Poutre élasto-acoustique

Résumé :

On présente un élément de couplage élasto-acoustique droit qui s'applique sur un élément de structure de type poutre de Timoshenko. Cet élément permet de réaliser, en vibro-acoustique, l'analyse modale d'une tuyauterie droite contenant du fluide sous pression (eau, vapeur…). On peut aussi effectuer des calculs de réponse à des sources fluides (débit masse, débit volume, pression) par recombinaison modale. Les conditions aux limites applicables aux nœuds de ces éléments sont de type Dirichlet : déplacement, pression ou potentiel peuvent y être imposés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Notations....3
2 Introduction....3
3 Le modèle de poutre élasto-acoustique....4
3.1 Hypothèses....4
3.2 Fonctionnelle du problème couplé....4
3.2.1 Contribution de la tuyauterie....4
3.2.2 Contribution du fluide....5
3.2.2.1 Terme correspondant à la contribution de....6
3.2.2.2 Terme correspondant à la contribution de....6
3.2.3 Terme de couplage....6
3.2.3.1 Section courante....6
3.2.3.2 Fond de tuyau....6
3.2.4 Fonctionnelle du système couplé dans le cas des tuyauteries....7
3.3 Discrétisation par éléments finis....7
3.4 Implantation dans Code_Aster....8
4 Bibliographie....10
5 Description des versions du document....10

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

P	:	pression totale instantanée en un point du fluide
p	:	pression moyennée sur une section droite
$\tilde{p}$	:	pression fluctuante
$\mathbf{u}$	:	déplacement de la structure
Φ	:	potentiel des déplacements du fluide
ρ_0	:	masse volumique du fluide acoustique
ρ_s	:	masse volumique de la structure
ω , f	:	pulsation, fréquence
c	:	célérité du son dans le fluide
λ , k	:	longueur d'onde, nombre d'onde
s	:	tenseur des contraintes de la structure
$\boldsymbol{\varepsilon}$	:	tenseur des déformations de la structure
dV	:	élément de volume
dA	:	élément de surface
Σ	:	surface d'interaction entre la tuyauterie et le fluide
S_f	:	section droite du fluide
S_s	:	section droite de la tuyauterie

2 Introduction

Afin de pouvoir réaliser des calculs de réponse dynamique de structures remplies de fluide à des fluides, des éléments de couplage fluide-structure 3D ont été développés dans *Code_Aster* (*cf* [bib2]).

Ces éléments volumiques ont l'avantage de permettre une description fine de la structure en des endroits particuliers comme, par exemple, le raccordement entre une tuyauterie principale et un piquage d'instrumentation. En revanche, leur utilisation systématique pour l'analyse de réseaux ramifiés et complexes conduirait à des coûts de modélisation (réalisation de maillage) et de calcul prohibitifs.

Pour cette raison, et afin de faciliter des études simplifiées de comportement dynamique de tuyauteries, on a développé un élément de poutre droit élasto-acoustique permettant de réaliser, à moindre coût de main d'oeuvre et de calcul, des calculs de comportement d'ensemble des parties droites des tuyauteries en basse fréquence.

On trouve ci-après une présentation de l'éléments fini de tuyauteries de type poutre élasto-acoustique. Le comportement vibratoire des réseaux de tuyauteries est conditionné par l'écoulement du fluide qui les parcourt.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Le modèle de poutre élasto-acoustique

3.1 Hypothèses

On étudie à basse fréquence les vibrations d'une tuyauterie élastique, linéaire homogène et isotrope couplée à un fluide compressible.

Les effets dus à la viscosité et à l'écoulement du fluide sont négligés.

Les tuyauteries sont des corps allongés. En effet, leurs dimensions transversales sont très inférieures à leur longueur : $D \ll L$, et les épaisseurs sont telles qu'on puisse négliger les modes de gonflement et d'ovalisation du tuyau. On peut utiliser un modèle de poutre.

A basse fréquence les longueurs d'ondes acoustiques associées aux problèmes étudiés sont grandes par rapport aux dimensions transversales et petites par rapport à la dimension longitudinale du circuit : $\omega . L/c > 1$ et $\omega . D/c \ll 1$. La compressibilité agit en effet principalement sur les déplacements longitudinaux. Transversalement, on considère que le fluide se déplace comme un solide indéformable, c'est-à-dire qu'il agit comme une masse ajoutée. La pression dans une section droite du tuyau étant alors constante, on dit que l'onde acoustique est plane.

3.2 Fonctionnelle du problème couplé

On peut écrire la formulation variationnelle du problème des tuyauteries remplies de fluide à partir des équations d'équilibre et de comportement du fluide et du tuyau ainsi que des conditions aux limites. A partir de la fonctionnelle générale du problème couplé tri-dimensionnel ([bib1], [bib2]), on peut écrire la fonctionnelle appliquée au cas particulier des poutres.

La formulation variationnelle du problème 3D revient à minimiser la fonctionnelle :

$$F(u,p,\Phi)=\frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega_s}\left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})-\rho_s\omega^2\mathbf{u}^2\right]dV + \int_{\Omega_f}\left[\frac{P^2}{\rho_0 c^2}\left(\frac{2\mathrm{P}\,\Phi}{\rho_0 c^2}-(\mathrm{grad}\,\Phi)^2\right)\right]dV\right\}-\rho_0 w^2\int_S \Phi\,\mathbf{u}.\mathbf{n}\,dA$$

avec :

Ωs , le domaine de la structure

Ωf , le domaine du fluide

Σ , la surface d'interaction fluide - structure.

3.2.1 Contribution de la tuyauterie

Le modèle de poutre utilisé est celui de Timoshenko avec déformations d'effort tranchant et inertie de rotation de la section transversale. Il correspond à la modélisation POU_D_T dont il reprend les calculs élémentaires. On ne prend pas en compte les effets d'ovalisation [bib3].

Les termes associés à la tuyauterie dans la formulation variationnelle s'écrivent alors :

$$\int_L\left[\boldsymbol{\sigma}(u):\boldsymbol{\varepsilon}(u)-\rho_s\omega^2u^2\right]S_s\,ds$$

avec : L , la fibre moyenne de la tuyauterie et S_s , la section de la tuyauterie à l'abscisse s (cf. [Figure 3.2.1-a]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

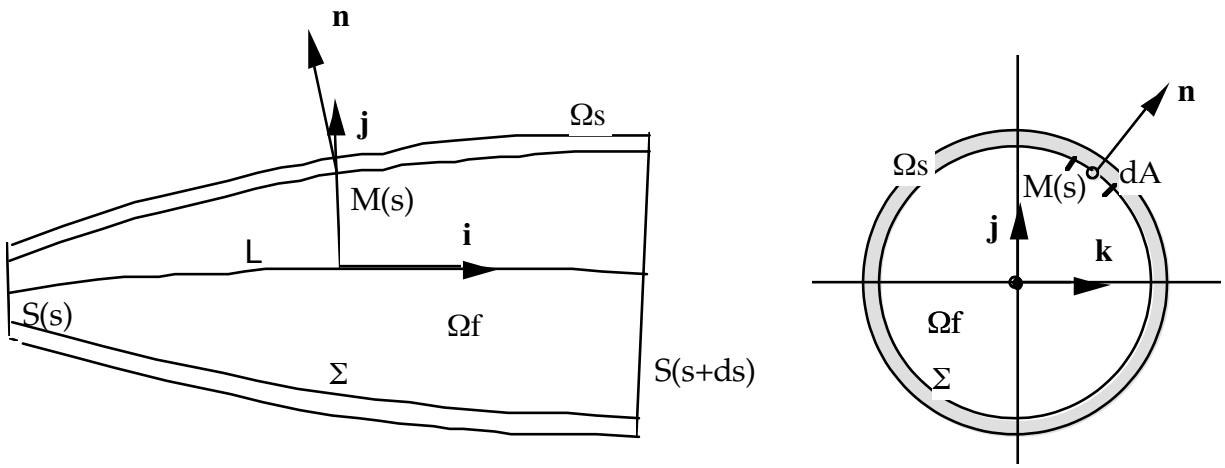


Figure 3.2.1-a : géométrie de la tuyauterie

3.2.2 Contribution du fluide

Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement à la partie fluide de la fonctionnelle, c'est à dire, terme de couplage mis à part, au terme qui s'écrit en 3D :

$$\int_{\Omega_f}\left[\frac{P^2}{\rho_0 c^2}-\rho_0\omega^2\left(\frac{2\mathrm{P}\Phi}{\rho_0 c^2}-\left(\mathrm{grad}\,\Phi\right)^2\right)\right]dV \qquad \text{éq 3.2.2-1}$$

On suppose que la pression se décompose en deux termes :

$$P\left(M\left(s\right),t\right)=p\left(s,t\right)+\tilde{p}\left(M\left(s\right),t\right)$$

où p est la valeur moyennée sur une section droite de la pression :

$$p\left(s,t\right)=\frac{1}{S_f\left(s\right)}\int_{S_f(s)}P\left(M\left(s\right),t\right)dM$$

et $\tilde{p}$ est un terme de pression fluctuante qui correspond à la contribution des modes transverses.

D'après les hypothèses du paragraphe [§1], p vérifie l'équation 1-D de Helmholtz et $\tilde{p}$ l'équation de Laplace (incompressible). L'intégrale [éq 3.2.2-1] se décompose donc en deux termes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2.2.1 Terme correspondant à la contribution de $\tilde{p}$

Dans les mouvements perpendiculaires à l'axe du tuyau, on considère que le fluide intervient uniquement par sa masse ajoutée [bib4], le terme lié à $\tilde{p}$ est donc un terme d'inertie :

$$\int_L \rho_0 \omega^2 \left(\mathbf{u_t}\right)^2 S_f \, ds$$

$\mathbf{u_t}$ étant les composantes transverses du vecteur déplacement de la structure et S_f la section du fluide à l'abscisse s .

3.2.2.2 Terme correspondant à la contribution de p

$$\int_L \left[\frac{P^2}{\rho_0 c^2} - \rho 0 \, \omega^2 \left(\frac{2\mathrm{P}\Phi}{\rho_0 c^2} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 \right) \right] S_f \, ds$$

3.2.3 Terme de couplage

3.2.3.1 Section courante

D'après les références [bib4] et [bib5], on montre que le terme de couplage C :

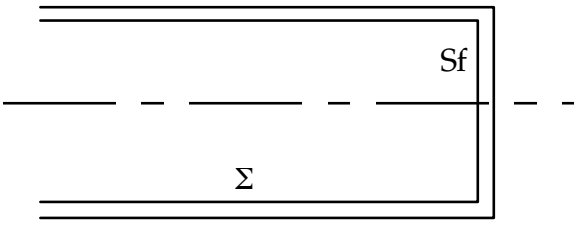
$$C = -\int_S \rho_0 \Phi \, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{n} \, dA = \int_L -\frac{\rho_0 \Phi}{R} \mathbf{u} \,.\, \mathbf{j} \, S_f \, ds + \int_L \rho_0 \Phi \, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{i} \frac{dS_f}{ds} ds$$

Les équations d'équilibre de la structure et l'équation de propagation des ondes planes (Helmholtz) dans le fluide sont donc couplées au niveau des parties coudées et des parties droites où il y a un changement de section de la tuyauterie. Dans le cas d'un tuyau à section droite constante :

$$R \to \infty \text{ et } \frac{dS_f}{ds} = 0 \text{ donc } C = 0$$

Il n'y a donc pas de couplage entre les mouvements de poutre de la structure et les déplacements longitudinaux du fluide dans les parties droites du circuit. Dans ce cas, le fluide est caractérisé uniquement par sa masse ajoutée liée aux déplacements transverses.

3.2.3.2 Fond de tuyau



Dans le cas d'un fond de tuyau, on note $\Sigma t = \Sigma + S_f$, la surface totale d'interaction entre le fluide et la tuyauterie.
Dans le cas d'une tuyauterie droite à section constante fermée, le terme de couplage C vaut alors :

$$C = -\int_{S+S_f} \rho_0 \Phi \, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{n} \, dA = -\int_{S_f} \rho_0 \Phi \, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{n} \, dA$$

C'est l'effet de fond.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ce terme est rajouté au terme de couplage d'une section courante. Ainsi, un nœud libre qui réalise une condition de débit nul à travers la section [bib6] réalise une condition de fond acoustique. En effet, une onde plane incidente est réfléchie totalement sur le fond : la pression acoustique dans le conduit obéit à l'équation d'Helmoltz avec gradient de pression normal nul (déplacements fluide et solide étant nuls).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}+k^2 p=0 \\ \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_{S_f}=0 \end{cases}$$

On recherche la solution sous la forme : $p=A\cos(\omega t-kx)+B\cos(\omega t+kx)$
c'est-à-dire sous la forme d'une combinaison linéaire d'une onde acoustique plane incidente et d'une onde réfléchie.
La condition de gradient nul sur le fond, vérifiée pour tous les instants, impose :

$$A=B$$

L'onde réfléchie est donc "égale" à l'onde incidente (coefficient de réflexion égal à l'unité).

3.2.4 Fonctionnelle du système couplé dans le cas des tuyauteries

Dans le cas particulier que nous traitons d'une tuyauterie non coudée, à section constante, la fonctionnelle du problème couplé s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(u,p,\Phi)= \quad & \frac{1}{2}\left\{\int_L \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}):\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\,S_s\,ds-\omega^2\int_L\left[\rho_s S_s u^2+\rho_0 S_f\left(\mathbf{u_t}\right)^2\right]ds\right. \\ & \left.+\int_L\left[\frac{P^2}{\rho_0 c^2}-\rho_0\omega^2\left(\frac{2\mathrm{P}\Phi}{\rho_0 c^2}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^2\right)\right]S_f\,ds\right\}-\omega^2\int_{S_f}\rho_0\Phi\,\mathbf{u}.\mathbf{n}\,dA \end{aligned}$$

3.3 Discrétisation par éléments finis

La solution (u,p,Φ) cherchée minimise la fonctionnelle F. L'approximation par éléments finis du problème complet conduit alors au système symétrique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\mathbf{K_f}}{\rho_0.c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \\ \Phi \end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} \mathbf{M}+\mathbf{M_f} & 0 & \mathbf{M_\Sigma} \\ 0 & 0 & \dfrac{\mathbf{M_{fl}}}{c^2} \\ \mathbf{M_\Sigma^T} & \dfrac{\mathbf{M_{fl}^T}}{c^2} & \rho_0.\mathbf{H} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \\ F \end{bmatrix}=0$$

$\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ étant respectivement les matrices de rigidité et de masse de la structure,

$\mathbf{K_f}$, $\mathbf{M_{fl}}$, $\mathbf{H}$ étant les matrices fluides, respectivement obtenues à partir des formes quadratiques :

$$\int_L p^2 S_f\,ds,\ \int_L p\Phi\,S_f\,ds,\ \int_L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 S_f\,ds$$

$\mathbf{M_f}$ étant la matrice fluide obtenue à partir de la forme quadratique : $\int_L p_0 S_f\left(\mathbf{u_t}\right)^2 ds$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\mathbf{M_\Sigma}$ étant la matrice de couplage obtenue à partir de la forme bilinéaire : $\int_{S_f} p_0 \Phi \mathbf{u}\mathbf{n}\, dA$.

En discrétisant linéairement p et Φ , on a donc :

$p = p_1 \frac{L-x}{L} + p_2 \frac{x}{L}$ et $\Phi = \Phi_1 \frac{L-x}{L} + \Phi_2 \frac{x}{L}$, L étant la longueur de l'élément considéré.

Dans ce cas, la matrice élémentaire de raideur du fluide s'écrit :

$$\mathbf{K_f} = \frac{S_f L}{3} \begin{Bmatrix} p_1 & p_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice de couplage élémentaire s'écrit :

$$\mathbf{M_\Sigma} = r_0 S_f \begin{Bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Les différentes matrices de masse fluide élémentaires s'écrivent :

$$\mathbf{M_\Sigma} = r_0 S_f \begin{Bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M_\Sigma} = -\frac{S_f}{L} \begin{Bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

3.4 Implantation dans *Code_Aster*

Sur les principes que nous venons de décrire, un élément de poutre vibro-acoustique, de Timoshenko pour la partie tuyauterie, droit à section constante ou variable (dans ce cas, seule les sections circulaires sont autorisées), a été implanté dans *Code_Aster*. Il appartient à la modélisation `'FLUI_STRU'` du phénomène `'MECANIQUE'`.

Cet élément possède 8 degrés de liberté par nœud : les déplacements et rotations de la tuyauterie, la pression et le potentiel de déplacement du fluide (cf. [Figure 3.4-a]). La formulation est écrite pour des déplacements **locaux** dans le repère local à l'élément constitué de la fibre neutre (axe X) et des axes principaux d'inertie (axe Y, axe Z) de la section. Les deux scalaires p et Φ (pression et potentiel des déplacements fluides) sont invariants par changement de repère.

Sur chaque nœud de cet élément, on peut imposer des conditions aux limites de type Dirichlet en pression, potentiel des déplacements fluides et déplacements (translation ou rotation).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

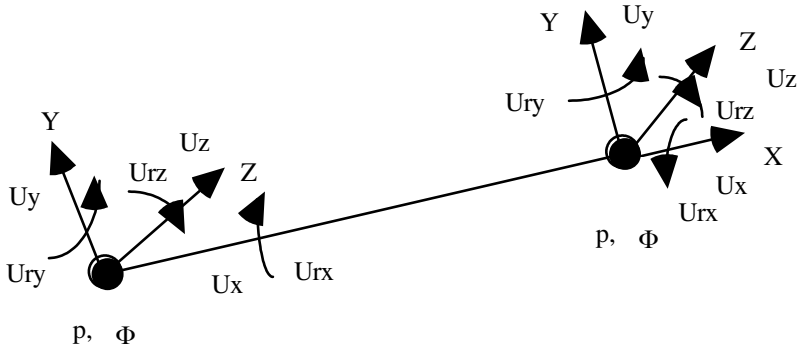


Figure 3.4-a : élément de poutre remplie de fluide

Cet élément ne permet à ce jour que de calculer les modes propres d'une tuyauterie droite remplie de fluide et de faire du calcul de réponse harmonique. Les effets de courbure ou d'élargissement brusque de section ne sont pas pris en compte pour le moment, mais ces effets fluide-structure, lorsqu'on a affaire à des fluides peu denses comme la vapeur d'une tuyauterie d'admission, ne semblent pas avoir une importance déterminante sur le calcul des premiers modes : la représentation mécanique correcte du coude (coefficient de flexibilité) semble suffisante pour calculer ces fréquences [bib7].

En analyse modale, on peut citer le cas d'une tuyauterie droite remplie de fluide avec extrémité libre :

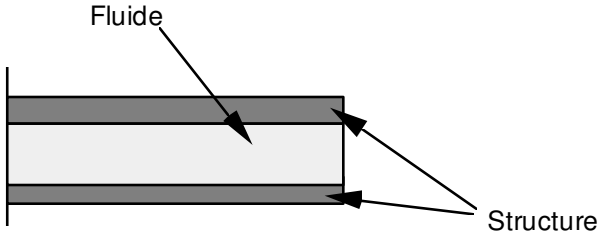


Figure 3.4-b : poutre remplie de fluide encastrée - libre

la fréquence propre du mode de traction - compression de ce système couplé fluide / structure est donnée par la relation :

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\omega L}{c}\right)=\sqrt{\frac{S_s}{S_f}\frac{E}{\rho_0 c^2}}$$

On désigne par :

E : module d'Young du matériau solide

S_S : section du solide

S_f : section du fluide

On suppose ici que la vitesse de célérité du son dans le fluide est égale à la célérité du son dans le solide $c_S=\sqrt{\frac{E}{\rho_S}}$ [bib7].

Le calcul de réponse transitoire pour ce type d'élément fini $(\mathbf{u}, p, \varphi)$ n'est pas encore disponible dans *Code_Aster*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Bibliographie

1 H.J.P. MORAND ; R.OHAYON Interaction fluides-structures Série Recherches en Mathématiques Appliquées n° 23 Edition Masson, juillet 1992

2 F. WAECKEL Analyse modale en vibro-acoustique dans ASTER. Note interne DER HP-61/91.160

3 R. OHAYON Variational analysis of a slender fluid-structure system : the elasto-acoustic beam. A new symmetric formulation. International journal for numerical methods in engineering, vol22, 637-647 (1986)

4 R.J. GIBERT Vibrations des structures. Interactions avec les fluides. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'E.D.F. Edition Eyrolles, septembre 1988

5 S. FRIKHA Analyse expérimentale des sollicitations dynamiques appliquées à une portion de structure modélisable par la théorie des poutres. Thèse de doctorat en Génie Mécanique, ENSAM, février 1992

6 LI-LIN Identification des sources acoustiques induites par les singularités d'un circuit hydraulique. Thèse de docteur ingénieur, Université Paris 6, avril 1988

7 F. WAECKEL, C. DUVAL Note de principe et d'utilisation des éléments de tuyauteries implémentés dans le *Code_Aster* Note Interne DER HP-61/92.138

5 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	*G. ROUSSEAU, Fe WAECKEL (EDF/EP/AMV)*	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)