Élasticité anisotrope

Résumé

Ce document traite de l'élasticité anisotrope , utilisée pour les modélisations de milieux continus 3D et 2D (C_PLAN, D_PLAN, AXIS), ou les couches des coques composites.

Le milieu élastique peut être anisotrope suivant les 3 directions (on parle l'élasticité orthotrope), ou bien dans isotrope dans deux directions (on parle d'élasticité isotrope transverse).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Topologie des matrices de Hooke....3
2.1 L'orthotropie....3
2.2 Isotropie transverse....4
2.3 Isotropie....4
3 Matrice de Hooke et de souplesse....4
3.1 Notations....4
3.2 Cas 3 D....6
3.2.1 0rthotropie....6
3.2.1.1 Matrice de souplesse....6
3.2.1.2 Matrice de Hooke....6
3.2.2 Isotropie transverse....7
3.2.2.1 Matrice de souplesse....7
3.2.2.2 Matrice de Hooke....8
3.2.3 Élasticité cubique....8
3.2.4 Isotropie....9
3.2.4.1 Matrice de souplesse en fonction de et....9
3.2.4.2 Matrice de Hooke en fonction de et....10
3.2.4.3 Matrice de souplesse en fonction des coefficients de Lamé et....11
3.2.4.4 Matrice de Hooke en fonction des coefficients de Lamé et....11
3.3 Cas 2 D orthotrope en déformations planes et axisymétrique....11
3.3.1 Matrice de souplesse....11
3.3.2 Matrice de Hooke....12
3.4 Cas 2 D orthotrope en contraintes planes....12
3.4.1 Matrice de souplesse....12
3.4.2 Matrice de Hooke....12
4 Utilisation dans Code_Aster....13
5 Bibliographie....14
6 Description des versions du document....14

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

L'objectif de ce document est de donner l'expression des matrices de souplesse et de Hooke pour des matériaux élastiques orthotrope, isotrope transverse et isotrope dans les cas 3D, 2D-contraintes, 2D-déformations planes et axisymétrie.

Nous parlons de « matrices » de Hooke car, par souci de simplification, nous n'avons pas adopté la notation d'un tenseur d'ordre 4.

En toute rigueur, pour les matériaux élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations.

On écrit : $\sigma_{ij}=H_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

La nature symétrique de $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ et l'adoption pour ces tenseurs d'ordre 2 d'une forme vectorielle permet d'écrire :

$$\{\sigma\}=[H]\{\varepsilon\}$$

où $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ sont la représentation vectorielle des tenseurs d'ordre 2 $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ et où $[H]$ est une matrice 6×6 .

2 Topologie des matrices de Hooke

2.1 L'orthotropie

On peut montrer la symétrie de la matrice de Hooke $[H]$.

Nous avons donc vingt et une composantes indépendantes dans le cas 3D.

$$[H]=\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ & & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ SYM & & & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ & & & & H_{55} & H_{56} \\ & & & & & H_{66} \end{vmatrix}$$

Un matériau orthotrope possède deux plans orthogonaux de symétrie élastique.

Ceci veut dire que si l'on appelle $[H']$ la matrice $[H]$ après symétrie(s)
$[H']=[H]$.

Les relations obtenues entre les coefficients permettent d'écrire que $[H]$ est définie par neuf composantes indépendantes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans les axes d'orthotropie :

$$[H]=\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & H_{33} & 0 & 0 & 0 \\ SYM & & & H_{44} & 0 & 0 \\ & & & & H_{55} & 0 \\ & & & & & H_{66} \end{vmatrix}$$

Il faut donc fournir 9 coefficients.

2.2 Isotropie transverse

L'isotropie transverse est une restriction de l'orthotropie dans où l'on a l'isotropie dans l'un des deux plans orthogonaux de symétrie élastique.

La matrice $[H]$ aura la même forme que pour l'orthotropie mais avec des relations supplémentaires entre les composantes.
Cinq composantes suffisent à déterminer $[H]$.

2.3 Isotropie

Le matériau est isotrope si $[H]$ reste invariant dans tout changement de repère.

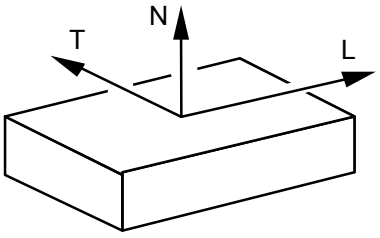
Deux coefficients suffisent à déterminer $[H]$.

3 Matrice de Hooke et de souplesse

3.1 Notations

Au lieu d'utiliser les indices 1, 2 et 3 pour repérer les axes, on va utiliser les indices correspondants L, T et N :

1. L pour longitudinal
2. T pour transversal
3. N pour normal



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les coefficients qui interviennent sont les suivants :

Mot clé	Notation	signification
E_L	E_L	Module d'Young longitudinal
E_T	E_T	Module d'Young transversal
E_N	E_N	Module d'Young normal
G_LT	G_{LT}	Module de cisaillement dans le plan (L,T)
G_TN	G_{TN}	Module de cisaillement dans le plan (T,N)
G_LN	G_{LN}	Module de cisaillement dans le plan (L,N)
NU_LT	ν_{LT}	Coefficient de Poisson dans le plan (L,T)
NU_TN	ν_{TN}	Coefficient de Poisson dans le plan (T,N)
NU_LN	ν_{LN}	Coefficient de Poisson dans le plan (L,N)

Remarque très importante :

ν_{LT} *est différent de* ν_{TL} *:*

Si l'on applique une traction suivant L

$\epsilon_{LL}=\frac{\overline{\sigma_{LL}}}{E_L}$ *(loi de Hooke suivant une direction).*

Cette traction est accompagnée, proportionnellement, d'une contraction suivant T , $-\nu_{LT}.\frac{\sigma_{LL}}{E_L}$

et d'une contraction suivant N , $-\nu_{LN}.\frac{\sigma_{LL}}{E_L}$.

Le premier indice indique l'axe où s'exerce l'effet du chargement et le second indice indique la direction du chargement.

Ensuite on exerce une traction suivant T , puis une traction suivant N ; on obtient :

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{LL}&=\frac{\sigma_{LL}}{E_L}-\nu_{TL}\frac{\sigma_{TT}}{E_T}-\nu_{NL}\frac{\sigma_{NN}}{E_N}\\ \varepsilon_{TT}&=-\nu_{LT}\frac{\sigma_{LL}}{E_L}+\frac{\sigma_{TT}}{E_T}-\nu_{NT}\frac{\sigma_{NN}}{E_N}\\ \varepsilon_{NN}&=-\nu_{LN}\frac{\sigma_{LL}}{E_L}-\nu_{TN}\frac{\sigma_{TT}}{E_T}+\frac{\sigma_{NN}}{E_N}\end{aligned}\right\}(S)$$

La matrice de souplesse $[H]^{-1}$ étant symétrique ; on en déduit :

$$\frac{\nu_{LT}}{E_L}=\frac{\nu_{TL}}{E_T}$$

$$\frac{\nu_{LN}}{E_L}=\frac{\nu_{NL}}{E_N}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\nu_{TN}}{E_T}=\frac{\nu_{NT}}{E_N}$$

3.2 Cas 3 D

3.2.1 0rthotropie

3.2.1.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ \varepsilon_{NN}\\ 2\varepsilon_{LT}\\ 2\varepsilon_{LN}\\ 2\varepsilon_{TN}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & \frac{-\nu_{NL}}{E_N} & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{NT}}{E_N} & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\nu_{LN}}{E_L} & \frac{-\nu_{TN}}{E_T} & \frac{1}{E_N} & 0 & 0 & 0\\ & & & \frac{1}{G_{LT}} & 0 & 0\\ & SYM & & & \frac{1}{G_{LN}} & 0\\ & & & & & \frac{1}{G_{TN}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LT}\\ \sigma_{LN}\\ \sigma_{TN}\end{bmatrix}$$

$\left[H\right]^{-1}$ – Orthotropie

3.2.1.2 Matrice de Hooke

$$\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{LL}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LT}\\ \sigma_{LN}\\ \sigma_{TN}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\frac{\left(1-\nu_{TN}\nu_{NT}\right)}{E_T E_N} & \frac{\left(\nu_{TL}+\nu_{NL}\nu_{TN}\right)}{E_T.E_N} & \frac{\left(\nu_{NL}+\nu_{TL}\nu_{NT}\right)}{E_T.E_N} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\left(\nu_{LT}+\nu_{LN}\nu_{NT}\right)}{E_L E_N} & \frac{\left(1-\nu_{NL}\nu_{LN}\right)}{E_L.E_N} & \frac{\left(\nu_{NT}+\nu_{NL}.\nu_{LT}\right)}{E_L.E_N} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\left(\nu_{LN}+\nu_{LT}.\nu_{TN}\right)}{E_L.E_T} & \frac{\left(\nu_{TN}+\nu_{TL}.\nu_{LN}\right)}{E_L.E_T} & \frac{\left(1-\nu_{LT}.\nu_{TL}\right)}{E_L.E_T} & 0 & 0 & 0\\ & & & GLT*\Delta & 0 & 0\\ & SYM & & & GLN*\Delta & 0\\ & & & & & GTN*\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ \varepsilon_{NN}\\ 2\varepsilon_{LT}\\ 2\varepsilon_{LN}\\ 2\varepsilon_{TN}\end{bmatrix}$$

$\left[H\right]$ – Orthotropie avec:

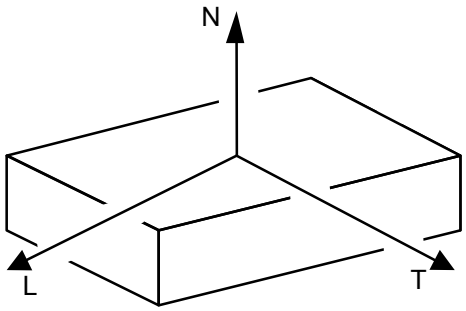
$$\frac{\nu_{TL}}{E_T}=\frac{\nu_{LT}}{E_L};\frac{\nu_{NL}}{E_N}=\frac{\nu_{LN}}{E_L};\frac{\nu_{NT}}{E_N}=\frac{\nu_{TN}}{E_T}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{E_L E_T E_N}{\left(\begin{array}{c}1-\nu_{TN}\nu_{NT}\\-\nu_{NL}\nu_{LN}\\-\nu_{LT}\nu_{TL}\\-2\nu_{TN}\nu_{NL}\nu_{LT}\end{array}\right)}$$

3.2.2 Isotropie transverse

L'isotropie est définie ici dans le plan (L,T), et la direction d'orthotropie est donc N. On peut attirer l'attention du lecteur sur le fait que cette convention diffère d'une convention usuelle qui désigne par « direction longitudinale » la direction d'orthotropie des matériaux transverses isotropes.



3.2.2.1 Matrice de souplesse

La matrice $[H]^{-1}$ peut être déduite directement de la matrice $[H]^{-1}$ - Orthotropie en utilisant les propriétés de l'isotropie transverse.

Dans le plan (L,T) :

$$E_L=E_T$$
$$\nu_{TL}=\nu_{LT}$$
$$G_{LT}=\frac{E_L}{2(1+\nu_{LT})}$$

Dans les plans (L,N) et (T,N) :

$$\nu_{NT}=\nu_{NL}$$
$$\nu_{LN}=\nu_{TN}$$
$$G_{TN}=G_{LN}$$
$$\frac{\nu_{NT}}{E_N}=\frac{\nu_{LN}}{E_L}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{NL}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}}{E_L} & \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{NT}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LN}}{E_L} & \frac{-\nu_{TN}}{E_L} & \frac{1}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu_{LT})}{E_L} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{1}{G_{LN}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{TN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[H]^{-1}$ - Isotropie transverse

3.2.2.2 Matrice de Hooke

La matrice $[H]$ possède les mêmes symétries que $[H]^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{NL}.\nu_{LN}}{E_L.E_N} & \frac{\nu_{LT}+\nu_{NL}\nu_{LN}}{E_L.E_N} & \frac{\nu_{NL}+\nu_{LT}\nu_{NL}}{E_L.E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{TL}+\nu_{NL}\nu_{LN}}{E_L.E_N} & \frac{1-\nu_{NL}.\nu_{LN}}{E_L.E_N} & \frac{\nu_{LN}+\nu_{LT}\nu_{LN}}{E_L.E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{LN}+\nu_{LT}.\nu_{LN}}{E_L^2} & \frac{\nu_{TN}+\nu_{LT}.\nu_{TN}}{E_L^2} & \frac{1-\nu_{LT}^2}{E_L^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{E_L.\Delta'}{2(1+\nu_{LT})} & & \\ & & & & G_{LN}.\Delta' & \\ & & & & & G_{LN}.\Delta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

$[H]$ – Isotropie transversale

$$\frac{1}{\Delta'} = \frac{E_L^2.E_N}{\left[1-2\nu_{NL}.\nu_{LN}-\nu_{LT}^2 \quad -2\nu_{NL}\nu_{LN}\nu_{LT}\right]}$$

3.2.3 Élasticité cubique

L'élasticité cubique correspond à une matrice d'élasticité de la forme :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{bmatrix} y_{1111} & y_{1122} & y_{1122} & & & & \\ y_{1122} & y_{1111} & y_{1122} & & & & \\ y_{1122} & y_{1122} & y_{1111} & & & & \\ & & & y_{1212} & & & \\ & & & & y_{1212} & & \\ & & & & & y_{1212} & \end{bmatrix}$$

Étant donnée la symétrie cubique, il reste à déterminer 3 coefficients:

$$E_L = E_N = E_T = E\,,\ G_{LT} = G_{LN} = G_{TN} = G\,,\ \nu_{LN} = \nu_{LT} = \nu_{LN} = \nu$$

Pour reproduire l'élasticité cubique avec ELAS_ORTH, il suffit de calculer les coefficients de l'orthotropie tels que la matrice d'élasticité obtenue soit de la forme ci-dessus :

$$y_{1111} = \frac{E(1-\nu^2)}{(1-3\nu^2-2\nu^3)}$$
$$y_{1122} = \frac{E\nu(1+\nu)}{(1-3\nu^2-2\nu^3)}$$
$$y_{1212} = G_{LT} = G_{LN} = G_{TN}$$

donc, tant que $(1-3\nu^2-2\nu^3)\neq 0$ (c'est à dire ν différent de 0.5).

$\frac{y_{1122}}{y_{1111}} = \frac{\nu}{1-\nu}$ ce qui fournit $\nu = \frac{1}{1+\frac{y_{1111}}{y_{1122}}}$ puis $E = y_{1111}\frac{(1-3\nu^2-2\nu^3)}{(1-\nu^2)}$

3.2.4 Isotropie

3.2.4.1 Matrice de souplesse en fonction de E et ν

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{1}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[H]^{-1}$ – Isotropie complète

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2.4.2 Matrice de Hooke en fonction de E et ν

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & SYM & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

$[H]$ – Isotropie complète

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2.4.3 Matrice de souplesse en fonction des coefficients de Lamé λ et μ

La loi de Hooke prend la forme suivante avec les coefficients de Lamé λ et μ .

$$\sigma_{ij}=\lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}+2\,\mu\,\varepsilon_{ij}$$

En utilisant le système d'équations (S), on obtient :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LT}\end{bmatrix}=\frac{1}{1-\nu_{LT}.\nu_{TL}}\begin{bmatrix}E_L & \nu_{TL}.E_T & 0 & 0\\ \nu_{LT}.E_L & E_T & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_{LT}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ \varepsilon_{NN}\\ 2\varepsilon_{LT}\end{bmatrix}$$

$[H]$ – Orthotropie plane en contraintes planes

3.2.4.4 Matrice de Hooke en fonction des coefficients de Lamé λ et μ

$$\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LN}\\ \sigma_{LT}\\ \sigma_{TN}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ & SYM & & \mu & 0 & 0\\ & & & & \mu & 0\\ & & & & & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ \varepsilon_{NN}\\ 2\varepsilon_{LN}\\ 2\varepsilon_{LT}\\ 2\varepsilon_{TN}\end{bmatrix}$$

$[H]$ – Isotropie complète avec les coefficients de Lamé

3.3 Cas 2 D orthotrope en déformations planes et axisymétrique

3.3.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ 0\\ 2\varepsilon_{LT}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{NL}}{E_N} & 0\\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{NL}}{E_N} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LT}\end{bmatrix}$$

$[H]^{-1}$ – Orthotropie plane en déformations planes et axisymétrie

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3.2 Matrice de Hooke

$$\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LT}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\frac{(1-v_{TN}v_{NT})}{E_T E_N} & \frac{(v_{TL}+v_{NL}v_{TN})}{E_T.E_N} & \frac{(v_{NL}+v_{TL}v_{NT})}{E_T.E_N} & 0\\ \frac{(v_{LT}+v_{LN}v_{NT})}{E_L E_N} & \frac{(1-v_{NL}v_{LN})}{E_L.E_N} & \frac{(v_{NT}+v_{NL}.v_{LT})}{E_L.E_N} & 0\\ \frac{(v_{LN}+v_{LT}.v_{TN})}{E_L.E_T} & \frac{(v_{TN}+v_{TL}.v_{LN})}{E_L.E_T} & \frac{(1-v_{LT}.v_{TL})}{E_L.E_T} & 0\\ 0 & 0 & 0 & GLT*\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ 0\\ \varepsilon_{LT}\end{bmatrix}$$

$[H]$ – Orthotropie plane en déformations planes et axisymétrie

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{E_L E_T E_N}{\begin{pmatrix}1-v_{TN}v_{NT}\\ -v_{NL}v_{LN}\\ -v_{LT}v_{TL}\\ -2v_{TN}v_{NL}v_{LT}\end{pmatrix}}$$

3.4 Cas 2 D orthotrope en contraintes planes

3.4.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ \varepsilon_{NN}\\ 2\varepsilon_{LT}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_L} & -\frac{v_{TL}}{E_T} & 0 & 0\\ -\frac{v_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LT}\end{bmatrix}$$

$[H]^{-1}$ – Orthotropie plane en contraintes planes

3.4.2 Matrice de Hooke

$$\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ 0\\ \sigma_{LT}\end{bmatrix}=\frac{1}{1-v_{LT}.v_{TL}}\begin{bmatrix}E_L & v_{TL}E_T & 0 & 0\\ v_{LT}E_L & E_T & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_{LT}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ \varepsilon_{NN}\\ 2\varepsilon_{LT}\end{bmatrix}$$

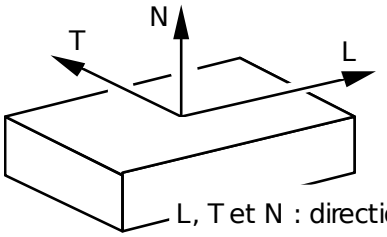
$[H]$ – Orthotropie en contraintes planes

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Utilisation dans *Code_Aster*

Dans *Aster* , la définition des caractéristiques élastiques orthotropes constantes ou fonctions de la température s'effectuent par la commande DEFI_MATERIAU , mots clés ELAS_ORTH, ELAS_ISTR, ELAS_ISTR_FO ou ELAS_ORTH_FO pour les éléments de coque et les éléments massifs isoparamétriques ou les couches constitutives d'un composite (voir la commande DEFI_COMPOSITE).

Pour définir le repère d'orthotropie (L,T,N) lié aux éléments, on peut se reporter aux documentations [U4.42.03] DEFI_COMPOSITE et [U4.42.01] AFFE_CARA_ELEM .



L, T et N : directions d'orthotropie
longitudinale, transversale et normale

/ ELAS_ORTH = _F (
- ♦ E_L = ygl Module d'Young longitudinal.
- ♦ E_T = ygt Module d'Young transversal.
- ◊ E_N = ygn Module d'Young normal.
- ♦ GL_T = glt Module de cisaillement dans le plan LT .
- ◊ G_TN = gtn Module de cisaillement dans le plan TN .
- ◊ G_LN = gln Module de cisaillement dans le plan LN .
- ♦ NU_LT = nult Cœfficient de Poisson dans le plan LT .
- ◊ NU_TN = nutn Cœfficient de Poisson dans le plan TN .
- ◊ NU_LN = nuln Cœfficient de Poisson dans le plan LN .

Remarque importante :

L'exposé de cette note de référence est basé sur la convention des livres de J.L.Batoz et D.Gay. La documentation U de DEFI_MATERIAU décrit ces choix, et le coefficient NU_LT s'interprète de la façon suivante dans Aster :

si l'on exerce une traction selon l'axe L donnant lieu à une déformation selon cet axe égale à $\varepsilon_L = \frac{\sigma_l}{\text{ygl}}$, on a une déformation selon l'axe T égale à : ε_t =-nult $\frac{\sigma_l}{\text{ygl}}$.*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Bibliographie

1) J.C. MASSON : Matrice de Hooke pour les matériaux orthotropes, Rapport interne Applications en Mécanique, n°79-018, CiSi, 1979.

2) D. GAY : Matériaux composites, Edition Hermes, 1987

3) J.L. BATOZ, G. DHATT : Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1, Edition Hermes

6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6.4	A. ASSIRE, EDF-R&D/AMA	Texte initial
8.4	*A. ASSIRE,X. DESROCHES, J.M. PROIX* EDF-R&D/AMA	Corrections minimes

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)