alors que les caractéristiques plastiques (limite d'élasticité notamment) et le coefficient de dilatation thermique le sont fortement ;
- L'expansion ou la contraction volumique qui accompagne les transformations structurales se traduit par une déformation (sphérique) « de transformation » qui se superpose à la déformation d'origine purement thermique. Cet effet est mis en évidence sur un essai de dilatométrie et, en général, on le regroupe avec celui dû à la modification du coefficient de dilatation et l'on parle globalement de l'influence des transformations sur la déformation thermique ;
- Une transformation se déroulant sous contraintes peut donner naissance à une déformation irréversible et ce, même pour des niveaux de contraintes très inférieurs à la limite d'élasticité du matériau (à la température et dans l'état structural considérés). On appelle « **plasticité de transformation »** ce phénomène ;
- On peut avoir lors de la transformation métallurgique un phénomène de **restauration d'écrouissage**. L'écrouissage de la phase mère n'est pas transmis aux phases nouvellement créées. Celles-ci peuvent alors naître avec un état d'écrouissage vierge ou n'hériter que d'une partie, éventuellement de la totalité, de l'écrouissage de la phase mère.

Par ailleurs, l'état mécanique influence également le comportement métallurgique. L'état de contraintes peut notamment accélérer ou ralentir la cinétique des transformations et modifier les températures auxquelles elles se produisent. Cependant, la caractérisation expérimentale de cette influence, notamment dans le cas de situations complexes (tridimensionnelles, sous température et état de contraintes variables) demeure très délicate et il est très fréquent de considérer l'évolution structurale comme indépendante de l'état mécanique. C'est le cas du modèle de transformations structurales implanté dans *code_aster*.

Si l'on néglige les différents couplages d'origine mécanique, la détermination de l'évolution mécanique associée à un processus mettant en jeu des transformations structurales nécessite donc deux calculs successifs et découplés :

- Un calcul thermo-métallurgique (découplé) permettant la détermination des évolutions thermiques puis structurales ;
- Un calcul mécanique (élasto-viscoplastique) tenant compte des effets dus aux évolutions thermiques et structurales ;

Ce document présente la modélisation mécanique implantée dans *code_aster*. La modélisation est disponible pour deux matériaux :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- L'acier qui subit aux environs de $850\,°$ une transformation austénito-ferritique (passage de phases ferritiques à froid de structure cubique face centrée à une phase austénitique à chaud de structure cubique centrée). L'acier présente quatre phases ferritiques possibles : la ferrite, la perlite, la bainite et la martensite ;
- Les alliages de Zircaloy qui subissent aux environs de $800\,°C$ une transformation de phase à froid α de structure hexagonale compacte à une phase à chaud β de structure cubique centrée (cc).

Les modèles sont identiques pour les deux matériaux, seul le nombre de phase change.
Le modèle comporte donc cinq phases pour l'acier et trois phases pour le zircaloy. La modélisation du comportement du zircaloy nécessite en effet de considérer deux phases à froid de comportement mécanique différent ; une phase α considérée comme pure et une phase α mélangée avec du β [U4.85.01], [4].

Nota Bene :

Les notions métallurgiques de bases nécessaires à la compréhension du problème général sont rassemblées en [1] .

L'algorithme de résolution élasto-plastique, sans prise en compte des effets dus aux transformations structurales est explicité en [5].

Ce document est pour partie extrait de [6] où l'on fait une présentation plus détaillée du modèle et de quelques éléments de validation.

La présentation des modèles que l'on fait dans ce document est illustrée avec le cas de l'acier.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Notations générales

Toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $^-$. Les quantités évaluées à l'instant $t+\Delta t$ ne sont pas indicées. Les incréments sont désignés par Δ. On a ainsi :

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(t+\Delta t)=\boldsymbol{Q}(t)+\Delta\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^-+\Delta\boldsymbol{Q} \quad (1)$$

Pour le calcul des dérivées , on notera $\dot{\boldsymbol{Q}}$ dérivée de $\boldsymbol{Q}$ par rapport au temps. Les tenseurs et les vecteurs seront notés en **gras**.

$Z_{k_f=1,4}$	Proportion des phases ferritiques (ferrite, perlite, bainite et martensite)
Z_γ	Proportion de la phase austénitique
Z_f	Somme de toutes les phases de type ferritiques
ε_γ^{th}	Déformation thermique de la phase austénitique
ε_f^{th}	Déformation thermique des phases ferritiques
$\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}$	Différence de compacité entre la phase à chaud et à froid
$\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$	Déformation thermique
T^{ref}	Température de référence
α_γ	Coefficient de dilatation moyen de la phase austénitique
α_f	Coefficient de dilatation moyen des phases ferritiques
Z_γ^R	Indicateur de la phase métallurgique de référence (vaut 1 lorsque la phase de référence est la phase austénitique et 0 lorsque la phase de référence est la phase ferritique)
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\sim$	Opérateur déviatorique
$\langle\cdot\rangle$	Partie positive
$()_{eq}$	Valeur équivalente d'un tenseur au sens de Von Mises
$\boldsymbol{Id}$	Tenseur identité
$\boldsymbol{A}$	Tenseur d'élasticité de Hooke
λ , μ	Coefficients de Lamé
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
K	Module de compressibilité $3K=3\lambda+2\mu$
T	Température
t	Temps
g_Z^{pt}	Fonction pour la plasticité de transformation
$R_{0,k}$	Coefficient d'écrouissage linéaire de la phase k
θ_{γ,k_f}	Proportion de restauration d'écrouissage lors de la transformation austénite vers ferrite
$\theta_{k_f,\gamma}$	Proportion de restauration d'écrouissage lors de la transformation ferrite vers austénite
C_k , m_k	Coefficients de restauration visqueuse de la phase k
$g^{re,v}$	Fonction pour la restauration d'écrouissage isotrope visqueuse
$\boldsymbol{h}^{re,v}$	Fonction pour la restauration d'écrouissage cinématique visqueuse
$g_{k_f}^{re,m}$	Fonction pour la restauration d'écrouissage isotrope métallurgique (phases froides)
$g_\gamma^{re,m}$	Fonction pour la restauration d'écrouissage isotrope métallurgique (phase chaude)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\boldsymbol{h}_{k_f}^{\mathrm{re},m}$	Fonction pour la restauration d'écrouissage cinématique métallurgique (phases froides)
$\boldsymbol{h}_{\gamma}^{\mathrm{re},m}$	Fonction pour la restauration d'écrouissage cinématique métallurgique (phase chaude)
$\overline{R}$	Coefficient d'écrouissage linéaire homogénéisé (multiphasé)
$\sigma_{c,k}$	Limite d'élasticité de la phase k
$\overline{\sigma}_c$	Limite d'élasticité du matériau homogénéisé (multiphasé)
$\boldsymbol{X}_k$	Tenseur de rappel pour l'écrouissage cinématique et pour la phase k
$\overline{\boldsymbol{X}}$	Tenseur de rappel pour l'écrouissage cinématique homogénéisé (multiphasé)
η_k , n_k	Coefficients matériaux pour la viscosité de la phase k
$\overline{\eta}$, $\overline{n}$	Coefficients matériaux pour la viscosité homogénéisée (multiphasée)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Influence des transformations structurales sur la déformation thermique

3.1 Phases métallurgiques

A tout instant t et en chaque point M du matériau, on peut détecter deux groupes de phases :

- Les phases *ferritiques* , dites « phases à froid », de structure cubique face centrée. L'acier présente quatre phases ferritiques possibles : la ferrite, la perlite, la bainite et la martensite. On notera $Z_{k_f=1,4}$ la proportion de chacune de ces phases ;
- La phase *austénitique* , dite aussi « phase à chaud », de structure cubique centrée. On notera Z_γ la proportion d'austénite ;

On a :

$$Z_\gamma = 1 - \sum_{k_f=1}^{4} Z_{k_f} \quad (2)$$

On notera également Z_f la somme de toutes les phases de type ferritiques, soit :

$$Z_f = \sum_{k_f=1}^{4} Z_{k_f} \quad (3)$$

3.2 Essai de dilatométrie

Un essai de dilatométrie consiste à mesurer la déformation (homogène) d'une éprouvette de petite dimension en fonction de la température (ou du temps) lors d'un cycle thermique imposé (supposé identique en tous les points de l'éprouvette). On présente [Figure 2-a] un essai de dilatométrie d'un acier. Le cycle thermique comporte un chauffage au-delà de la température d'austénitisation (soit $850\,°C$ environ), puis un maintien à cette température et, enfin, un refroidissement contrôlé jusqu'à la température ambiante. On obtient alors une évolution de la déformation (variable selon la cinétique de refroidissement imposée) telle que représentée sur la figure suivante.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

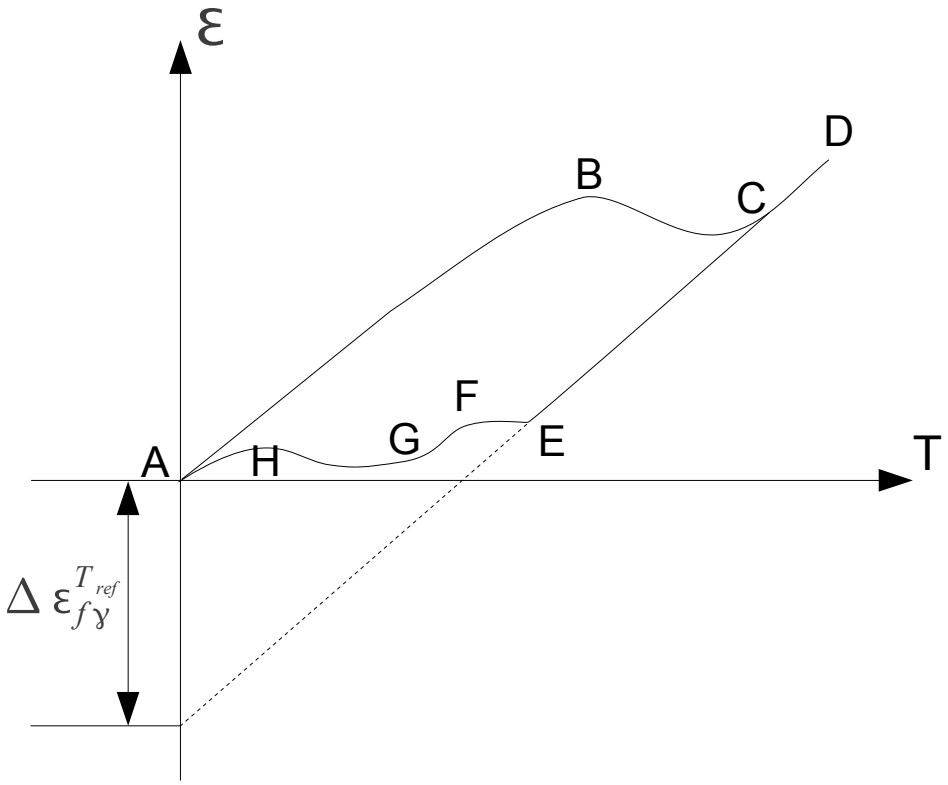


Figure 3-1: Relevé schématique de dilatométrie

3.3 Zones de déformation thermique

Les différentes zones mises en évidence sur la figure 3-1 peuvent s'interpréter comme suit :

A-B : Dilatation thermique du métal dans sa structure métallurgique initiale (de type ferrito-perlitique, bainitique et/ou martensitique) jusqu'à la température de début d'austénitisation $T(B)$
B-C : Austénitisation et contraction de l'éprouvette (volume spécifique de la phase austénitique plus petit)
C-D : Dilatation thermique de l'austénite (avec un coefficient de dilatation différent de celui des phases ferritiques)
D-E : Contraction thermique de l'austénite
E-F : Première transformation (partielle) de l'austénite (par exemple austénite vers ferrito-perlitique) qui s'accompagne d'une expansion volumique
F-G : Zone sans transformation avec contraction thermique du mélange austénite restante - phase formée (avec un certain coefficient de dilatation thermique apparent)
G-H : Seconde transformation de l'austénite restante (par exemple austénite vers martensite) qui s'accompagne d'une expansion volumique
H-A : Contraction thermique de la structure finale (avec le même coefficient de dilatation qu'au chauffage)

3.4 Déformation thermique

Les structures ferritiques, perlitiques, bainitiques et martensitiques ont un coefficient de dilatation thermique identique (noté α_f) différent de celui de l'austénite (noté α_γ). On définit un état de référence pour lequel on considère que la déformation thermique est nulle, pour cela on choisit une phase métallurgique de référence (phase austénitique ou phase ferritique) et une température de référence T_{ref} . Soit ε_γ^{th} la déformation thermique de la phase austénitique :

$$\varepsilon_\gamma^{th} = \alpha_\gamma(T)\left(T - T_{ref}\right) - \left(1 - Z_\gamma^R\right)\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \quad (4)$$

Et ε_f^{th} la déformation thermique des phases ferritique, perlitique, bainitique et martensitique, nous prendrons :

$$\varepsilon_f^{th} = \alpha_f(T)\left(T - T_{ref}\right) + Z_\gamma^R\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \quad (5)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Avec :

T^{ref} : Température de référence ;

$\alpha_\gamma(T)$: Coefficient de dilatation moyen de la phase austénitique à la température courante T, par rapport à la température de référence ;

$\alpha_f(T)$: Coefficient de dilatation moyen des phases ferritique, perlitique, bainitique et martensitique à la température courante T, par rapport à la température de référence ;

Z_γ^R : Caractérise la phase métallurgique de référence :

$Z_\gamma^R=1$ lorsque la phase de référence est la phase austénitique ;

$Z_\gamma^R=0$ lorsque la phase de référence est la phase ferritique.

En fait, $\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}$ traduit la différence de compacité entre les structures cristallographiques cubiques à faces centrées (austénite) et cubiques centrées (ferrite) à la température de référence T_{ref} :

$$\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}=\varepsilon_f^{th}(T_{ref})-\varepsilon_\gamma^{th}(T_{ref}) \quad (6)$$

Moyennant l'hypothèse d'une loi de mélange pour définir la déformation thermique d'un mélange multiphasé (caractérisé par Z) on a :

$$\varepsilon^{th}(\mathbf{Z},T)=Z_\gamma\left[\alpha_\gamma(T-T_{ref})-(1-Z_\gamma^R)\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}\right]+Z_f\left[\alpha_f(T-T_{ref})+Z_\gamma^R\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}\right] \quad (7)$$

Les α dépendent de la température et sont calculés pour la température du point de Gauss courant. La déformation thermique est purement sphérique, sa généralisation tridimensionnelle s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th}=\varepsilon^{th}\boldsymbol{Id} \text{ car } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}=0 \quad (8)$$

Paramètre physique		**Mot-clef ELAS_META**
Coefficient de dilatation moyen des phases ferritiques	α_f	F_ALPHA
Coefficient de dilatation moyen de la phase austénitique	α_γ	C_ALPHA
Phase métallurgique de référence		PHASE_REFE
Différence de compacité entre la phase à chaud et à froid	$\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}$	EPSF_EPSC_TREF

La température de référence T^{ref} étant donné par le mot-clef prévu dans AFFE_MATERIAU .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Plasticité de transformation

Expérimentalement, on constate que le relevé dilatométrique d'une éprouvette en cours de transformation structurale est fortement influencé par l'état de contraintes et que l'application d'une contrainte même inférieure à la limite d'élasticité du matériau peut néanmoins provoquer une déformation irréversible (cf. [Figure 3-a]).

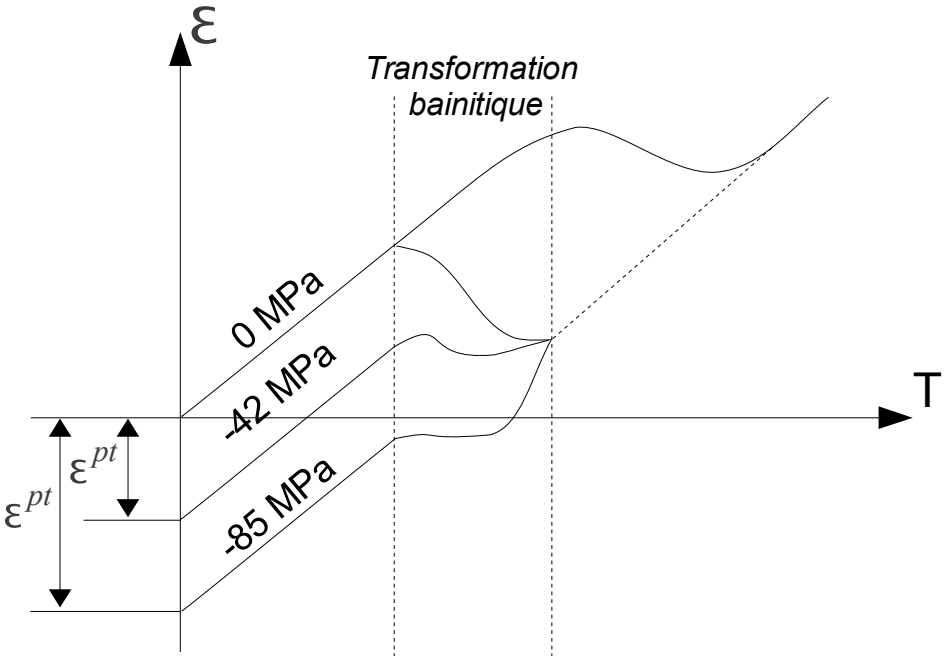


Figure 4-1: Courbes dilatométriques sous contraintes uniaxiales de compression pour un acier 16 MND5

On appelle **plasticité de transformation** ce phénomène et on note ε^{pt} la **déformation irréversible** correspondante. Le modèle de plasticité de transformation le plus fréquemment utilisé est, à l'origine, la généralisation tridimensionnelle du modèle phénoménologique unidimensionnel établi par Desalos [7]. Si, à partir d'un essai dilatométrique, on trace la différence entre l'allongement ε obtenu pour une contrainte appliquée différente de zéro et celui obtenu pour une contrainte nulle en fonction de l'avancement de la transformation, on constate que :

$$\varepsilon^{pt}(\sigma, b) = \varepsilon(\sigma, b) - \varepsilon(0, b) = kF(b)\sigma \tag{9}$$

Avec :

k : Constante homogène à l'inverse d'une contrainte ;

F : Fonction normalisée ($F(0)=0$ et $F(1)=1$) ;

b : Proportion de la phase transformée ;

Une généralisation tridimensionnelle et temporelle du modèle expérimental précédent, pour une seule transformation, a été proposée par Leblond [8], [9], [10], [11], sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pt} = \frac{3}{2} K \tilde{\sigma}_{ij} F'(b) \dot{b} \tag{10}$$

Elle s'appuie sur les considérations heuristiques suivantes :

- La relation doit être « incrémentale », c'est-à-dire relier le taux de déformation plastique au taux de transformation ;
- La vitesse de déformation plastique de transformation doit être, comme pour la plasticité classique, proportionnelle à la partie déviatorique $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ du tenseur contrainte $\boldsymbol{\sigma}$. La plasticité de transformation se produit sans changement de volume, d'où une dépendance par rapport au déviateur des contraintes plutôt qu'au champ de contraintes lui-même ;
- Le taux de déformation plastique de transformation doit être nul en dehors des plages de transformations ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- L'intégration de cette relation dans le cas uniaxial à contrainte constante σ doit redonner la relation expérimentale.

Sur la base d'essais expérimentaux et pour une transformation de type bainitique d'un acier 16MND5 par exemple $K=10^{-4}MPa^{-1}$ et $F(b)=b(2-b)$.
Le phénomène de plasticité de transformation peut exister lors des transformations structurales sous contraintes de type ferritique, perlitique, bainitique et martensitique, qui peuvent éventuellement apparaître simultanément. En revanche, on considère que ce phénomène n'existe pas lors de la transformation austénitique. Pour alléger l'écriture, on note pour la plasticité de transformation :

$$g_Z^{pt}(Z,\dot{Z})=\sum_{k_f=1}^{4} K_{k_f} F'_{k_f}\langle \dot{Z}_{k_f}\rangle \tag{11}$$

Le modèle général implanté dans *code_aster* est donc :

$$\dot{\varepsilon}^{pt}(\sigma,Z)=\sum_{k_f=1}^{4}\dot{\varepsilon}_{k_f}^{pt}(\sigma,Z)=\frac{3}{2}\tilde{\sigma}\, g_Z^{pt}(Z,\dot{Z}) \tag{12}$$

Où $\langle X\rangle$ désigne la partie positive d'une grandeur. Dans *code_aster,* il est possible de ne pas prendre en compte le phénomène de plasticité de transformation. Dans le cas où ce phénomène est pris en compte, il apparaît dès qu'il y a transformation et cela même si la structure plastifie. Le modèle est plus particulièrement dédié à l'acier. Les données K_{k_f} et F'_{k_f} sont fournies par l'utilisateur dans DEFI_MATERIAU sous le mot clé META_PT.

Paramètre physique pour la plasticité de transformation		**Mot-clef META_PT**
Constante pour la phase ferritique 1	K_1	F1_K
Constante pour la phase ferritique 2	K_2	F2_K
Constante pour la phase ferritique 3	K_3	F3_K
Constante pour la phase ferritique 4	K_4	F4_K
Fonction dérivée pour la phase ferritique 1	F'_1	F1_D_F_META
Fonction dérivée pour la phase ferritique 2	F'_2	F2_D_F_META
Fonction dérivée pour la phase ferritique 3	F'_3	F3_D_F_META
Fonction dérivée pour la phase ferritique 4	F'_4	F4_D_F_META

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Restauration d'écrouissage

De façon usuelle l'état d'écrouissage d'un matériau est caractérisé par son histoire plastique. Ainsi par exemple dans le cas de la plasticité avec écrouissage isotrope *linéaire*, on prend généralement comme variable d'écrouissage la déformation plastique cumulée notée p . Le terme d'écrouissage s'écrit alors :

$$R = R_o p \tag{13}$$

Où R_o est le coefficient d'écrouissage linéaire. Ce modèle est insuffisant dans deux cas :

1. Pour les matériaux viscoplastiques, sous l'action de l'agitation thermique, il se produit une restauration lente de la structure cristalline du métal par annihilation des dislocations et relaxation des contraintes internes ;
2. Lors des transformations métallurgiques, il existe au sein du matériau des déplacements d'atomes plus ou moins importants. Ces déplacements d'atomes peuvent annihiler des dislocations qui sont à l'origine de l'écrouissage ;

5.1 Restauration visqueuse d'écrouissage

5.1.1 Modèle monophasique

On introduit dans la modélisation le phénomène de restauration visqueuse d'écrouissage qui conduit à une évanescence partielle de l'écrouissage. Le modèle utilisé pour décrire ce phénomène est le suivant dans le cas de l'écrouissage isotrope :

$$\dot{r} = \dot{p} - g^{\mathrm{re},v} \tag{14}$$

Le terme d'évolution de la variable d'écrouissage r comporte donc un terme d'écrouissage dû à la déformation plastique $\dot{p}$ et un terme de restauration visqueuse que l'on notera $g^{\mathrm{re},v}$:

$$g^{\mathrm{re},v} = (Cr)^m \tag{15}$$

Le modèle permet ainsi de décrire le phénomène de fluage primaire (écrouissage) et de fluage secondaire (stabilisation de l'écrouissage) avec les paramètres C et m . Dans le cas de l'écrouissage cinématique, le modèle s'écrira :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \boldsymbol{h}^{\mathrm{re},v} \tag{16}$$

Avec le terme de restauration que l'on notera $\boldsymbol{h}^{\mathrm{re},v}$:

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{re},v} = \frac{3}{2}\left(C\alpha_{eq}\right)^m \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\alpha_{eq}} \tag{17}$$

5.1.2 Modèle multiphasique

Dans le cas multiphasé, la partie visqueuse de la restauration s'exprime en remplaçant la variable d'écrouissage par une valeur moyenne sur les phases :

$$r \to \overline{r} \ ; \ C \to \overline{C} \ ; \ m \to \overline{m} \tag{18}$$

Avec une moyenne se faisant sur les ***cinq*** phases :

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{5} Z_k r_k \ ; \ \overline{C} = \sum_{k=1}^{5} Z_k C_k \ ; \ \overline{m} = \sum_{k=1}^{5} Z_k m_k \tag{19}$$

Et donc :

$$\overline{g}^{\mathrm{re},v} = (\overline{C}\,\overline{r})^{\overline{m}} \tag{20}$$

Dans le cas de l'écrouissage cinématique, d'après (17), on a :

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{re},v} = \frac{3}{2}\left(C\alpha_{eq}\right)^m \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\alpha_{eq}} \tag{21}$$

On procède de la même manière que pour l'écrouissage isotrope :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \overline{\boldsymbol{\alpha}} \text{ et } \alpha_{eq} \rightarrow \overline{\alpha}_{eq} \tag{22}$$

Avec :

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{k=1}^{5} Z_k \overline{\boldsymbol{\alpha}}_k \text{ et } \overline{\alpha}_{eq} = \sum_{k=1}^{5} Z_k (\alpha_k)_{eq} \tag{23}$$

Et donc :

$$\overline{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{re},v} = \frac{3}{2} (\overline{C}\, \overline{\alpha}_{eq})^{\overline{m}} \frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}}}{\overline{\alpha}_{eq}} \tag{24}$$

5.2 Restauration d'écrouissage isotrope métallurgique

Dans le cas multi-phasique, le terme d'écrouissage s'écrit pour chaque phase :

$$R_k = R_{0,k}\, p \tag{25}$$

Où $R_{0,k}$ est le coefficient d'écrouissage linéaire de la phase k. Lors des transformations métallurgiques, il existe au sein du matériau des déplacements d'atomes plus ou moins importants. Ces déplacements d'atomes peuvent annihiler des dislocations qui sont à l'origine de l'écrouissage. Dans ces cas, l'écrouissage de la phase mère n'est pas transmis à la phase produite, c'est la restauration d'écrouissage. La nouvelle phase peut alors naître avec un état plastique vierge ou n'hériter que d'une partie, éventuellement de la totalité, de l'écrouissage de la phase mère. La déformation plastique cumulée p n'est plus caractéristique de l'état d'écrouissage et il faut définir d'autres variables d'écrouissage pour chaque phase, notées r_k qui tiennent compte de la restauration d'écrouissage. Le terme d'écrouissage de la phase k s'écrit alors :

$$R_k = R_{0,k}\, r_k \tag{26}$$

5.2.1 Modèle à deux phases avec un sens de transformation

Pour définir les variables r_k, on choisit le modèle proposé par Leblond [11]. On considère un élément de volume biphasé V qui subit une transformation métallurgique et une déformation plastique. La phase 1 est la phase mère, caractérisée par sa fraction volumique V_1, sa proportion de phase $(1-z)$ et une variable d'écrouissage r_1. La phase 2 est la phase produit, avec sa fraction volumique V_2, sa proportion de phase z et sa variable d'écrouissage r_2. Les équations d'évolution des r_i obtenues par dérivation par rapport au temps s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \dot{p} \\ \dot{r}_2 = \dot{p} - \dfrac{\dot{z}}{z} r_2 + \dfrac{\dot{z}}{z} \theta\, r_1 \end{cases} \tag{27}$$

Le paramètre θ caractérise la proportion d'écrouissage transmis de la phase mère à la phase produite et $\dot{p}$ est le taux de déformation plastique équivalente. p ici n'est plus une variable interne du problème en tant que telle. La seule signification de $\dot{p}$ est ici d'être le multiplicateur plastique et elle est égale au taux de déformation plastique équivalente. Sjöström obtient les mêmes équations en utilisant un raisonnement phénoménologique qu'on reporte ici pour expliciter le modèle [12].

Soit un incrément de temps Δt, tel que entre t et $t+\Delta t$:

- Une fraction ΔV_2 de la phase mère se transforme en phase 2 et vient donc se rajouter au volume V_2 de cette phase produit;
- L'élément de volume V subit une déformation plastique Δp.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\begin{cases} V_2, r_2(t) \\ V_1, r_1(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta t \\ \Delta p \\ \Delta V_2 \end{cases}$	$\begin{cases} V_2, r_2(t)+\Delta p \\ \Delta V_2, \theta r_1(t)+\Delta p \\ V_1, r_1(t)+\Delta p \end{cases}$

On suppose que lors de la transformation métallurgique, la fraction transformée ΔV_2 n'hérite que d'une partie θr_1 de l'écrouissage de la phase mère $0 \leq \theta \leq 1$. Alors les variables d'écrouissage r_i à l'instant $t+\Delta t$ sont telles que :

$$\begin{cases} r_1(t+\Delta t)=r_1(t)+\Delta p \\ r_2(t+\Delta t)=\dfrac{V_2(r_2(t)+\Delta p)+\Delta V_2(\theta r_1(t)+\Delta p)}{V_2+\Delta V_2} \end{cases} \quad (28)$$

Soit, en considérant une écriture incrémentale standard des variables d'écrouissage telle que :

$$\Delta r_i = r_i(t+\Delta_t)-r_i(t) \quad (29)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \Delta r_1=\Delta p \\ \Delta r_2=\Delta p+\dfrac{\Delta V_2}{V_2+\Delta V_2}\theta r_1^- - \dfrac{\Delta V_2}{V_2+\Delta V_2} r_2^- \end{cases} \quad (30)$$

On obtient les équations (27) en passant à la limite. Pour la discrétisation des lois d'évolutions des r_i, on choisit un schéma d'intégration explicite en utilisant directement les équations (30).

5.2.2 Généralisation du modèle à *n* phases avec transformations à double sens

Pour le cas de l'acier les phases existantes sont la ferrite, la perlite, la bainite, la martensite et l'austénite γ de proportions respectives $Z_{k_f=1,4}$ et Z_γ. Quand on chauffe, les transformations métallurgiques à considérer sont les transformations des phases ferritiques (ferrite, perlite, bainite et martensite) vers la phase austéniqtique. La proportion d'austénite augmente et donc :

$$\begin{cases} \text{Si } Z_\gamma > 0 & \dot{r}_\gamma = \dot{p}_\gamma + g_\gamma^{re,m} \\ \text{Sinon} & \dot{r}_\gamma = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Avec $g_\gamma^{re,m}$ la fonction de restauration d'écrouissage isotrope métallurgique pour l'austénite :

$$g_\gamma^{re,m}=\frac{\sum_{k_f=1}^{4} \langle -\dot{Z}_{k_f} \rangle \theta_{k_f,\gamma} r_{k_f} - \sum_{k_f=1}^{4} \langle -\dot{Z}_{k_f} \rangle r_\gamma}{Z_\gamma} \quad (32)$$

Où $\theta_{k_f,\gamma}$ est la proportion de restauration d'écrouissage lors de la transformation d'une phase ferritique vers la phase austénitique. Dans le cas d'un refroidissement, les transformations métallurgiques à considérer sont les transformations de l'austénite vers les phases ferritiques (ferrite, perlite, bainite et martensite). Ce sont les proportions de phases ferritiques qui augmentent et on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \text{Si } Z_{k_f} > 0 & \dot{r}_{k_f} = \dot{p}_{k_f} + g_{k_f}^{re,m} \\ \text{Sinon} & \dot{r}_{k_f} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Avec $g_{k_f}^{re,m}$ la fonction de restauration d'écrouissage métallurgique isotrope pour les phases ferritiques :

$$g_{k_f}^{re,m} = \frac{\langle \dot{Z}_{k_f} \rangle \theta_{\gamma,k_f} r_\gamma - \langle \dot{Z}_{k_f} \rangle r_{k_f}}{Z_{k_f}} \quad (34)$$

θ_{γ,k_f} est la proportion de restauration d'écrouissage lors de la transformation de la phase austénitique en une phase ferritique.

Pour des transformations avec diffusion (par exemple : austénite vers ferrite, perlite et bainite), impliquant des déplacements importants d'atomes on pourra prendre $\theta = 0$; les dislocations à l'origine de l'écrouissage plastique sont totalement annihilées par la transformation. Pour des transformations sans diffusion (par exemple une transformation martensitique), on pourra prendre $\theta = 1$, l'écrouissage étant totalement transmis.

5.2.3 Restauration d'écrouissage cinématique métallurgique

Par analogie avec le cas de l'écrouissage isotrope, la restauration d'écrouissage cinématique dans le cas multiphasée s'écrira, pour le cas de l'austénite :

$$\begin{cases} \text{Si } Z_\gamma > 0 & \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\gamma = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \boldsymbol{h}_\gamma^{re,m} \\ \text{Sinon} & \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\gamma = 0 \end{cases} \quad (35)$$

Avec $\boldsymbol{h}_\gamma^{re,m}$ la fonction de restauration d'écrouissage isotrope métallurgique pour l'austénite :

$$\boldsymbol{h}_\gamma^{re,m} = \frac{\sum_{k_f=1}^{4} \langle -\dot{Z}_{k_f} \rangle \theta_{k_f,\gamma} \boldsymbol{\alpha}_{k_f} - \sum_{k_f=1}^{4} \langle -\dot{Z}_{k_f} \rangle \boldsymbol{\alpha}_\gamma}{Z_\gamma} \quad (36)$$

Et pour les phases ferritiques :

$$\begin{cases} \text{Si } Z_{k_f} > 0 & \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{k_f} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \boldsymbol{h}_{k_f}^{re,m} \\ \text{Sinon} & \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{k_f} = 0 \end{cases} \quad (37)$$

Avec $\boldsymbol{h}_{k_f}^{re,m}$ la fonction de restauration d'écrouissage métallurgique cinématique pour les phases ferritiques :

$$\boldsymbol{h}_{k_f}^{re,m} = \frac{\langle \dot{Z}_{k_f} \rangle \theta_{\gamma,k_f} \boldsymbol{\alpha}_\gamma - \langle \dot{Z}_{k_f} \rangle \boldsymbol{\alpha}_{k_f}}{Z_{k_f}} \quad (38)$$

5.3 Paramètres matériaux

Les paramètres θ de la restauration d'écrouissage métallurgique sont fournis par l'utilisateur dans l'opérateur DEFI_MATERIAU sous le mot clé META_RE.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Paramètre physique pour la restauration d'écrouissage métallurgique		Mot-clef MET A_RE
Taux d'écrouissage transmis de l'austénite à la phase ferritique 1	$\theta_{\gamma,1}$	C_ F1_ THETA
Taux d'écrouissage transmis de l'austénite à la phase ferritique 2	$\theta_{\gamma,2}$	C_ F 2 _ THETA
Taux d'écrouissage transmis de l'austénite à la phase ferritique 3	$\theta_{\gamma,3}$	C_ F 3 _ THETA
Taux d'écrouissage transmis de l'austénite à la phase ferritique 4	$\theta_{\gamma,4}$	C_ F 4 _ THETA
Taux d'écrouissage transmis de la phase ferritique 1 à l'austénite	$\theta_{1,\gamma}$	F1_ C_THETA
Taux d'écrouissage transmis de la phase ferritique 2 à l'austénite	$\theta_{2,\gamma}$	F 2 _ C_THETA
Taux d'écrouissage transmis de la phase ferritique 3 à l'austénite	$\theta_{3,\gamma}$	F 3 _ C_THETA
Taux d'écrouissage transmis de la phase ferritique 4 à l'austénite	$\theta_{4,\gamma}$	F 4 _ C_THETA

Les paramètres C et m de la restauration d'écrouissage visqueuse sont fournis par l'utilisateur dans l'opérateur DEFI_MATERIAU sous le mot clé META_ VISC .

Paramètre physique pour la restauration d'écrouissage visqueuse		Mot-clef META_VISC
Paramètre m de la phase ferritique 1	m_1	F1_ M
Paramètre m de la phase ferritique 2	m_2	F 2 _ M
Paramètre m de la phase ferritique 3	m_3	F 3 _ M
Paramètre m de la phase ferritique 4	m_4	F 4 _ M
Paramètre m de la phase austénitique	m_γ	C _ M
Paramètre C de la phase ferritique 1	C_1	F1_ C
Paramètre C de la phase ferritique 2	C_2	F 2 _ C
Paramètre C de la phase ferritique 3	C_3	F 3 _ C
Paramètre C de la phase ferritique 4	C_4	F 4 _ C
Paramètre C de la phase austénitique	C_γ	C _ C

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modèles de déformation (visco)plastique

La principale caractéristique des évolutions thermiques concernées dans ce type d'analyse est qu'elles balaient un large domaine de température, ce qui a un effet important sur le comportement mécanique du matériau qui subit l'évolution thermique. On est notamment dans des domaines de température où les phénomènes de viscosité peuvent ne plus être négligeables. Il peut donc être nécessaire d'utiliser un modèle de comportement élasto-viscoplastique surtout lorsqu'on reste dans ces domaines pendant une durée importante ; par exemple lors des traitements de détensionnement associés au soudage.
On choisit donc un modèle viscoplastique dont les caractéristiques sont telles qu'il permette de décrire avec un même formalisme, donc sans changer de modèle :

- Un comportement plastique classique; pour modéliser les cas à basse température lorsque les effets visqueux sont encore négligeables ou pour modéliser les processus à vitesse élevée (soudage) ;
- Un comportement viscoplastique écrouissable à haute température, pour modéliser les effets de fluage et de relaxation associés par exemple aux traitement de détensionnement ou aux soudages multipasses ;
- Un comportement de type fluide visqueux pour les températures supérieures à la température de fusion, afin d'avoir une description raisonnable de la zone fondue.

Le modèle viscoplastique choisi dégénère en effet pour certains cas limites en modèle de plasticité indépendant du temps, ou en modèle de fluide visqueux.

6.1 Partition de la déformation

La déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ s'écrit comme la somme de quatre composantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{e}+\boldsymbol{\varepsilon}^{th}+\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}+\boldsymbol{\varepsilon}^{pt} \tag{39}$$

Où $\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$ sont, respectivement, les déformations élastique, thermique, visco-plastique et de plasticité de transformation. Les déformations de type plastique sont purement déviatoriques et la déformation thermique est purement sphérique. Pour la partie déviatorique, on a donc :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} \tag{40}$$

Et pour la partie sphérique :

$$tr(\boldsymbol{\varepsilon})=tr(\boldsymbol{\varepsilon}^{e})+tr(\boldsymbol{\varepsilon}^{th}) \tag{41}$$

6.2 Lois de comportement

6.2.1 Cas de l'écrouissage isotrope

On se place ici dans le cadre de la (visco)plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope additif. La fonction seuil s'écrit :

$$f(\sigma,r;T,Z)=\sigma_{eq}-R(r;T,Z)-\sigma_{c}(T,Z) \tag{42}$$

Avec σ_{eq} la contrainte équivalente de Von Mises telle que :

$$\sigma_{eq}=\left(\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\right)^{1/2} \tag{43}$$

R est le terme d'écrouissage isotrope et σ_{c} est la contrainte critique initiale. Elle correspond à la contrainte minimale initiale à appliquer pour avoir un écoulement visco-plastique. Ces deux quantités peuvent dépendre de la température et des phases métallurgiques. On peut réécrire l'équation (42) sous la forme :

$$f^{*}=f-\sigma_{v}=\sigma_{eq}-R(r;T,Z)-\sigma_{c}(T,Z)-\sigma_{v}=0 \tag{44}$$

C'est-à-dire que dans ce modèle, la contrainte peut s'interpréter comme la somme d'une contrainte limite d'écoulement (qui se décompose elle même en une contrainte limite initiale et un terme d'écrouissage) et une contrainte « visqueuse » dépendant de la vitesse de déformation et nulle à vitesse nulle :

$$\sigma_{v}=\eta\,\dot{p}^{\frac{1}{n}} \tag{45}$$

Le taux d ' écoulement (visco) plastique s'écrit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}=\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{3}{2}\dot{p}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \tag{46}$$

Ce tenseur est purement déviatorique. La déformation plastique cumulée $\dot{p}$ est visqueuse et s'écrit :

$$\dot{p}=\left(\frac{\langle \sigma_{eq}-R(r;T,Z)-\sigma_c(T,Z)\rangle}{\eta}\right)^n \tag{47}$$

Avec η et n les coefficients matériaux de viscosité.

6.2.2 Cas de l'écrouissage cinématique

De manière équivalente au cas avec écrouissage isotrope, la fonction seuil s'écrit :

$$f(\sigma,\boldsymbol{X};T,Z)=(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{X})_{eq}-\sigma_c(T,Z) \tag{48}$$

Avec $\boldsymbol{X}$ le tenseur d'écrouissage associé au tenseur variable d'écrouissage $\boldsymbol{\alpha}$ tel que :

$$\boldsymbol{X}=\frac{2}{3}H_0\boldsymbol{\alpha} \tag{49}$$

H_0 est le coefficient d'écrouissage cinématique. De manière similaire au cas isotrope, on peut réécrire l'équation (48) en introduisant la contrainte de rappel visqueuse :

$$f^*=f-\sigma_v=(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{X})_{eq}-\sigma_c(T,Z)-\sigma_v=0 \tag{50}$$

Le taux d ' écoulement (visco) plastique s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}=\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{3}{2}\dot{p}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{X})_{eq}} \tag{51}$$

La déformation plastique cumulée $\dot{p}$ est visqueuse et s'écrit :

$$\dot{p}=\left(\frac{\langle (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{X})_{eq}-\sigma_c(T,Z)\rangle}{\eta}\right)^n \tag{52}$$

6.3 Cas limites

6.3.1 Modèle plastique indépendant du temps

On veut décrire un comportement élasto-plastique instantané et annuler les effets visqueux. Pour cela les paramètres visqueux η et C seront pris égaux à zéro. Pour s'affranchir des problèmes numériques que peut poser la prise en compte de η et C nuls, et de manière similaire au traitement effectué pour le modèle viscoplastique de Taheri [R5.03.05], on réécrit l'équation (44) sous la forme :

$$f-\sigma_v\leq 0 \tag{53}$$

L'inégalité stricte étant obtenue dans le cas $f<0$ et $\dot{p}=0$ qui correspond au régime élastique. Dans le domaine de comportement purement plastique ($\eta\to 0$) l'inégalité (53) est alors réduite à :

$$f=\sigma_{eq}-R(r;T,Z)-\sigma_c(T,Z)\leq 0 \tag{54}$$

Si bien que $\dot{p}$ ne peut plus être déterminé que par l'équation de consistance $\dot{f}=0$. On se retrouve donc bien dans le cadre de la plasticité instantanée indépendante du temps, avec un traitement numérique identique à celui classiquement utilisé pour le traitement de celle-ci. On notera que σ_c correspond alors à la définition classique de la limite élastique σ_y. La limite d'élasticité sera notée σ_c en viscoplasticité et σ_y en plasticité indépendante du temps.

6.3.2 Modèle de comportement de fluide visqueux

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A très haute température on a $R \to 0$ et $\sigma_c \to 0$, la fonction seuil se réduit donc :

$$f(\sigma, r; T, Z) = \sigma_{eq} \tag{55}$$

Si on prend $n \to 1$, alors :

$$\dot{p} = \frac{\langle \sigma_{eq} \rangle}{\eta} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \tag{56}$$

Le taux d'écoulement (visco) plastique s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \tag{57}$$

Soit en unidimensionnel :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\sigma}{\eta} \tag{58}$$

On obtient ainsi un modèle de comportement de type fluide visqueux newtonien, de viscosité η.

6.4 Plasticité multiphasée

Les transformations métallurgiques entraînent des modifications des caractéristiques mécaniques du matériau. Les caractéristiques élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson) sont peu affectées par les changements de structures métallurgiques. Seule leur dépendance par rapport à la température est donc prise en compte. Par contre, les caractéristiques plastiques (limite d'élasticité notamment) dépendent fortement de la structure métallurgique. Il faut donc prendre en compte les différences de caractéristiques plastiques pour chacune des phases possibles. Dans la modélisation, la déformation et la contrainte sont définies à l'échelle du point matériel (macroscopique) qui peut être multiphasé. On cherche à définir le comportement plastique équivalent du matériau lorsqu'il présente une structure multiphasée, avec notamment un critère unique de plasticité.

6.4.1 Loi linéaire des mélanges

La définition du comportement du matériau équivalent se fait à l'aide d'une ***loi des mélanges*** sur les caractéristiques des phases. Plus précisément la définition de ce matériau équivalent correspondrait en 1D à un modèle rhéologique de k barres en parallèle tel que :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\varepsilon}_k^{vp} \\ \sigma = \sum_k z_k \sigma_k \text{ avec } \sigma_k = \sigma_{c,k} + R_k + \eta \dot{\varepsilon}_k^{vp} \end{cases} \tag{59}$$

6.4.1.1 Viscoplasticité avec écrouissage isotrope

Dans le cas de la viscoplasticité de von Mises avec écrouissage isotrope :

$$f(\sigma, r; T, Z) = \sigma_{eq} - R(r; T, Z) - \sigma_c(T, Z) \tag{60}$$

On écrit l'écrouissage du matériau multiphasé $\overline{R}$ par application de la loi des mélanges :

$$\overline{R}(r; T, Z) = \sum_{k=1}^{5} Z_k R_k(r_k; T) \tag{61}$$

Où R_k est l'écrouissage de la phase k. La limite d'élasticité du matériau multiphasé $\overline{\sigma}_c$ s'écrit de même :

$$\overline{\sigma}_c(T, Z) = \sum_{k=1}^{5} Z_k \sigma_{c,k}(T) \tag{62}$$

Où $\sigma_{c,k}$ est la limite d'élasticité de la phase k. Ce qui nous donne une nouvelle fonction seuil sur le matériau multiphasé :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\overline{f}(\sigma,r;T,Z)=\sigma_{eq}-\overline{R}(r;T,Z)-\overline{\sigma}_c(T,Z) \quad (63)$$

Le taux de déformation plastique vérifie la condition de consistance (44) (fonction f^*). Avec une moyenne se faisant sur les ***cinq*** phases :

$$\overline{\eta}=\sum_{k=1}^{5} Z_k \eta_k \; ; \overline{n}=\sum_{k=1}^{5} Z_k n_k \quad (64)$$

On applique la loi des mélanges sur la contrainte de rappel visqueuse :

$$\overline{\sigma}_v(T,Z)=\overline{\eta}\,\dot{p}^{\frac{1}{\overline{n}}} \quad (65)$$

Et donc :

$$\overline{f}^*=\sigma_{eq}-\overline{R}(r;T,Z)-\overline{\sigma}_c(T,Z)-\overline{\sigma}_v(T,Z)=0 \quad (66)$$

C'est-à-dire que lorsque on est en charge, $\dot{p}$ est tel que :

$$\overline{f}^*=\sigma_{eq}-\overline{R}-\overline{\sigma}_c-\overline{\sigma}_v=0 \quad (67)$$

6.4.1.2 Viscoplasticité avec écrouissage cinématique

Dans le cas de la viscoplasticité de von Mises avec écrouissage cinématique :

$$f(\sigma,\boldsymbol{X};T,Z)=(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{X})_{eq}-\sigma_c(T,Z) \quad (68)$$

On écrit l'écrouissage du matériau multiphasé $\overline{X}$ par application de la loi des mélanges :

$$\overline{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\alpha};T,Z)=\sum_{k=1}^{5} Z_k \boldsymbol{X}_k\left(\boldsymbol{\alpha}_k;T\right) \quad (69)$$

La limite d'élasticité du matériau multiphasé $\overline{\sigma}_c$ s'écrit de même que dans le cas isotrope (62) :

$$\overline{\sigma}_c(T,Z)=\sum_{k=1}^{5} Z_k \sigma_{c,k}(T) \quad (70)$$

Ce qui nous donne une nouvelle fonction seuil sur le matériau multiphasé :

$$\overline{f}(\sigma,\boldsymbol{X};T,Z)=(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\overline{\boldsymbol{X}})_{eq}-\overline{\sigma}_c(T,Z) \quad (71)$$

Le taux de déformation plastique vérifie la condition de consistance (50) (fonction f^*). De manière similaire, on applique la loi des mélanges sur la contrainte visqueuse. C'est-à-dire que lorsque on est en charge, $\dot{p}$ est tel que :

$$\overline{f}^*=(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\overline{\boldsymbol{X}})_{eq}-\overline{\sigma}_c(T,Z)-\overline{\sigma}_v=0 \quad (72)$$

6.4.2 Loi non- linéaire des mélanges

On rappelle que l'on note Z_f la somme de toutes les phases de type ferritique, soit :

$$Z_f=\sum_{k_f=1}^{4} Z_{k_f} \quad (73)$$

On donne également la possibilité d'utiliser une loi des mélanges non linéaire [9] entre la phase chaude (austénitique) et les phases froides (ferritiques), telle que on ait dans le cas unidimensionnel :

$$\overline{\sigma}=(1-f_h(Z_f))\sigma_\gamma+f_h(Z_f)\sigma_\alpha \quad (74)$$

La quantité f_h est la fonction de mélange. On a alors l'écrouissage qui s'écrit :

$$\overline{R}=(1-f_h(Z_f))R_\gamma+f_h(Z_f)\overline{R}_\alpha \quad (75)$$

$\overline{R}_\alpha$ est l'écrouissage moyen des phases à froid (phases ferritiques) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\overline{R}_{\alpha}=\frac{\sum_{k_f=1}^{4} Z_{k_f} R_{k_f}}{Z_f} \tag{76}$$

La contrainte initiale du matériau multiphasé s'écrit de même :

$$\overline{\sigma}_c=(1-f_h(Z_f))\sigma_{c,\gamma}+f_h(Z_f)\overline{\sigma}_{c,\alpha} \tag{77}$$

$\overline{\sigma}_{c,\alpha}$ est la contrainte initiale équivalente des phases à froid (phases ferritiques) :

$$\overline{\sigma}_{c,\alpha}=\frac{\sum_{k_f=1}^{4} Z_{k_f}\sigma_{c,k_f}}{Z_f} \tag{78}$$

$f_h(Z_f)$ est une fonction définie par l'utilisateur. La limite d'élasticité $\overline{\sigma}_y$ dans le cas élasto-plastique (non visqueux) utilise la même règle de mélange que $\overline{\sigma}_c$. L'ensemble est renseigné dans la commande DEFI_MATERIAU.

Paramètre physique		**Mot-clef ELAS_META**
Limite d'élasticité de la phase ferritique 1	$\sigma_{y,1}$	F1_SY
Limite d'élasticité de la phase ferritique 2	$\sigma_{y,2}$	F2_SY
Limite d'élasticité de la phase ferritique 3	$\sigma_{y,3}$	F3_SY
Limite d'élasticité de la phase ferritique 4	$\sigma_{y,4}$	F4_SY
Limite d'élasticité de la phase austénitique	$\sigma_{y,\gamma}$	C_SY
Contrainte critique initiale de la phase ferritique 1	$\sigma_{c,1}$	F1_S_VP
Contrainte critique initiale de la phase ferritique 2	$\sigma_{c,2}$	F2_S_VP
Contrainte critique initiale de la phase ferritique 3	$\sigma_{c,3}$	F3_S_VP
Contrainte critique initiale de la phase ferritique 4	$\sigma_{c,4}$	F4_S_VP
Contrainte critique initiale de la phase austénitique	$\sigma_{c,\gamma}$	C_S_VP
Fonction de mélange	$f_h(Z_f)$	SY_MELANGE
Fonction de mélange pour le cas visqueux		S_VP_MELANGE

Les paramètres η_k et n_k sont définis dans DEFI_MATERIAU sous le mot clé facteur META_VISC .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Paramètre physique		Mot-clef META_VISC
Paramètre η de la phase ferritique 1	η_1	F1_ETA
Paramètre η de la phase ferritique 2	η_2	F2_ETA
Paramètre η de la phase ferritique 3	η_3	F3_ETA
Paramètre η de la phase ferritique 4	η_4	F4_ETA
Paramètre η de la phase austénitique	η_γ	C_ETA
Paramètre n de la phase ferritique 1	n_1	F1_N
Paramètre n de la phase ferritique 2	n_2	F2_N
Paramètre n de la phase ferritique 3	n_3	F3_N
Paramètre n de la phase ferritique 4	n_4	F4_N
Paramètre n de la phase austénitique	n_γ	C_N

6.5 Résumé des modèles disponibles

6.5.1 Modèle viscoplastique avec écrouissage isotrope, restauration visqueuse et plasticité de transformation

En réunissant :
- La partition des déformations (39) ;
- La déformation thermique (7) ;
- La déformation pour la plasticité de transformation (12) ;
- La déformation visco-plastique avec écrouissage isotrope (46) ;
- La loi de Hooke ;

On obtient le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^{vp} + \tilde{\varepsilon}^{pt} \\ \sigma = \boldsymbol{A} : \varepsilon^e \\ \varepsilon^{th} = \left(Z_\gamma \left[\alpha_\gamma (T - T_{ref}) - (1 - Z_\gamma^R) \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right] + Z_f \left[\alpha_f (T - T_{ref}) + Z_\gamma^R \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right] \right) \boldsymbol{Id} \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}^{pt} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma} \sum_{k_f=1}^{4} K_{k_f} F'_{k_f} \left\langle \dot{Z}_{k_f} \right\rangle \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} \end{cases} \quad (79)$$

En ajoutant, l'expression de la loi viscoplastique avec écrouissage isotrope, soit :
- La fonction seuil (42) en appliquant la loi des mélanges sur l'écrouissage (61) et la contrainte critique (62) ;
- La fonction seuil modifiée (67) ;

On a l'expression du critère de (visco-)plasticité :

$$\begin{cases} \bar{f} = \sigma_{eq} - \bar{R} - \bar{\sigma}_c \\ \bar{f}^* = \sigma_{eq} - \bar{R} - \bar{\sigma}_c - \bar{\sigma}_v \\ \dot{p} = 0 \text{ si } \bar{f} < 0 \\ \dot{p} \geq 0 \text{ si } \bar{f} = 0 \text{ avec } \bar{f}^* = 0 \end{cases} \quad (80)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Enfin, la mise à jour de l'écrouissage par phases avec prise en compte de la restauration d'écrouissage métallurgique et de la restauration visqueuse nous permettent d'écrire la mise-à-jour des variables d'écrouissage :

$$\begin{cases} \dot{r}_\gamma = \dot{p}_\gamma + g_\gamma^{re,m} - \overline{g}^{re,v} \text{ si } Z_\gamma > 0 \text{ et } \dot{r}_\gamma = 0 \text{ sinon} \\ \dot{r}_{k_f} = \dot{p}_{k_f} + g_{k_f}^{re,m} - \overline{g}^{re,v} \text{ si } Z_{k_f} > 0 \text{ et } \dot{r}_{k_f} = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (81)$$

6.5.2 Modèle viscoplastique avec écrouissage cinématique, restauration visqueuse et plasticité de transformation

En réunissant :
- La partition des déformations (39) ;
- La déformation thermique (7) ;
- La déformation pour la plasticité de transformation (12) ;
- La déformation visco-plastique avec écrouissage cinématique (51) ;
- La loi de Hooke ;

On obtient le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \left(Z_\gamma \left[\alpha_\gamma (T - T_{ref}) - (1 - Z_\gamma^R) \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right] + Z_f \left[\alpha_f (T - T_{ref}) + Z_\gamma^R \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right] \right) \boldsymbol{Id} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pt} = \frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \sum_{k_f=1}^{4} K_{k_f} F'_{k_f} \left\langle \dot{Z}_{k_f} \right\rangle \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{X})_{eq}} \end{cases} \quad (82)$$

En ajoutant, l'expression de la loi viscoplastique avec écrouissage isotrope, soit :
- La fonction seuil (48) en appliquant la loi des mélanges sur l'écrouissage (69) et la contrainte critique (70) ;
- La fonction seuil modifié e (72) ;

On a l'expression du critère de (visco-)plasticité :

$$\begin{cases} \overline{f} = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \overline{\boldsymbol{X}})_{eq} - \overline{\sigma}_c \\ \overline{f}^* = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \overline{\boldsymbol{X}})_{eq} - \overline{\sigma}_c - \overline{\sigma}_v \\ \dot{p} = 0 \text{ si } \overline{f} < 0 \\ \dot{p} \geq 0 \text{ si } \overline{f} = 0 \text{ avec } \overline{f}^* = 0 \end{cases} \quad (83)$$

Enfin, la mise à jour de l'écrouissage par phases avec prise en compte de la restauration d'écrouissage métallurgique et de la restauration visqueuse nous permettent d'écrire la mise-à-jour des variables d'écrouissage :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\gamma = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \boldsymbol{h}_\gamma^{re,m} + \overline{\boldsymbol{h}}^{re,v} \text{ si } Z_\gamma > 0 \text{ et } \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\gamma = \boldsymbol{0} \text{ sinon} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{k_f} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \boldsymbol{h}_{k_f}^{re,m} + \overline{\boldsymbol{h}}^{re,v} \text{ si } Z_{k_f} > 0 \text{ et } \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{k_f} = \boldsymbol{0} \text{ sinon} \end{cases} \quad (84)$$

6.5.3 Sélection du comportement

En terme de relations de comportement disponibles, la modélisation mise en place offre plusieurs possibilités :
- Choix du type de comportement pour la déformation plastique : plastique indépendant du temps ou avec prise en compte des effets visqueux;
- Choix d'un écrouissage isotrope linéaire, isotrope non linéaire ou cinématique;
- Prise en compte ou non de la plasticité de transformation;
- Prise en compte ou non de la restauration d'écrouissage métallurgique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le choix du matériau (acier ou zircaloy) et donc du nombre de phase se fait en renseignant le mot-clé KIT de COMPORTEMENT. ACIER pour l'acier avec cinq phases et ZIRC pour le zircaloy avec trois phases.
Il y a au total 24 combinaisons.

Comportement	Plastique	Visco.	Écrouissage			Plasticité Transform.	Restauration
			Isotrope		Cinématique		
			Linéaire	Non Linéaire	Linéaire		
META_P_CL_PT	OUI	NON	NON	NON	OUI	OUI	NON
META_P_CL_PT_RE	OUI	NON	NON	NON	OUI	OUI	OUI
META_P_CL	OUI	NON	NON	NON	OUI	NON	NON
META_P_CL_RE	OUI	NON	NON	NON	OUI	NON	OUI
META_P_IL_PT	OUI	NON	OUI	NON	NON	OUI	NON
META_P_IL_PT_RE	OUI	NON	OUI	NON	NON	OUI	OUI
META_P_IL	OUI	NON	OUI	NON	NON	NON	NON
META_P_IL_RE	OUI	NON	OUI	NON	NON	NON	OUI
META_P_INL_PT	OUI	NON	NON	OUI	NON	OUI	NON
META_P_INL_PT_RE	OUI	NON	NON	OUI	NON	OUI	OUI
META_P_INL	OUI	NON	NON	OUI	NON	NON	NON
META_P_INL_RE	OUI	NON	NON	OUI	NON	NON	OUI
META_V_CL_PT	NON	OUI	NON	NON	OUI	OUI	NON
META_V_CL_PT_RE	NON	OUI	NON	NON	OUI	OUI	OUI
META_V_CL	NON	OUI	NON	NON	OUI	NON	NON
META_V_CL_RE	NON	OUI	NON	NON	OUI	NON	OUI
META_V_IL_PT	NON	OUI	OUI	NON	NON	OUI	NON
META_V_IL_PT_RE	NON	OUI	OUI	NON	NON	OUI	OUI
META_V_IL	NON	OUI	OUI	NON	NON	NON	NON
META_V_IL_RE	NON	OUI	OUI	NON	NON	NON	OUI
META_V_INL_PT	NON	OUI	NON	OUI	NON	OUI	NON
META_V_INL_PT_RE	NON	OUI	NON	OUI	NON	OUI	OUI
META_V_INL	NON	OUI	NON	OUI	NON	NON	NON
META_V_INL_RE	NON	OUI	NON	OUI	NON	NON	OUI

Pour l'ensemble des relations, les variables internes produites dans *code_aster* sont :

- r_k les variables d'écrouissage efficace pour les k phases. Elles sont nommées par phase. Par exemple, pour un écrouissage isotrope d'un alliage d'acier, on a : FERRITE#EPSPEQ, PERLITE#EPSPEQ, BAINITE#EPSPEQ, MARTENSITE#EPSPEQ et AUSTENITE#EPSPEQ. ;
- d l' indicateur de plasticité (0 si le dernier incrément calculé est élastique ; 1 sinon) ; C'est une quantité globale ;
- R le terme d'écrouissage de la fonction seuil. C'est une quantité globale calculée par une loi des mélanges (voir § 6.4) ;

Par ailleurs, ces modélisations peuvent être réalisées avec la fonctionnalité de réactualisation géométrique PETIT_REAC. Pour les relations à écrouissage isotrope, le modèle de grandes déformations SIMO_MIEHE est également disponible (voir [R4.04.03]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Formulation numérique

On traitera uniquement la loi de comportement viscoplastique avec écrouissage isotrope. On obtient la même chose pour le cas de l'écrouissage cinématique, R_0 est alors remplacé par le coefficient d'écrouissage cinématique H_0.

7.1 Discrétisation

Connaissant les champs σ, $\boldsymbol{u}$ et p à l'instant t, on choisit un schéma implicite pour discrétiser en temps les équations du problème continu, sauf pour les paramètres d'écrouissage. On remarque qu'avec une discrétisation implicite, seuls deux points différencient les deux types de comportement visco-plastique et plastique indépendant du temps :

- La forme de la fonction de charge, pour laquelle on a un terme complémentaire dans le cas de la viscosité (voir 6.4.1.1 et 6.4.1.2) ;
- La présence du terme de restauration d'écrouissage dans l'évolution de la variable d'écrouissage pour le cas viscoplastique.

De plus, la plasticité classique incrémentale apparaît comme le cas limite (sans difficulté numérique associée) de la viscoplasticité incrémentale lorsque $\eta, C \to 0$ et $\sigma_c \to \sigma_y$. Ce type de traitement a déjà été effectué par Lorentz [R5.03.05]. Pour calculer les opérateurs tangents, on adoptera la convention d'écriture des tenseurs symétriques d'ordre deux sous forme de vecteurs à six composantes. Ainsi, pour un tenseur $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = {}^t\left[a_{xx} \quad a_{yy} \quad a_{zz} \quad \sqrt{2}\, a_{xy} \quad \sqrt{2}\, a_{xz} \quad \sqrt{2}\, a_{yz} \right] \tag{85}$$

7.2 Intégration des relations métallurgiques

7.2.1 Expression des contraintes

On donne l'expression de σ en fonction de :

- $\Delta \varepsilon$ inconnue du problème;
- Les termes connus tels les variables calculées au pas précédent (contraintes, variables internes ...), les caractéristiques matériaux, les variables de commandes (température, phases métallurgiques) ;

On rappelle la partition des déformations déviatoriques :

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^{vp} + \tilde{\varepsilon}^{pt} \tag{86}$$

On sépare le tenseur des contraintes entre ses composantes déviatoriques et sa composante sphérique :

$$\sigma = \tilde{\sigma} + tr(\sigma)\, \boldsymbol{Id} \tag{87}$$

En appliquant la loi de Hooke :

$$\sigma = \boldsymbol{A}\, \varepsilon^e \tag{88}$$

Avec sa partie déviatorique :

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\, \tilde{\varepsilon}^e \tag{89}$$

Et sa partie sphérique :

$$tr(\sigma) = 3K\, tr(\varepsilon^e) \tag{90}$$

Par discrétisation implicite, on obtient :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^- + 2\mu\left(\Delta\tilde{\varepsilon} - \Delta\tilde{\varepsilon}^{vp} - \Delta\tilde{\varepsilon}^{pt}\right) \tag{91}$$

En injectant (12) et (46) :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^- + 2\mu\left(\Delta\tilde{\varepsilon} - \frac{3}{2}\Delta p\, \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} - \frac{3}{2}\tilde{\sigma}\, g_Z^{pt}\right) \tag{92}$$

Pour la partie sphérique du tenseur des contraintes, on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$tr(\boldsymbol{\sigma})=\frac{3\mathrm{K}}{3\mathrm{K}^{-}}tr(\boldsymbol{\sigma}^{-})+3\mathrm{K}\,tr(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{93}$$

Car les déformations de type plastique sont purement déviatoriques et donc $tr(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vp})=tr(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pt})=0$. En réorganisant (92) :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{1+3\mu\,g_Z^{pt}}\left(\frac{\mu}{\mu^{-}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}+2\mu\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-3\mu\,\Delta p\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\right) \tag{94}$$

On a besoin de développer l'expression de $\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$. On part de l'expression de la partition des déformations déviatoriques, soit :

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}+\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} \tag{95}$$

En injectant les valeurs des incréments de déformation :

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu}-\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}}{2\mu^{-}}\right)+\frac{3}{2}\Delta p\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}+\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\,g_Z^{pt} \tag{96}$$

En multipliant par 2μ :

$$2\mu\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}+\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}=\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\left[\left(1+3\mu\,g_Z^{pt}\right)\sigma_{eq}+3\mu\,\Delta p\right] \tag{97}$$

On pose la contrainte élastique déviatorique :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}=2\mu\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}+\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-} \tag{98}$$

Et la contrainte élastique équivalente au sens de Von Mises :

$$\sigma_{eq}^{e}=\left[\left(1+3\mu\,g_Z^{pt}\right)\sigma_{eq}+3\mu\,\Delta p\right] \tag{99}$$

L 'expression de $\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$ vaut alors :

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}=\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}{\sigma_{eq}^{e}} \tag{100}$$

7.2.2 Expression de l'incrément plastique

Les quantités (98) et (99) sont toutes connues à l'instant courant, sauf l'incrément Δp . Pour trouver cette valeur, on utilise la condition de cohérence :

$$\begin{cases}\overline{f}=\sigma_{eq}-\overline{R}-\overline{\sigma}_c\\ \overline{f}^{*}=\sigma_{eq}-\overline{R}-\overline{\sigma}_c-\overline{\sigma}_v\\ \Delta p=0 \text{ si } \overline{f}<0\\ \Delta p\geq 0 \text{ si } \overline{f}=0 \text{ avec } \overline{f}^{*}=0\end{cases} \tag{101}$$

Il suffit donc d'exprimer $\overline{f}^{*}=0$ pour trouver l'expression de Δp . Seuls σ_{eq} , $\overline{R}$ et la contrainte visqueuse $\overline{\sigma}_v$ dépendent de Δp . Soit sous forme incrémentale :

$$\overline{f}^{*}=\sigma_{eq}-\overline{R}(p^{-}+\Delta p)-\overline{\sigma}_c-\overline{\eta}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{\pi}}=0 \tag{102}$$

En utilisant l'expression (99), on trouve :

$$\sigma_{eq}=\frac{\sigma_{eq}^{e}-3\mu\,\Delta p}{1+3\mu\,g_Z^{pt}} \tag{103}$$

Il faut donc trouver le zéro de la fonction suivante pour déterminer Δp :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\bar{f}^{*}=\frac{\sigma_{eq}^{e}-3\mu\Delta p}{1+3\mu g_{Z}^{pt}}-\overline{R}\left(p^{-}\right)-\overline{R}\left(\Delta p\right)-\overline{\sigma}_{c}-\overline{\eta}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{\overline{n}}}=0 \quad (104)$$

Cette équation est non-linéaire en Δp . La résolution est faite dans *code_aster* par une méthode des sécantes avec intervalle de recherche [R5.03.05].

7.3 Quantités en prédiction

Le but de ce paragraphe est de calculer les quantités nécessaires en prédiction. Entre autres, l'opérateur tangent K_{i-1} (option de calcul RIGI_MECA_TANG appelée à la première itération d'un nouvel incrément de charge) est évalué à partir des résultats connus à l'instant précédent t_{i-1} :

$$\boldsymbol{K}_{i-1}=\left.\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}\right|_{t_{i-1}} \text{ soit } \Delta\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{K}_{i-1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \text{ ou } \dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{K}_{i-1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (105)$$

Comme on fait l'hypothèse quasi-statique, les différentes quantités dépendent du temps que de manière *implicite* , via la dépendance des paramètres matériaux aux variables de commande [1] $\beta(t)$, elles-mêmes fonctions du temps . Dans la situation présente, il y a deux variables de commandes : la température T et les phases métallurgiques Z . Pour n_{varc} variables de commandes, on écrit la différentielle totale d'une quantité a :

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t}+\sum_{j=1,n_{varc}}\frac{\delta\boldsymbol{a}}{\delta\beta^{j}}\cdot\frac{\delta\beta^{j}}{\delta t} \quad (106)$$

On part de l'expression de la loi de Hooke incrémentale, pour sa partie déviatorique :

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}=2\mu\left(\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}-\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}-\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pt}\right) \quad (107)$$

La principale difficulté de cette expression est que la déformation viscoplastique $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}$ a pour inconnue le multiplicateur plastique qui est lui-même une inconnue du problème. Pour la partie sphérique en revanche, l'expression est triviale car elle ne dépend que de la déformation thermique et de la déformation élastique :

$$tr\left(\dot{\boldsymbol{\sigma}}\right)=3\mathrm{K}\,tr\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)-3\mathrm{K}\,tr\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}\right) \quad (108)$$

Avec l'expression de la déformation thermique donnée par (7).

7.3.1 Multiplicateur plastique

Pour établir l 'expression du multiplicateur plastique , on écrit la condition de consistance $\dot{\bar{f}}=0$:

$$\dot{\bar{f}}=\frac{d}{dt}\left(\sigma_{eq}-\overline{R}-\overline{\sigma_{c}}\right)=0 \quad (109)$$

La fonction $\bar{f}$ dépend de la contrainte équivalente de Von Mises qui est purement déviatorique et qui vaut :

$$\sigma_{eq}=\left(\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\right)^{1/2} \quad (110)$$

La contribution s'écrit alors :

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dt}=\frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial t}+\frac{\delta\sigma_{eq}}{\delta T}\cdot\frac{\delta T}{\delta t}+\frac{\delta\sigma_{eq}}{\delta Z}\cdot\frac{\delta Z}{\delta t} \quad (111)$$

Nous faisons l'hypothèse (habituelle dans *code_aster*) que la variation de la matrice de Hooke A en fonction des variables de commande est négligeable. C'est-à-dire que :

1 Une variable de commande est une quantité scalaire, fonction du temps et de l'espace, donnée a priori par l'utilisateur via le mot-clef AFFE_VARC dans l'opérateur AFFE_MATERIAU . C'est un *paramètre* du problème et non une *inconnue* .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\delta \sigma_{eq}}{\delta T}=\frac{\delta \sigma_{eq}}{\delta Z}=0 \tag{112}$$

Au final, la contribution $\dot{\sigma}_{eq}$ vaut alors :

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dt}=\dot{\sigma}_{eq}=\frac{3}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{A}\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{e}}{\sigma_{eq}} \tag{113}$$

Nous traitons désormais le cas du terme d'écrouissage $\overline{R}$. Nous allons négliger la variation du module d'écrouissage par rapport aux variables de commandes. C'est-à-dire que :

$$\frac{\delta \overline{R}}{\delta T}=\frac{\delta \overline{R}}{\delta Z}=0 \tag{114}$$

La différentielle totale en temps s'écrit donc :

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\sum_{k=1}^{5}\dot{Z}_k R_{0,k} r_k+\sum_{k=1}^{5}\dot{r}_k R_{0,k} Z_k \tag{115}$$

On néglige la variation des phases métallurgiques. Le deuxième terme implique d'utiliser la loi d'écrouissage multiphasée écrite dans (81) sans le terme de restauration visqueuse, ce qu'on l'on écrira sous forme condensée :

$$\dot{r}_k=\dot{p}_k+g_k^{\mathrm{re},m} \tag{116}$$

On a donc :

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\sum_{k=1}^{5}\dot{Z}_k R_{0,k} r_k+\sum_{k=1}^{5}\left(\dot{p}+g_k^{\mathrm{re},m}\right)R_{0,k} Z_k \tag{117}$$

On reconnaît le module équivalent $\overline{R}_0$:

$$\overline{R}_0=\sum_{k=1}^{5}R_{0,k} Z_k \tag{118}$$

Les autres termes seront regroupés dans la fonction B :

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\overline{R}_0\dot{p}+B \tag{119}$$

Comme on néglige l es effets de la variation des phases métallurgiques, ce terme B est supposé nul. Finalement :

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\dot{\overline{R}}=\overline{R}_0\dot{p} \tag{120}$$

Enfin, nous considérons le cas de la limite d'élasticité σ_y . Nous allons faire une dernière simplification en supposant que ce terme ne varie pas en fonction de la structure métallurgique et de la température. C'est-à-dire :

$$\frac{d\overline{\sigma}_y}{dt}=\dot{\sigma}_y=\frac{\partial \overline{\sigma}_y}{\partial t}\dot{t}+\frac{\partial \overline{\sigma}_y}{\partial T}\dot{T}+\frac{\partial \overline{\sigma}_y}{\partial Z}\dot{Z}=C \tag{121}$$

La quantité $\overline{\sigma}_y$ est une constante en temps. Sa dérivée partielle par rapport au temps est donc nulle. Les autres quantités (dépendance à la température et aux phases métallurgiques sont regroupées dans la fonction C . Ce terme C sera supposé nul. Au final, on aura trivialement :

$$\frac{d\overline{\sigma}_y}{dt}=\dot{\sigma}_y=0 \tag{122}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En reprenant (109) et en y injectant les résultats de la différenciation des termes (113), (120) et (122), on a finalement :

$$\dot{\overline{f}}=\frac{3}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{A}\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{e}}{\sigma_{eq}}-\overline{R}_{0}\dot{p}=0 \tag{123}$$

La composante déviatorique de la loi de Hooke s'écrit sous forme incrémentale :

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}=2\mu\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{e} \tag{124}$$

Ce qui donne une nouvelle expression (déviatorique) de la condition de consistance :

$$\dot{\overline{f}}=3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\left(\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}-\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}-\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pt}\right)}{\sigma_{eq}}-\overline{R}_{0}\dot{p}=0 \tag{125}$$

Il faut exprimer le tenseur des déformations élastiques à partir de l'expression (86) :

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{e}=\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}-\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}-\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pt} \tag{126}$$

On développe le premier terme pour la déformation plastique :

$$3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}}{\sigma_{eq}}=3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\frac{3}{2}\dot{p}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}}{\sigma_{eq}} \tag{127}$$

En utilisant (110) :

$$3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}}{\sigma_{eq}}=3\mu\dot{p} \tag{128}$$

On développe le second terme pour la plasticité de transformation (12) :

$$3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pt}}{\sigma_{eq}}=3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\,g_{Z}^{pt}\left(Z,\dot{Z}\right)}{\sigma_{eq}} \tag{129}$$

Il est important de noter que le terme g_{Z}^{pt} dépend de l'incrément des phases métallurgiques $\dot{Z}$. Par la suite, pour alléger l'écriture, nous ne l'écrirons pas explicitement. Toujours en utilisant (110) :

$$3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pt}}{\sigma_{eq}}=3\mu\sigma_{eq}g_{Z}^{pt} \tag{130}$$

Finalement :

$$\dot{\overline{f}}=3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{\sigma_{eq}}-3\mu\sigma_{eq}g_{Z}^{pt}-\left(\overline{R}_{0}+3\mu\right)\dot{p}=0 \tag{131}$$

Ce qui nous permet d'exprimer $\dot{p}$:

$$\dot{p}=\frac{3\mu}{\overline{R}_{0}+3\mu}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{\sigma_{eq}}-\sigma_{eq}g_{Z}^{pt}\right) \tag{132}$$

Cette expression est différente de celle donnée par (104) car il s'agit d'une approximation. En effet, on a considéré la condition de consistance sans le terme visqueux comme il est habituel de procéder. Mais cette expression n'a pas besoin d'être exacte puisqu'il s'agit de la matrice tangente en prédiction et a l'avantage d'être une formule analytique, au contraire de (104) qui nécessite l'utilisation d'un algorithme de recherche de zéro sur une fonction non linéaire.

7.3.2 Incrément de contrainte

A partir de la définition de l'incrément de déformation visco-plastique $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp}=\begin{cases}\frac{3}{2}\dot{p}\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} & \text{si} \quad \sigma_{eq}-\overline{R}-\overline{\sigma}_c=0\\ 0 & \text{si} \quad \sigma_{eq}-\overline{R}-\overline{\sigma}_c<0\end{cases} \tag{133}$$

Et de l'expression de $\dot{p}$ obtenue précédemment, o n obtient :

$$\dot{\varepsilon}^{vp}=\begin{cases}\frac{9\mu}{2\left(\overline{R}_0+3\mu\right)}\left\langle\frac{\tilde{\sigma}:\dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}}-\sigma_{eq}g_Z^{pt}\right\rangle\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} & \text{si} \quad \sigma_{eq}-\overline{R}-\overline{\sigma}_c=0\\ 0 & \text{si} \quad \sigma_{eq}-\overline{R}-\overline{\sigma}_c<0\end{cases} \tag{134}$$

Grâce à l'expression de la loi de Hooke incrémentale :

$$\dot{\tilde{\sigma}}=2\mu\left(\dot{\tilde{\varepsilon}}-\dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp}-\dot{\tilde{\varepsilon}}^{pt}\right) \tag{135}$$

En injectant l'expression de la déformation plastique (134) et de la plasticité de transformation, on obtient l'expression de l'incrément de contrainte :

$$\dot{\tilde{\sigma}}=2\mu\left[\dot{\tilde{\varepsilon}}-\frac{9\mu}{2\sigma_{eq}\left(\overline{R}_0+3\mu\right)}\left\langle\frac{\tilde{\sigma}:\dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}}-\sigma_{eq}g_Z^{pt}\right\rangle\tilde{\sigma}-\frac{3}{2}g_Z^{pt}\tilde{\sigma}\right] \tag{136}$$

L'expression de $\dot{\tilde{\sigma}}$ dépend du signe du terme (critère de charge-décharge) suivant :

$$\frac{\tilde{\sigma}:\dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}}-\sigma_{eq}g_Z^{pt} \tag{137}$$

On peut simplifier en disant que la décharge ou la charge ne dépendent pas de la plasticité de transformation, on approximera donc :

$$\left\langle\frac{\tilde{\sigma}:\dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}}-\sigma_{eq}g_Z^{pt}\right\rangle\approx\frac{\left\langle\tilde{\sigma}:\dot{\tilde{\varepsilon}}\right\rangle}{\sigma_{eq}}-\sigma_{eq}g_Z^{pt} \tag{138}$$

En décharge, le deuxième terme sera négligé et en charge, il s'ajoutera aux autres termes de (136) :

$$\dot{\tilde{\sigma}}=\begin{cases}2\mu\left[\dot{\tilde{\varepsilon}}-\frac{9\mu}{2}\frac{\left\langle\tilde{\sigma}:\dot{\tilde{\varepsilon}}\right\rangle}{\left(\overline{R}_0+3\mu\right)\sigma_{eq}^2}\tilde{\sigma}-\frac{3}{2}g_Z^{pt}\tilde{\sigma}\right] & \text{en décharge}\\ 2\mu\left[\dot{\tilde{\varepsilon}}-\frac{9\mu}{2}\frac{\left\langle\tilde{\sigma}:\dot{\tilde{\varepsilon}}\right\rangle}{\left(\overline{R}_0+3\mu\right)\sigma_{eq}^2}\tilde{\sigma}-\frac{3\overline{R}_0}{2\left(\overline{R}_0+3\mu\right)}g_Z^{pt}\tilde{\sigma}\right] & \text{en charge}\end{cases} \tag{139}$$

On introduit le paramètre d , qui vaut 1 si on plastifie et si on est en charge à l'instant t et 0 dans le cas contraire :

$$\dot{\tilde{\sigma}}=2\mu\left[\dot{\tilde{\varepsilon}}-\frac{9\mu}{2}\frac{\left\langle\tilde{\sigma}:\dot{\tilde{\varepsilon}}\right\rangle}{\left(\overline{R}_0+3\mu\right)\sigma_{eq}^2}\tilde{\sigma}-\frac{3}{2}g_Z^{pt}\left(Z,\dot{Z}\right)\left(1-d\frac{3\mu}{3\mu+\overline{R}_0}\right)\tilde{\sigma}\right] \tag{140}$$

On remarque que $\dot{\tilde{\sigma}}$ est une fonction affine de $\dot{\tilde{\varepsilon}}$ mais aussi qu'il existe une partie qui ne dépend pas de $\dot{\tilde{\varepsilon}}$ mais de l'incrément des phases métallurgiques $\dot{Z}$.

7.3.3 Second membre en prédiction – Contribution de la métallurgie

Du fait de la dépendance de (140) à l'incrément des phases métallurgiques, il y a une contribution $\Delta \boldsymbol{L}^{pt}$ au second membre [2] de la variation temporelle du tenseur des contraintes. Sur des cas tests simples pour lesquels il existe une solution analytique, on a constaté que le fait de négliger le second membre $\Delta \boldsymbol{L}^{pt}$ pouvait conduire, pour converger, à un nombre important d'itérations. C'est pourquoi ce terme est pris en

2 Ce qui inverse le signe devant cette contribution !

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

compte pour la phase de prédiction. La contribution vient de la plasticité de transformation, qui est une quantité purement déviatorique. Au final, on obtient :

$$\Delta \boldsymbol{L}^{pt} = \int_{\Omega} 3\mu \left[g_Z^{pt}(Z, \dot{Z}) \left(1 - d \frac{3\mu}{3\mu + \overline{R}_0} \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right] \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \tag{141}$$

Avec $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation virtuelle.

7.3.4 Matrice tangente en prédiction (option RIGI_MECA_TANG)

On rappelle que l'opérateur tangent K_{i-1} (option de calcul RIGI_MECA_TANG appelée à la première itération d'un nouvel incrément de charge) est évalué à partir des résultats connus à l'instant précédent t_{i-1} :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{K}_{i-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{142}$$

En charge, on suppose qu'on plastifie et donc on a:

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right\rangle = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{143}$$

La partie déviatorique de la matrice de prédiction vaut donc :

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_{i-1} = 2\mu \left[\boldsymbol{I} - \frac{9\mu}{2\left(\overline{R}_0 + 3\mu\right)} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \right] \tag{144}$$

L'expression (100) donne la valeur de $\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$. La partie sphérique vaut :

$$\frac{1}{3} tr\left(\boldsymbol{K}_{i-1}\right) = K \boldsymbol{I} \tag{145}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{K}_{i-1} = 2\mu \left[\boldsymbol{I} - \frac{9\mu}{2\left(\overline{R}_0 + 3\mu\right)} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \right] + K \boldsymbol{I} \tag{146}$$

7.4 Quantités en correction

7.4.1 Matrice tangente en correction (option FULL_MECA)

L'opérateur tangent K^n (option de calcul FULL_MECA appelée à chaque itération de Newton) est tel que :

$$\boldsymbol{K}^n = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{147}$$

Cette matrice a deux contributions, déviatorique et sphérique :

$$\boldsymbol{K}^n = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{3} \frac{\partial tr(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{I} \tag{148}$$

La partie sphérique est triviale :

$$\frac{1}{3} \frac{\partial tr(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{I} = K \boldsymbol{I} \tag{149}$$

Avec K le module de compressibilité. On doit maintenant exprimer la partie déviatorique de la matrice tangente. On a :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{150}$$

On repart de l'expression des contraintes déviatoriques :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} \right) \tag{151}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Et on dérive :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\left[2\mu\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt}\right)\right] \tag{152}$$

On trouve :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\boldsymbol{I} \tag{153}$$

Pour la plasticité de transformation :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\frac{3}{2}g_Z^{pt}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{154}$$

Pour la visco-plasticité :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\left(\Delta p\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\right)=\frac{3}{2}\left[\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\otimes\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}+\Delta p\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\right)\right] \tag{155}$$

On a besoin d'évaluer $\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\right)$ or l 'expression (100) a établi la valeur de $\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$:

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}=\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}{\sigma_{eq}^{e}} \tag{156}$$

En appliquant les règles de dérivation habituelles :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\right)=\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}{\sigma_{eq}^{e}}\right)=\frac{1}{\left(\sigma_{eq}^{e}\right)^{2}}\left(\sigma_{eq}^{e}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}-\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\frac{\partial \sigma_{eq}^{e}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \tag{157}$$

On a :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}=2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}+\frac{2\mu}{2\mu^{-}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-}\rightarrow\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=2\mu\boldsymbol{I} \tag{158}$$

Par la loi de Hooke :

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^{e}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \tag{159}$$

Finalement :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\right)=\frac{1}{\sigma_{eq}^{e}}\left(2\mu\boldsymbol{I}-3\mu\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\otimes\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\right) \tag{160}$$

Il reste à trouver l'expression de $\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. Pour cela, on reprend la condition de consistance $\overline{f}^{*}=0$:

$$\overline{f}^{*}=\frac{\sigma_{eq}^{e}-3\mu\Delta p}{1+3\mu g_Z^{pt}}-\overline{R}\left(p^{-}\right)-\overline{R}(\Delta p)-\overline{\sigma}_{c}-\overline{\eta}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{\overline{n}}}=0 \tag{161}$$

Et on dérive par rapport à $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\frac{\partial \overline{f}^{*}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\left[\frac{\sigma_{eq}^{e}-3\mu\Delta p}{1+3\mu g_Z^{pt}}-\overline{R}(\Delta p)-\overline{\eta}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{\overline{n}}}\right] \tag{162}$$

Grâce à (159), on a déjà $\frac{\partial \sigma_{eq}^{e}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. Il reste à calculer les autres termes. La dérivée du terme d'écrouissage métallurgique vaut :

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\overline{R}_0\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{163}$$

Et celle de la contrainte visqueuse :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\varepsilon}}\left[\overline{\eta}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{\overline{n}}}\right]=\frac{\overline{\eta}}{\overline{n}\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1-\overline{n}}{\overline{n}}}\left(\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\varepsilon}}\right) \tag{164}$$

Finalement, (162) a pour expression :

$$\frac{\partial \overline{f}^{*}}{\partial \tilde{\varepsilon}}=\frac{3\mu}{1+3\mu g_Z^{pt}}\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}-\frac{3\mu}{1+3\mu g_Z^{pt}}\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\varepsilon}}-\overline{R}_0\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\varepsilon}}-\frac{\overline{\eta}}{\overline{n}\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1-\overline{n}}{\overline{n}}}\left(\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\varepsilon}}\right)=0 \tag{165}$$

En ré-arrangeant, on trouve l'expression finale de $\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\varepsilon}}$:

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \tilde{\varepsilon}}=\frac{3\mu}{3\mu+\left[\overline{R}_0+\frac{\overline{\eta}}{\overline{n}\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1-\overline{n}}{\overline{n}}}\right]\left[1+3\mu g_Z^{pt}\right]}\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} \tag{166}$$

Donc, pour le terme visco-plastique :

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}^{vp}}{\partial \tilde{\varepsilon}}=\frac{3}{2}\left[\frac{3\mu}{3\mu+\left[\overline{R}_0+\frac{\overline{\eta}}{\overline{n}\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1-\overline{n}}{\overline{n}}}\right]\left[1+3\mu g_Z^{pt}\right]}\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}\otimes\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}+\Delta p\frac{1}{\sigma_{eq}^{e}}\left(2\mu \boldsymbol{I}-3\mu\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}\otimes\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}\right)\right] \tag{167}$$

Si on repart de l'expression formelle de la matrice tangente déviatorique :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}}=\frac{\partial}{\partial \tilde{\varepsilon}}\left[2\mu\left(\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}^{vp}-\tilde{\varepsilon}^{pt}\right)\right] \tag{168}$$

On y injecte l'expression du terme correspondant à la plasticité de transformation et à l'élasticité :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}}=2\mu \boldsymbol{I}-2\mu\frac{\partial \tilde{\varepsilon}^{vp}}{\partial \tilde{\varepsilon}}-2\mu\frac{3}{2}g_Z^{pt}\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tag{169}$$

Et donc :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}}=\frac{1}{1+3\mu g_Z^{pt}}\left[2\mu \boldsymbol{I}-2\mu\frac{\partial \tilde{\varepsilon}^{vp}}{\partial \tilde{\varepsilon}}\right] \tag{170}$$

La matrice tangente déviatorique se décompose en deux termes :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}}=\frac{1}{1+3\mu g_Z^{pt}}\left[\alpha \boldsymbol{I}+\beta\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}\otimes\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}\right] \tag{171}$$

Avec le terme α :

$$\alpha=2\mu\left(1-\frac{3\mu\Delta p}{\sigma_{eq}^{e}}\right) \tag{172}$$

Et le terme β :

$$\beta=-9\mu^{2}\left[\frac{1}{3\mu+\left[\overline{R}_0+\frac{\overline{\eta}}{\overline{n}\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1-\overline{n}}{\overline{n}}}\right]\left[1+3\mu g_Z^{pt}\right]}+\frac{\Delta p}{\sigma_{eq}^{e}}\right] \tag{173}$$

7.5 Synthèse des matrices

Les matrices de prédiction et de correction peuvent s'écrire sous la même forme, en faisant varier des coefficients suivants les cas. La partie sphérique est la même dans les deux matrices. La partie déviatorique s'écrit sous forme générale :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\tilde{\boldsymbol{K}}=\left[\frac{2\mu}{a}\left(1-c_3\frac{3\mu\Delta p}{\sigma^e_{eq}}\right)\boldsymbol{I}-\frac{c_p}{a}\tilde{\sigma}\otimes\tilde{\sigma}\right] \quad (174)$$

Avec le tableau suivant pour les coefficients :

	RIGI_MECA_TANG
a	1
c_3	0
c_p	$c_1\frac{(3\mu)^2}{(\sigma^e_{eq})^2}\left[\frac{1}{3\mu+\overline{R}_0}\right]$
c_1	vaut 1 si plastification, 0 sinon
c_2	vaut 1 si on charge, 0 sinon

	FULL_MECA
a	$1+3\mu g_Z^{pt}$
c_3	1
c_p	$c_2\frac{(3\mu)^2}{(\sigma^e_{eq})^2}\left[\frac{1}{3\mu+\left[\overline{R}_0+\frac{\overline{\eta}}{\overline{n}\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1-\overline{n}}{\overline{n}}}\right]\left[1+3\mu g_Z^{pt}\right]}-\frac{\Delta p}{\sigma^e_{eq}}\right]$
c_1	vaut 1 si plastification, 0 sinon
c_2	vaut 1 si on charge, 0 sinon

8 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3.0	F.Waeckel	Version initiale
6.3	*Razakanaivo, A. , A.-M. Donore, F.Waeckel* EDF-R&D/AMA	Cinquième version du document
12.2	*M.Abbas* EDF-R&D/AMA	Ré-écriture de la documentation Correction de quelques coquilles dans les équations

9 Bibliographie

[1] **Waeckel, F.** (**1994**). *Une loi de comportement thermo-métallurgique des aciers pour le calcul mécanique des structures*, thèse de doctorat, ENSAM.

[2] **Andrieux, S. and Waeckel, F.** (**1994**). *Modélisation thermique, métallurgique et mécanique d'une opération de soudage - Étude Bibliographique*, EDF R&D, Rapport interne .

[3] **Andrieux, S. and Waeckel, F.** (**1994**). *Une loi de comportement thermo-métallurgique au refroidissement pour les aciers faiblement alliés*, EDF R&D, Rapport interne .

[4] **Razakanaivo, A.** (**2000**). *Introduction du modèle EDGAR dans le Code_Aster*, EDF R&D, Rapport interne .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

[5] **Mialon, P.** (**1986**). *Éléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élasto-plasticité*, EDF R&D, Rapport interne .

[6] **Razakanaivo, A.** (**1997**). *Introduction dans le Code_Aster d'un modèle de comportement élasto-viscoplastique prenant en compte la métallurgie*, EDF R&D, Rapport interne .

[7] **Desalos, Y.** (**1981**). *Rapport n° 9534901 MET44*, IRSID, Rapport interne .

[8] **Leblond, J.-B.; Mottet, G. and Devaux, J.-C.** (**1986**). *A theorical (and numerical) approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations. Derivation of general equations*, Journal of the Mechanics and Physics Solids 34, pp. 395-406.

[9] **Leblond, J.-B.; Mottet, G. and Devaux, J.-C.** (**1986**). *A theorical (and numerical) approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations – Study of classical plasticity for ideal plastic phases*, Journal of the Mechanics and Physics Solids 34, pp. 411-432.

[10] **Leblond, J.-B. and Devaux, J.-C.** (**1989**). *Mathematical modelling of transformation plasticity in steels. Case of ideal plastic phases*, International Journal of Plasticity 5, pp. 551-572.

[11] **Leblond, J.-B.** (**1989**). *Mathematical modelling of transformation plasticity in steels. Coupling with strain hardening phenomena*, International Journal of Plasticity 5, pp. 573-591.

[12] **Sjöström, S.** (**1987**). *The problem of calculating quench stresses*, In: *Swedish symposium on residual stresses*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)