# Élément de poutre multifibre (droite)

**Résumé** :

Ce document présente les éléments de poutre multifibre de *Code_Aster* basés sur une résolution d'un problème de poutre pour lequel chaque section d'une poutre est divisée en plusieurs fibres. Chaque fibre se comporte alors comme une poutre d'Euler. Plusieurs matériaux peuvent être affectés sur un seul support élément fini (SEG2) ce qui évite d'avoir à dupliquer les mailles (acier + béton, par exemple).

Les poutres sont droites (élément POU_D_EM). La section peut être de forme quelconque, décrite par un « maillage de fibres », voir [U4.26.01].
Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- hypothèse d'Euler : le cisaillement transverse est négligé (cette hypothèse est vérifiée pour de forts élancements),
- les éléments de poutre multifibre prennent en compte les effets de la dilatation thermique, du séchage et de l'hydratation (termes du second membre) et de manière simplifiée la torsion. Le couplage effort-normal flexion est traité naturellement, par intégration dans la section des réponses uniaxiales des modèles de comportement associés à chaque groupe de fibres. Un enrichissement de la déformation axiale, résolu par condensation locale dans le cas de comportements non linéaires, permet de bons résultats numériques, quelle que soit l'évolution dans la section du centre de gravité matériau de la section.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des matières

1 Introduction....4
2 Élément de théorie des poutres (rappels)....6
3 Les équations du mouvement des poutres....6
4 Élément de poutre droite multifibre....8
4.1 Élément poutre de référence....8
4.2 Détermination de la matrice de rigidité de l'élément multifibre....9
4.2.1 Cas général (poutre d'Euler)....9
4.2.2 Cas de la poutre multifibre....10
4.2.3 Discrétisation de la section en fibres – Calcul de....12
4.2.4 Intégration dans le cas élastique linéaire (RIGI_MECA)....13
4.2.5 Intégration dans le cas non-linéaire (RIGI_MECA_TANG)....13
4.3 Détermination de la matrice de masse de l'élément multifibre....14
4.3.1 Détermination de....14
4.3.2 Discrétisation de la section en fibres - Calcul de....15
4.4 Calcul des forces internes....16
4.5 Formulation enrichie en déformation....17
4.5.1 Méthode des modes incompatibles....17
4.5.2 Implantation numérique....18
4.5.3 Prise en compte de l'excentrement....19
4.6 Modèles de comportement non linéaires utilisables....20
5 Élément multipoutre....21
5.1 Élément multipoutre de référence....21
5.2 Détermination des efforts internes de l'élément....21
5.3 Détermination de la matrice de masse de l'élément multifibre et formulation enrichie en déformation....22
6 Cas d'application....23
7 Bibliographie....23
8 Description des versions du document....24



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Notations**

On donne la correspondance entre les notations de ce document et celles de la documentation d'utilisation.

$DX, DY, DZ$ et $DRX, DRY, DRZ$ sont en fait les noms des degrés de liberté associés aux composantes du déplacement $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ .

| | | |
|---|---|---|
| $E$ | module de Young | $E$ |
| $\nu$ | coefficient de Poisson | $NU$ |
| $G$ | module de Coulomb = $\frac{E}{2.(1+\nu)}$ | $G$ |
| $I_y, I_z$ | moments géométriques de flexion par rapport aux axes $y, z$ | $IY, IZ$ |
| $J_x$ | constante de torsion | $JX$ |
| $K$ | matrice de rigidité | |
| $M$ | matrice de masse | |
| $M_x, M_y, M_z$ | moments autour des axes $x, y, z$ | $MT, MFY, MFZ$ |
| $N$ | effort normal à la section | $N$ |
| $S$ | aire de la section | $A$ |
| $u, v, w$ | translations sur les axes $x, y, z$ | $DX, DY, DZ$ |
| $V_y, V_z$ | efforts tranchants suivant les axes $y, z$ | $VY, VZ$ |
| $\rho$ | masse volumique | $\rho$ |
| $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ | rotations autour des axes $x, y, z$ | $DRX, DRY, DRZ$ |
| $q_x, q_y, q_z$ | efforts linéiques extérieurs | |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Introduction

L'analyse des structures soumises à un chargement dynamique nécessite des modèles de comportement capables de représenter les non-linéarités du matériau.

De nombreux modèles analytiques ont été proposés. Ils peuvent être classés selon deux groupes :
- des modèles détaillés fondés sur la mécanique du solide et leur description du comportement local du matériau (approche microscopique)
- des modèles fondés sur une modélisation globale du comportement (approche macroscopique).

Dans le premier type de modèles, nous pouvons trouver les modèles classiques aux éléments finis ainsi que les modèles de type "fibre" (ayant un élément de type poutre comment support).

Tandis que les modèles « classiques » aux éléments finis sont des outils puissants pour la simulation du comportement non linéaire des parties complexes des structures (joints, assemblages, …), leur application à la totalité d'une structure peut s'avérer peu pratique à cause d'un temps de calcul prohibitif ou de la taille mémoire nécessaire à la réalisation de ce calcul. Par contre, une modélisation de type poutre multifibre [Figure 1-a], possède les avantages des hypothèses simplificatrices d'une cinématique de type poutre d'Euler - Bernoulli tout en offrant une solution pratique et efficace pour une analyse non linéaire complexe d'éléments de structures composites tels que ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé.

De plus, cette modélisation "intermédiaire" est relativement robuste et peu coûteuse en temps calcul du fait de l'utilisation de modèles de comportement non linéaires 1D.

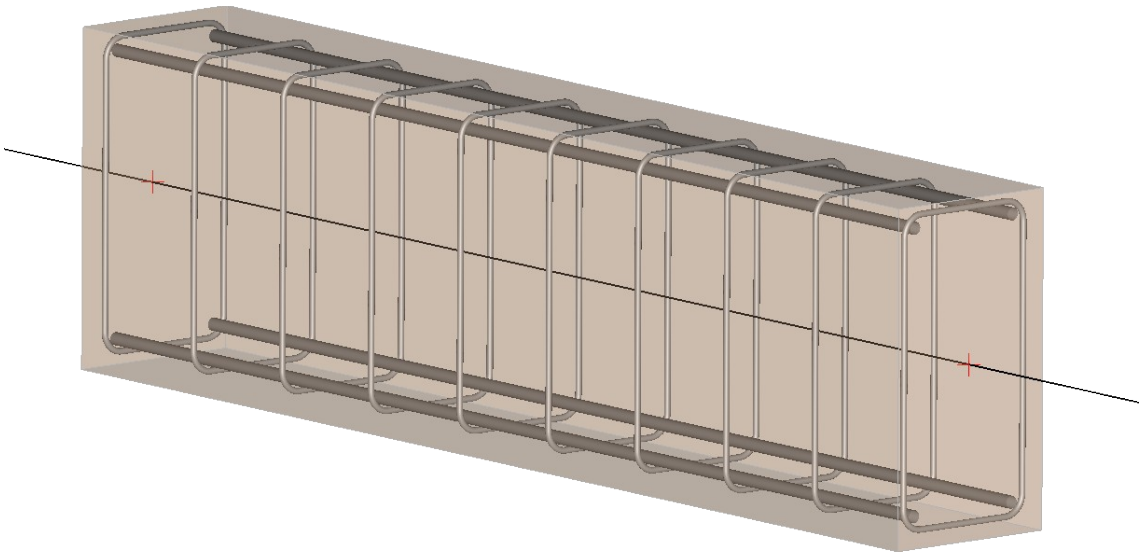


**Figure 1-a : Poutre béton armé avec cadres et armatures.**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

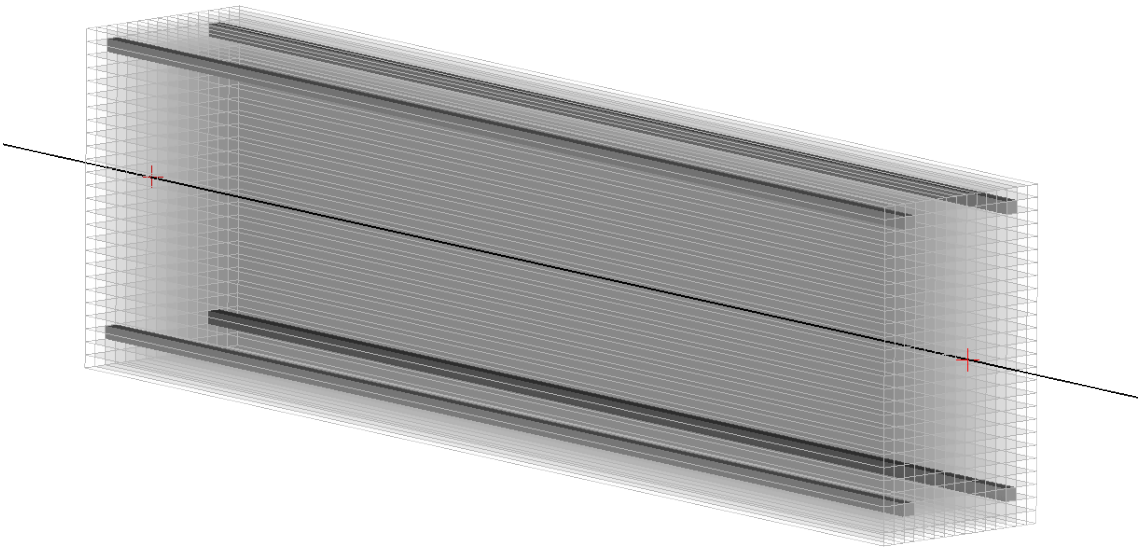


**Figure 1-b : Modélisation d'une poutre béton armé par une poutre multifibre.**

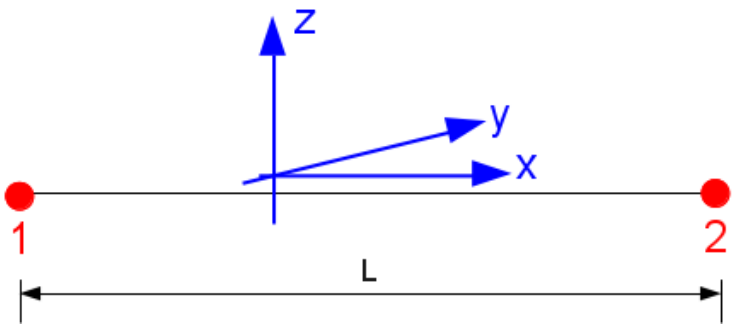



**Figure 1-c : Support élément fini d'une modélisation de type poutre multifibre**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Élément de théorie des poutres (rappels)

On reprend ici les éléments développés dans le cadre des éléments de poutre d'Euler, [bib 4].

Une poutre est un solide engendré par une surface d'aire $S$ dont le centre d'inertie géométrique $G$ décrit une courbe $C$ appelée la fibre moyenne ou fibre neutre. L'aire $S$ est la section droite (section transversale) ou profil, et l'on suppose que si elle est évolutive, ses évolutions (taille, forme) sont continues et progressives lorsque $G$ décrit la ligne moyenne.

Pour l'étude des poutres en général, on fait les hypothèses suivantes :
- la section droite de la poutre est indéformable,
- le déplacement transversal est uniforme sur la section droite.

Ces hypothèses permettent d'exprimer les déplacements d'un point quelconque de la section, en fonction des déplacements du point correspondant situé sur la ligne moyenne, et en fonction d'un accroissement de déplacement dû à la rotation de la section autour des axes transversaux.

La discrétisation en éléments "exacts" de poutre s'effectue sur un élément linéique à deux nœuds et six degrés de liberté par nœuds. Ces degrés de liberté sont les trois translations $u,v,w$ et les trois rotations $\theta_x,\theta_y,\theta_z$ [Figure 2-a].

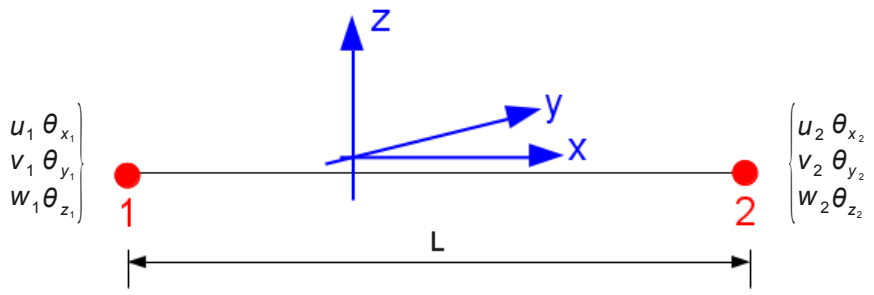



**Figure 2-a : Élément poutre.**

Attendu que les déformations sont locales, il est construit en chaque sommet du maillage une base locale dépendant de l'élément sur lequel on travaille. La continuité des champs de déplacements est assurée par un changement de base, ramenant les données dans la base globale.

Dans le cas des poutres droites, on place traditionnellement la ligne moyenne sur l'axe x de la base locale, les déplacements transversaux s'effectuant ainsi dans le plan $(y,z)$.

Enfin lorsque nous rangeons des grandeurs liées aux degrés de liberté d'un élément dans un vecteur ou une matrice élémentaire (donc de dimension $12$ ou $12^2$), on range d'abord les variables pour le sommet $1$ puis celles du sommet $2$. Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations. Par exemple, un vecteur déplacement sera structuré de la manière suivante :

$$\underbrace{u_1,v_1,w_1,\theta_{x_1},\theta_{y_1},\theta_{z_1}}_{\text{sommet 1}}\ ,\ \underbrace{u_2,v_2,w_2,\theta_{x_2},\theta_{y_2},\theta_{z_2}}_{\text{sommet 2}}$$

# 3 Les équations du mouvement des poutres

Nous ne reprendrons pas dans ce document toutes les équations du mouvement des poutres. Pour plus de compléments concernant cette partie on peut se référer à la documentation concernant les éléments POU_D_E et POU_D_T [bib 4].


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Élément de poutre droite multifibre

On décrit dans ce chapitre l'obtention des matrices élémentaires de rigidité et de masse pour l'élément de poutre droite multifibre, selon le modèle d'Euler. Les matrices de rigidité sont calculées avec les options 'RIGI_MECA' ou 'RIGI_MECA_TANG', et les matrices de masse avec l'option 'MASS_MECA' pour la matrice cohérente, et l'option 'MASS_MECA_DIAG' pour la matrice de masse diagonalisée.

Nous présentons ici une généralisation [bib 3] où l'axe de référence choisi pour la poutre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique. L'élément fonctionne pour une section quelconque (hétérogène est sans symétrie) et est donc adapté à une évolution non linéaire du comportement des fibres.

On décrit également le calcul des forces nodales pour les algorithmes non linéaires : 'FORC_NODA' et 'RAPH_MECA'.

## 4.1 Élément poutre de référence

La [Figure 4.1-a] nous montre le changement de variable réalisé pour passer de l'élément fini réel [Figure 2-a] à l'élément fini de référence.

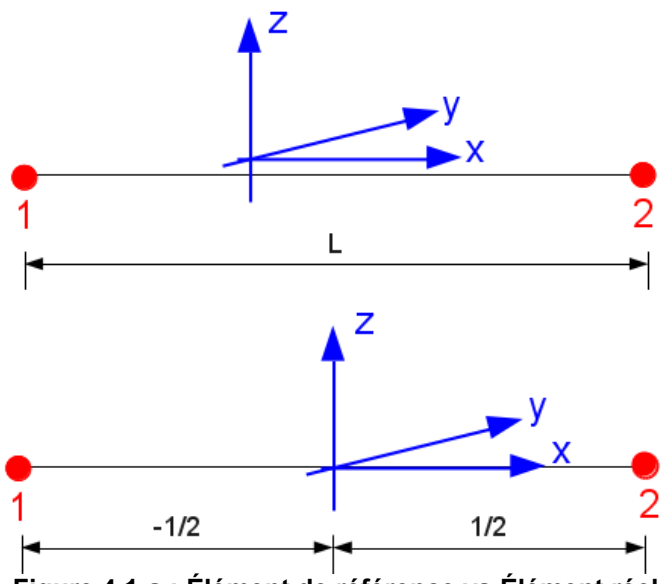



**Figure 4.1-a : Élément de référence vs Élément réel.**

On considérera alors le champ de déplacements continu en tout point de la ligne moyenne par rapport au champ de déplacements discrétisé de la façon suivante :

$$U_s = [N].\{U\}$$ [éq 4.1-1]

L'indice $s$ désigne les quantités attachées à la fibre moyenne.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En utilisant les fonctions de forme de l'élément de référence, la discrétisation des variables $u_s(x), v_s(x), w_s(x), \theta_{sx}(x), \theta_{sy}(x), \theta_{sz}(x)$ devient :

$$\begin{pmatrix} u_s(x) \\ v_s(x) \\ w_s(x) \\ \theta_{sx}(x) \\ \theta_{sy}(x) \\ \theta_{sz}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & -N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{3,x} & 0 & 0 & 0 & N_{4,x} & 0 & N_{5,x} & 0 & 0 & 0 & N_{6,x} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{pmatrix}$$

[éq 4.1-2]

Avec les fonctions d'interpolation suivantes, et leurs dérivées utiles :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad ; \quad N_{1,x} = -\frac{1}{L}$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad ; \quad N_{2,x} = \frac{1}{L}$$

$$N_3 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad ; \quad N_{3,xx} = -\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3}$$

$$N_4 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad ; \quad N_{4,xx} = -\frac{4}{L} + 6\frac{x}{L^2}$$

$$N_5 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad ; \quad N_{5,xx} = \frac{6}{L^2} - 12\frac{x}{L^3}$$

$$N_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad ; \quad N_{6,xx} = -\frac{2}{L} + 6\frac{x}{L^2}$$

[éq 4.1-3]

## 4.2 Détermination de la matrice de rigidité de l'élément multifibre

### 4.2.1 Cas général (poutre d'Euler)

Considérons une poutre d'Euler, droite, orientée dans la direction $x$, soumise à des efforts distribués $q_x, q_y, q_z$ [Figure 4.2.1-a].

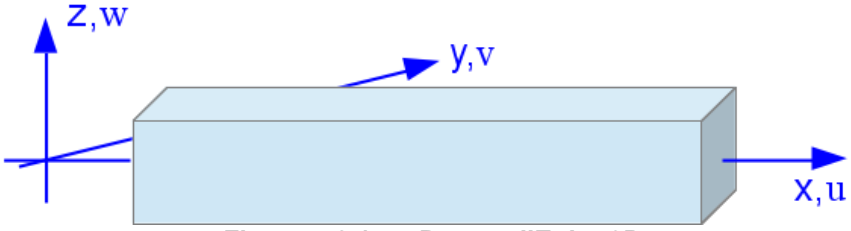



**Figure 4.2.1-a : Poutre d'Euler 3D.**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les champs de déplacements et de déformations prennent alors la forme suivante lorsque l'on écrit le déplacement d'un point quelconque de la section en fonction du déplacement $(U_s)$ et de la rotation $\theta_s$ de la ligne de moyenne :

$$u(x,y,z)=u_s(x)-y\theta_{sz}(x)+z\theta_{sy}(x) \quad \text{[éq 4.2.1-1]}$$
$$v(x,y,z)=v_s(x) \quad \text{[éq 4.2.1-2]}$$
$$w(x,y,z)=w_s(x) \quad \text{[éq 4.2.1-3]}$$
$$\varepsilon_{xx}=u_x'(x)-y\theta_{sz}'(x)+z\theta_{sy}'(x) \quad \text{[éq 4.2.1-4]}$$
$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{xz}=0 \quad \text{[éq 4.2.1-5]}$$

**Remarques :**
*La torsion est traitée globalement en admettant une hypothèse élastique, à part, on ne calcule pas $\varepsilon_{yz}$ ici. $f'(x)$ désigne la dérivée de $f(x)$ par rapport à $x$ .*

En introduisant les équations [éq 4.2.1-4] et [éq 4.2.1-5] dans le principe des travaux virtuels on obtient :

$$\int_{V_0}\sigma_{xx}.\,\delta\varepsilon_{xx}\,dV_0=\int_0^L\left(\delta u_s(x)\,q_x+\delta v_s(x)\,q_y+\delta w_s(x)\,q_z\right)dx \quad \text{[éq 4.2.1-6]}$$

$q_x, q_y, q_z$ désignant les efforts linéiques appliqués. Ce qui donne en utilisant l'équation [éq 4.2.1-1] :

$$\int_0^L\left(N\,\delta u_s'(x)+M_x\delta\theta_{sx}'(x)+M_y\,\delta\theta_{sy}'(x)+M_z\,\delta\theta_{sz}'(x)\right)dx = \int_0^L\left(q_x\,\delta u_s(x)+q_y\delta v_s(x)+q_z\,\delta w_s(x)\right)dx \quad \text{[éq 4.2.1-7]}$$

avec :

$$N=\int_S\sigma_{xx}\,dS \;\;;\;\; M_y=\int_S z\,\sigma_{xx}\,dS \;\;;\;\; M_z=\int_S -y\,\sigma_{xx}\,dS \quad \text{[éq 4.2.1-8]}$$

**Remarques :**
*Le moment de torsion $M_x$ n'est pas calculé par intégration mais calculé directement à partir de la raideur en torsion (voir [éq 4.2.2-4 ]).*
*La théorie des poutres associée à un matériau élastique donne :* $\sigma_{xx}=E\,\varepsilon_{xx}$

## 4.2.2 Cas de la poutre multifibre

Nous supposons maintenant que la section $s$ n'est pas homogène, matériaux avec des caractéristiques mécaniques différentes.
Sans adopter d'hypothèse particulière sur l'intersection de l'axe $x$ avec la section $s$ ou sur l'orientation des axes $Y, Z$ , la relation entre les contraintes "généralisées" et les déformations "généralisées" $\mathbf{D}_s$ devient [bib2] :

$$\mathbf{F}_s=\mathbf{K}_s\cdot\mathbf{D}_s \quad \text{[éq 4.2.2-1]}$$

avec :

$$\mathbf{F}_s=\left(N,\,M_y,\,M_z,\,M_x\right)^T$$
$$\mathbf{D}_s=\left(u_s'(x),\,\theta_{sy}'(x),\,\theta_{sz}'(x),\,\theta_{sx}'(x)\right)^T \quad \text{[éq 4.2.2-2]}$$

La matrice $\boldsymbol{K_s}$ peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_s=\begin{pmatrix} K_{s11} & K_{s12} & K_{s13} & 0 \\ & K_{s22} & K_{s23} & 0 \\ & & K_{s33} & 0 \\ sym & & & K_{s44} \end{pmatrix} \quad \text{[éq 4.2.2-3]}$$


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec :

$$K_{s11}=\int_S EdS \;\; ; \;\; K_{s12}=\int_S Ezds \;\; ; \;\; K_{s13}=-\int_S Eyds$$
$$K_{s22}=\int_S Ez^2 dS \;\; ; \;\; K_{s23}=-\int_S Eyzds \;\; ; \;\; K_{s33}=\int_S Ey^2 ds$$

[éq 4.2.2-4]

où $E$ peut varier en fonction de $y$ et $z$. En effet, il se peut que dans la modélisation plane de la section, plusieurs matériaux cohabitent. Par exemple, dans une section de béton armée, il y a à la fois du béton et des armatures.
La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les intégrales des équations [éq 4.2.2-4]. Le calcul des coefficients de la matrice $\mathbf{K}_s$ est détaillé dans le paragraphe [§4.2.3] suivant.

**Remarque :**

*Le terme de torsion $K_{s44}=GJ_x$ est donné par l'utilisateur à l'aide de la donnée de $J_x$, à l'aide de la commande* `AFFE_CARA_ELEM`.

L'introduction des équations [éq 4.2.1-1] à [éq 4.2.2-4] dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta D_s^T . K_s . D_s \; dx - \int_0^L \left(\delta u_s(x)\; q_x + \delta v_s(x)\; q_y + \delta w_s(x)\; q_z\right) dx = 0$$

[éq 4.2.2-5]

Les déformations généralisées sont calculées par ( $D_S$ est donnée à l'équation [éq 4.2.2-2]) :

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{B}\left\{\mathbf{U}\right\}$$

[éq 4.2.2-6]

Avec la matrice $\mathbf{B}$ suivante :

$$B=\begin{vmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{3,xx} & 0 & N_{4,xx} & 0 & 0 & 0 & -N_{5,xx} & 0 & N_{6,xx} & 0 \\ 0 & N_{3,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{4,xx} & 0 & N_{5,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{6,xx} \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

[éq 4.2.2-7]

La discrétisation de l'espace $[0,L]$ avec des éléments et l'utilisation des équations [éq 4.2.2-5] rend l'équation [éq 4.2.1-6] équivalente à la résolution d'un système linéaire classique :

$$\mathbf{K}.\mathbf{U}=\mathbf{F}$$

[éq 4.2.2-8]

La matrice de rigidité de l'élément [Figure4.2.2-a] et le vecteur des efforts résultats sont finalement donnés par :

$$\mathbf{K}_{elem}=\int_0^L \mathbf{B}^T.\mathbf{K}_s.\mathbf{B}\; dx$$
$$\mathbf{F}=\int_0^L \mathbf{N}^T.\boldsymbol{Q}\; dx$$

[éq 4.2.2-9]



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

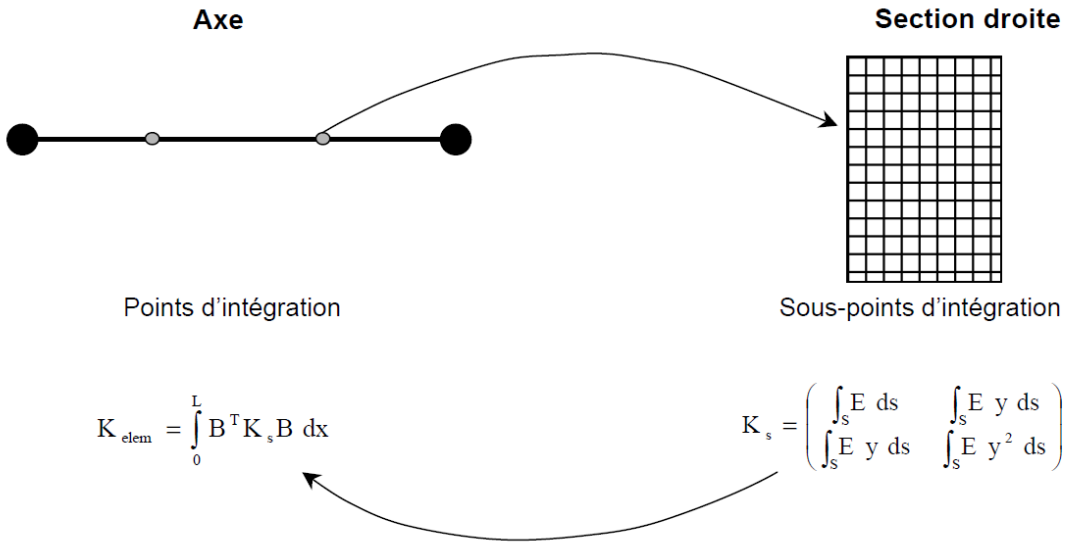



**Figure 4.2.2-a : Poutre multifibre – Calcul de $\mathbf{K}_{elem}$**

Avec le vecteur $Q$ qui dépend du chargement extérieur : $\mathbf{Q}=\left(q_x \; q_y \; q_z \; 0 \; 0 \; 0\right)^T$ .

Si nous considérons que les efforts distribués $q_x, q_y, q_z$ sont constants, nous obtenons le vecteur forces nodales suivant :

$$\mathbf{F}=\left(\frac{Lq_x}{2} \; \frac{Lq_y}{2} \; \frac{Lq_z}{2} \; 0 \; -\frac{L^2 q_z}{12} \; \frac{L^2 q_y}{12} \; \frac{Lq_x}{2} \; \frac{Lq_y}{2} \; \frac{Lq_z}{2} \; 0 \; \frac{L^2 q_z}{12} \; \frac{L^2 q_y}{12}\right)^T \qquad \text{[éq 4.2.2-10]}$$

## 4.2.3 Discrétisation de la section en fibres – Calcul de $K_s$

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les différentes intégrales qui interviennent dans la matrice de rigidité, et les autres termes nécessaires.

La géométrie des fibres regroupées en groupes de fibres, via l'opérateur DEFI_GEOM_FIBRE [U4.26.01]) contient notamment les caractéristiques (Y, Z, AIRE) pour chaque fibre. On peut prévoir au plus 10 groupes de fibres maxi par élément poutre.

Ainsi, si nous avons une section qui comporte $n$ fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$K_{s11}=\sum_{i=1}^{n} E_i S_i \;\; ; \;\; K_{s12}=\sum_{i=1}^{n} E_i z_i S_i \;\; ; \;\; K_{s13}=\sum_{i=1}^{n} E_i y_i S_i$$
$$K_{s22}=\sum_{i=1}^{n} E_i z_i^2 S_i \;\; ; \;\; K_{s23}=-\sum_{i=1}^{n} E_i y_i z_i S_i \;\; ; \;\; K_{s33}=\sum_{i=1}^{n} E_i y_i^2 S_i \qquad \text{[éq 4.2.3-1]}$$

avec $E_i$ le module initial ou tangent et $S_i$ la section de chaque fibre. L'état de contrainte est constant par fibre.
Chaque fibre est également repérée à l'aide de $y_i$ et $z_i$ les coordonnées du centre de gravité de la fibre par rapport à l'axe de la section défini par le mot-clé 'COOR_AXE_POUTRE' (voir la commande DEFI_GEOM_FIBRE [U4.26.01]).
La numérotation des fibres dépend du choix du mot-clé 'FIBRE' ou 'SECTION' (voir la commande DEFI_GEOM_FIBRE [U4.26.01]).


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

### 4.2.4 Intégration dans le cas élastique linéaire (RIGI_MECA)

Lorsque le comportement du matériau est linéaire, si l'élément poutre est homogène dans sa longueur, l'intégration de l'équation [éq 4.2.2-9] peut être faite analytiquement.
On obtient alors la matrice de rigidité suivante :

$$\mathbf{K}_{elem}=\begin{pmatrix}
\frac{K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{s12}}{L} & \frac{K_{s13}}{L} & \frac{-K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-K_{s12}}{L} & \frac{-K_{s13}}{L} \\
 & \frac{12K_{s33}}{L^3} & \frac{-12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s33}}{L^2} & 0 & \frac{-12K_{s33}}{L^3} & \frac{12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s33}}{L^2} \\
 & & \frac{12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s22}}{L^2} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & 0 & \frac{12K_{s23}}{L^3} & \frac{-12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s22}}{L^2} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} \\
 & & & \frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4K_{s22}}{L} & \frac{4K_{s23}}{L} & \frac{-K_{s12}}{L} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s22}}{L^2} & 0 & \frac{2K_{s22}}{L} & \frac{2K_{s23}}{L} \\
 & & & & & \frac{4K_{s33}}{L} & \frac{-K_{s13}}{L} & \frac{-6K_{s33}}{L^2} & \frac{6K_{s23}}{L^2} & 0 & \frac{2K_{s23}}{L} & \frac{2K_{s33}}{L} \\
 & & & & & & \frac{K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{s12}}{L} & \frac{K_{s13}}{L} \\
 & & & & & & & \frac{12K_{s33}}{L^3} & \frac{-12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & \frac{-6K_{s33}}{L^2} \\
 & & & SYM & & & & & \frac{12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s22}}{L^2} & \frac{6K_{s23}}{L^2} \\
 & & & & & & & & & \frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4K_{s22}}{L} & \frac{4K_{s23}}{L} \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4K_{s33}}{L}
\end{pmatrix}$$

[éq 4.2.4-1]

avec les termes suivants $K_{s11}, K_{s12}, K_{s13}, K_{s22}, K_{s33}, K_{s23}, K_{s44}$ donnés à l'équation [éq 4.2.2-4].

**Remarque :**

La matrice de rigidité présentée ci-dessus ne prend pas en compte une éventuelle excentricité de l'axe de référence par rapport au centre élastique, pour ne pas alourdir la présentation. Cependant les termes supplémentaires sont bien pris en compte dans la programmation (voir §4.5.3).

### 4.2.5 Intégration dans le cas non-linéaire (RIGI_MECA_TANG)

Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, pour permettre une intégration correcte des efforts internes (voir paragraphe [§4.4]), il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration le long de la poutre. Nous avons choisi d'utiliser deux points de Gauss.

L'intégrale de $\mathbf{K}_{elem}$ [éq 4.2.2-9] se calcule sous forme numérique :

$$\mathbf{K}_{elem}=\int_0^L \mathbf{B}^T . K_s . \mathbf{B}\ dx = j\sum_{i=1}^{2} w_i \mathbf{B}\left(x_i\right)^T . \mathbf{K}_s\left(x_i\right) . \mathbf{B}\left(x_i\right) \qquad \text{[éq 4.2.5-1]}$$

- où $x_i$ est la position du point de Gauss $i$ dans un élément de référence de longueur 1, c'est-à-dire : $(1\pm 0{,}57735026918963)/2$ ;
- $w_i$ est le poids du point de Gauss $i$. On prend ici $w_i=0{,}5$ pour chacun des 2 points ; $j$ est le Jacobien. On prend ici $j=L$, l'élément réel ayant une longueur $L$ et la fonction de forme pour passer à l'élément de référence étant $\frac{x}{L}$.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\mathbf{K}_s$ est calculé à l'aide des équations [éq 4.2.1-4], [éq4.2.2-4] (voir paragraphe [§4.2.3] pour l'intégration numérique de ces équations).

Le calcul analytique de $\mathbf{B}(x_i)^T.\mathbf{K}_s(x_i).\mathbf{B}(x_i)$ donne :

$$\begin{pmatrix}
{}^{B}{}_{1}^{2}K_{s11} & -{}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s13} & {}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s12} & 0 & -{}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s12} & -{}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s13} & -{}^{B}{}_{1}^{2}K_{s11} & {}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s13} & -{}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s12} & 0 & -{}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s12} & -{}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s13} \\
 & {}^{B}{}_{2}^{2}K_{s33} & {}^{B}{}_{2}^{2}K_{s23} & 0 & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s23} & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s33} & {}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s13} & -{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s33} & {}^{B}{}_{2}^{2}K_{s23} & 0 & {}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s23} & {}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s33} \\
 & & {}^{B}{}_{2}^{2}K_{s22} & 0 & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s22} & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s23} & -{}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s12} & {}^{B}{}_{2}^{2}K_{s23} & -{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s22} & 0 & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s22} & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s23} \\
 & & & {}^{B}{}_{1}^{2}K_{s44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^{B}{}_{1}^{2}K_{s44} & 0 & 0 \\
 & & & & {}^{B}{}_{3}^{2}K_{s22} & {}^{B}{}_{3}^{2}K_{s23} & {}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s12} & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s23} & {}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s22} & 0 & {}^{B}{}_{3}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s22} & {}^{B}{}_{3}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s23} \\
 & & & & & {}^{B}{}_{3}^{2}K_{s33} & {}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s13} & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s33} & {}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{3}^{2}K_{s23} & 0 & {}^{B}{}_{3}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s23} & {}^{B}{}_{3}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s33} \\
 & & & & & & {}^{B}{}_{1}^{2}K_{s11} & -{}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s13} & {}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s12} & 0 & {}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s12} & {}^{B}{}_{1}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s13} \\
 & & & & & & & {}^{B}{}_{2}^{2}K_{s33} & -{}^{B}{}_{2}^{2}K_{s23} & 0 & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s23} & -{}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s33} \\
 & & & & & & & & {}^{B}{}_{2}^{2}K_{s22} & 0 & {}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s22} & {}^{B}{}_{2}{}^{B}{}_{4}^{2}K_{s23} \\
 & & & & & & & & & {}^{B}{}_{1}^{2}K_{s44} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & {}^{B}{}_{4}^{2}K_{s22} & {}^{B}{}_{4}^{2}K_{s23} \\
 & & & & & & & & & & & {}^{B}{}_{4}^{2}K_{s33}
\end{pmatrix} \quad \text{[éq 4.2.5-2]}$$

où les $B_i$ sont calculés à l'abscisse $x_i$ de l'élément de référence avec :

$$\begin{aligned}
B_1 &= -N_{1,x} = N_{2,x} = \frac{1}{L} \\
B_2 &= -N_{3,xx} = N_{5,xx} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_i}{L^2} \\
B_3 &= N_{4,xx} = -\frac{4}{L} + \frac{6x_i}{L} \\
B_4 &= N_{6,xx} = -\frac{2}{L} + \frac{6x_i}{L}
\end{aligned} \quad \text{[éq 4.2.5-3]}$$

## 4.3 Détermination de la matrice de masse de l'élément multifibre

### 4.3.1 Détermination de $\mathbf{M}_{elem}$

De même, le travail virtuel des efforts d'inertie devient [bib2] :

$$\begin{aligned}
W_{inert} &= \int_0^L \int_S \rho \left( \delta u(x,y) \frac{d^2 u(x,y)}{dt^2} + \delta v(x,y) \frac{d^2 v(x,y)}{dt^2} + \delta w(x,y) \frac{d^2 w(x,y)}{dt^2} \right) dS\ dx \\
&= \int_0^L \delta \mathbf{U}_s . \mathbf{M}_s . \frac{d^2 \mathbf{U}_s}{dt^2}\ dx
\end{aligned} \quad \text{[éq 4.3.1-1]}$$

avec $\mathbf{U}_s$ le vecteur des déplacements "généralisés".
Ce qui donne pour la matrice de masse :

$$\mathbf{M}_s = \begin{pmatrix}
M_{s11} & 0 & 0 & 0 & M_{s12} & M_{s13} \\
 & M_{s11} & 0 & -M_{s12} & 0 & 0 \\
 & & M_{s11} & -M_{s13} & 0 & 0 \\
 & & & M_{s22}+M_{s33} & 0 & 0 \\
 & & & & M_{s22} & M_{s23} \\
sym & & & & & M_{s33}
\end{pmatrix} \quad \text{[éq 4.3.1-2]}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec :

$$M_{s11}=\int_S \rho\, ds \;\; ; \;\; M_{s12}=\int_S \rho\, z ds \;\; ; \;\; M_{s13}=-\int_S \rho\, y ds$$
$$M_{s22}=\int_S \rho\, z^2 ds \;\; ; \;\; M_{s23}=-\int_S \rho\, yz ds \;\; ; \;\; M_{s33}=\int_S \rho\, y^2 ds$$

[éq 4.3.1-3]

avec $\rho$ qui peut varier en fonction de $y$ et $z$ .

Comme pour la matrice de rigidité, nous prenons en compte les déformations généralisées et la discrétisation de l'espace $[0,L]$. Ce qui donne finalement pour la matrice de masse élémentaire de dimension 12x12 :

$$M^1_{elem}=\left[\frac{LM_{s11}}{3}\ \frac{-M_{s13}}{2}\ \frac{M_{s12}}{2}\ 0\ \frac{LM_{s12}}{12}\ \frac{LM_{s13}}{12}\ \frac{LM_{s11}}{6}\ \frac{M_{s13}}{2}\ \frac{-M_{s12}}{2}\ 0\ \frac{-LM_{s12}}{12}\ \frac{-LM_{s13}}{12}\right]$$

$$M^2_{elem}=\left[sym\ \frac{13LM_{s11}}{35}+\frac{6M_{s33}}{5L}\ \frac{-6M_{s23}}{5L}\ \frac{-7LM_{s12}}{20}\ \frac{M_{s23}}{10}\ \frac{11L^2M_{s11}}{210}+\frac{M_{s33}}{10}\ \frac{-M_{s13}}{2}\ \frac{9LM_{s11}}{70}-\frac{6M_{s33}}{5L}\ \frac{6M_{s23}}{5L}\ \frac{-3LM_{s12}}{20}\ \frac{M_{s23}}{10}\ \frac{-13L^2M_{s11}}{420}+\frac{M_{s33}}{10}\right]$$

$$M^3_{elem}=\left[sym\ sym\ \frac{13LM_{s11}}{35}+\frac{6M_{s22}}{5L}\ \frac{-7LM_{s13}}{20}\ \frac{-11L^2M_{s11}}{210}-\frac{M_{s22}}{10}\ \frac{-M_{s23}}{10}\ \frac{M_{s12}}{2}\ \frac{6M_{s23}}{5L}\ \frac{9LM_{s11}}{70}-\frac{6M_{s22}}{5L}\ \frac{-3LM_{s13}}{20}\ \frac{13L^2M_{s11}}{420}-\frac{M_{s22}}{10}\ \frac{-M_{s23}}{10}\right]$$

$$M^4_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ \frac{LM_{s22}+LM_{s33}}{3}\ \frac{L^2M_{s13}}{20}\ \frac{-L^2M_{s12}}{20}\ 0\ \frac{-3LM_{s12}}{20}\ \frac{-3LM_{s13}}{20}\ \frac{LM_{s22}+LM_{s33}}{6}\ \frac{-L^2M_{s13}}{30}\ \frac{L^2M_{s12}}{30}\right]$$

$$M^5_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ sym\ \frac{L^3M_{s11}}{105}+\frac{2LM_{s22}}{15}\ \frac{2LM_{s23}}{15}\ \frac{-LM_{s12}}{12}\ \frac{-M_{s23}}{10}\ \frac{-13L^2M_{s11}}{420}+\frac{M_{s22}}{10}\ \frac{L^2M_{s13}}{30}\ \frac{-L^3M_{s11}}{140}-\frac{LM_{s22}}{30}\ \frac{-LM_{s23}}{30}\right]$$

$$M^6_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ \frac{L^3M_{s11}}{105}+\frac{2LM_{s33}}{15}\ \frac{-LM_{s13}}{12}\ \frac{13L^2M_{s11}}{420}-\frac{M_{s33}}{10}\ \frac{M_{s23}}{10}\ \frac{-L^2M_{s12}}{30}\ \frac{-LM_{s23}}{30}\ \frac{-L^3M_{s11}}{140}-\frac{LM_{s33}}{30}\right]$$

$$M^7_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ \frac{LM_{s11}}{3}\ \frac{M_{s13}}{2}\ \frac{-M_{s12}}{2}\ 0\ \frac{LM_{s12}}{12}\ \frac{LM_{s13}}{12}\right]$$

$$M^8_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ \frac{13LM_{s11}}{35}+\frac{6M_{s33}}{5L}\ \frac{-6M_{s23}}{5L}\ \frac{-7LM_{s12}}{20}\ \frac{-M_{s23}}{10}\ \frac{-11L^2M_{s11}}{210}-\frac{M_{s33}}{10}\right]$$

$$M^9_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ \frac{13LM_{s11}}{35}+\frac{6M_{s22}}{5L}\ \frac{-7LM_{s13}}{20}\ \frac{11L^2M_{s11}}{210}+\frac{M_{s22}}{10}\ \frac{M_{s23}}{10}\right]$$

$$M^{10}_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ \frac{LM_{s22}+LM_{s33}}{3}\ \frac{-L^2M_{s13}}{20}\ \frac{L^2M_{s12}}{20}\right]$$

$$M^{11}_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ \frac{L^3M_{s11}}{105}+\frac{2LM_{s22}}{15}\ \frac{2LM_{s23}}{15}\right]$$

$$M^{12}_{elem}=\left[sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ sym\ \frac{L^3M_{s11}}{105}+\frac{2LM_{s33}}{15}\right]$$

avec les termes suivants : $M_{s11}, M_{s12}, M_{s13}, M_{s22}, M_{s33}, M_{s23}$ qui sont donnés à l'équation [éq 4.3.1-3].

**Remarques :**

*La matrice de masse diagonale est réduite par la technique des masses concentrées ([bib4]) . Cette matrice de masse diagonale s'obtient par l'option 'MASS_MECA_DIAG' de l'opérateur CALC_MATR_ELEM [U4.61.01].*

*Les termes supplémentaires en cas d'excentricité des axes ne sont pas présentés ici mais sont bien pris en compte (voir §4.5.3).*

### 4.3.2 Discrétisation de la section en fibres - Calcul de $M_s$

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les différentes intégrales qui interviennent dans la matrice de masse. Ainsi, si nous avons une section qui comporte $n$ fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$M_{s11}=\sum_{i=1}^{n}\rho_i S_i \;\; ; \;\; M_{s12}=\sum_{i=1}^{n}\rho_i z_i S_i \;\; ; \;\; M_{s13}=-\sum_{i=1}^{n}\rho_i y_i S_i$$
$$M_{s22}=\sum_{i=1}^{n}\rho_i z_{i2} S_i \;\; ; \;\; M_{s23}=-\sum_{i=1}^{n}\rho_i y_i z_i S_i \;\; ; \;\; M_{s33}=\sum_{i=1}^{n}\rho_i y_{i2} S_i$$

[éq 4.3.2-1]

avec $\rho_i$ et $S_i$ la masse volumique et la section de chaque fibre. $y_i$ et $z_i$ sont les coordonnées du centre de gravité de la fibre définis comme précédemment.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 4.4 Calcul des forces internes

Le calcul des forces nodales $\mathbf{F}_{\text{int}}$ dues à un état de contraintes internes données se fait par l'intégrale :

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_0^L \boldsymbol{B}^T . \boldsymbol{F}_s \, dx \qquad \text{[éq 4.4-1]}$$

où $\boldsymbol{B}$ est la matrice donnant les déformations généralisées en fonction des déplacements nodaux [éq 4.2.2-6] et où $\mathbf{F}_s$ est le vecteur des contraintes généralisées donné à l'équation [éq 4.2.2-2],

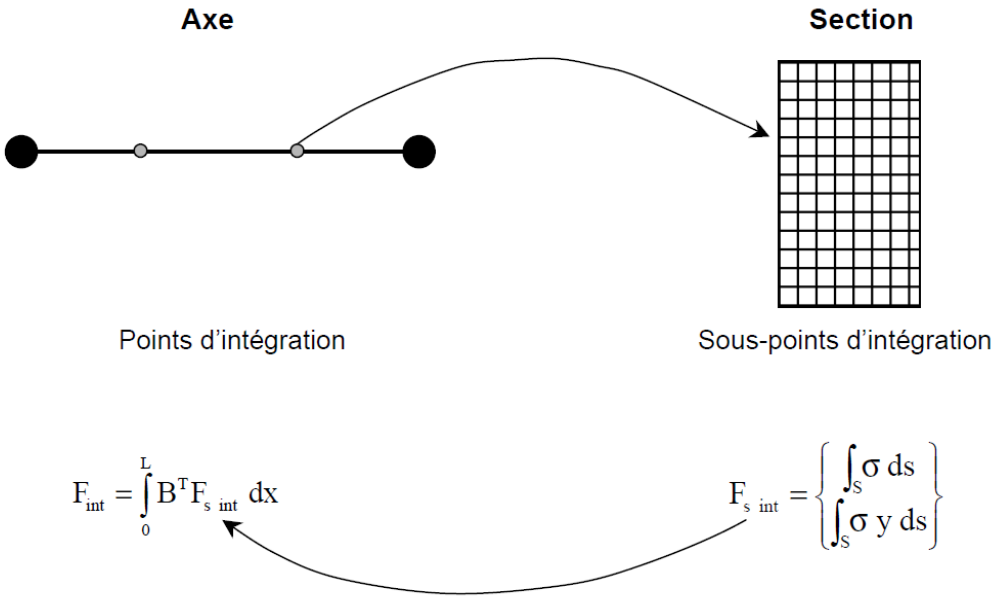



**Figure 4.4-a : Poutre multifibre – Calcul de $\mathbf{F}_{\text{int}}$**

$$\mathbf{F}_s^T = \begin{pmatrix} N & M_y & M_z & M_x \end{pmatrix} \qquad \text{[éq 4.4-2 ]}$$

L'effort normal N et les moments fléchissant $M_y$ et $M_z$ sont calculés par intégration des contraintes sur la section [éq 4.2.1-8].

Le comportement en torsion étant supposé rester linéaire, le moment de torsion est calculé avec les rotations axiales nodales :

$$M_x = GJ_x \frac{\theta_{x2} - \theta_{x1}}{L} \qquad \text{[éq 4.4-3 ]}$$

L'équation [éq 4.1-1] est intégrée numériquement :

$$\mathbf{F}_i = \int_0^L \mathbf{B}^T . \mathbf{F}_s \, dx = j \sum_{i=1}^{2} w_i \mathbf{B}\left(x_i\right)^T . \mathbf{F}_s\left(x_i\right) \qquad \text{[éq 4.4-4 ]}$$

Les positions et poids des points de Gauss ainsi que le Jacobien sont donnés dans le paragraphe [§4.2.5].

Le calcul analytique de $B\left(x_i\right)^T . F_s\left(x_i\right)$ donne :

$$\left[B\left(x_i\right)^T . F_s\left(x_i\right)\right]^T = \begin{bmatrix} -B_1 N & B_2 M_z & -B_2 M_y & 0 & B_3 M_y & B_3 M_z \\ B_1 N & -B_2 M_z & B_2 M_y & 0 & B_4 M_y & B_4 M_z \end{bmatrix} \qquad \text{[éq 4.4-5]}$$

où les $B_i$ sont donnés à l'équation [éq 4.2.4-1].



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 4.5 Formulation enrichie en déformation

Avec les interpolations de déplacements de l'équation [éq 4.1-1], la déformation généralisée axiale est constante et les courbures sont linéaires (voir équations [éq 4.2.2-6], [éq 4.2.2-7] et [éq 4.2.5-3]) :

$$\begin{cases} \varepsilon_s(x)=\dfrac{u_2-u_1}{L} \\ \chi_{ys}(x)=-\left(-\dfrac{6}{L^2}+\dfrac{12\,x}{L^3}\right)w_1+\left(\dfrac{6x}{L^2}-\dfrac{4}{L}\right)\theta_{y1}-\left(-\dfrac{12\,x}{L^3}+\dfrac{6}{L^2}\right)w_2+\left(\dfrac{6x}{L^2}-\dfrac{4}{L}\right)\theta_{y2} \\ \chi_{zs}(x)=\left(-\dfrac{6}{L^2}+\dfrac{12\,x}{L^3}\right)v_1+\left(\dfrac{6x}{L^2}-\dfrac{4}{L}\right)\theta_{z1}+\left(-\dfrac{12\,x}{L^3}+\dfrac{6}{L^2}\right)v_2+\left(\dfrac{6x}{L^2}-\dfrac{4}{L}\right)\theta_{z2} \end{cases} \quad \text{[éq 4.5-1 ]}$$

S'il n'y a pas de couplage entre ces deux déformations (cas élastique, avec la ligne moyenne de référence qui passe par le barycentre de la section), cela ne pose pas de problèmes. Mais dans le cas général non linéaire, il y a un décalage de l'axe neutre, et les termes $K_{s12}$ et $K_{s13}$ de $\mathbf{K}_s$ (équations [éq 4.2.1-4] et [éq 4.2.2-4]) ne sont pas nuls, il y a couplage entre les moments et l'effort normal. On a alors une incompatibilité dans l'approximation des déformations axiales d'une fibre :

$$\varepsilon=\varepsilon_s(x)-y\,\chi_{zs}(x)+z\,\chi_{ys}(x) \quad \text{[éq 4.5-2 ]}$$

Un moyen d'éliminer cette incompatibilité est d'enrichir le champ de déformation axiale :

$$\varepsilon_s(x)\ \mapsto\ \varepsilon_s(x)+\tilde{\varepsilon}_s(x)\ ;\ \tilde{\varepsilon}_s(x)=\alpha.G(x)\ ;\ G(x)=\frac{4}{L}-\frac{8\,x}{L^2} \quad \text{[éq 4.5-3 ]}$$

pour $x\in\left[-\dfrac{L}{2},\dfrac{L}{2}\right]$

où $G(x)$ est une déformation enrichie qui dérive d'une fonction « bulle » en déplacement et $\alpha$ le degré de liberté d'enrichissement. La base variationnelle d'un tel enrichissement est fournie par le principe de Hu-Washizu [bib5] qui peut être présenté de la même manière que la méthode des modes incompatibles [bib6].

### 4.5.1 Méthode des modes incompatibles

Le champ de déplacements généralisés régulier $\mathbf{U}_s$ est défini par l'équation [éq 4.1-1]. Les déformations généralisées $\mathbf{D}_s$ et les contraintes généralisées $\mathbf{F}_s$ par l'équation [éq 4.2.2-2].

Le principe de Hu-Washizu consiste à écrire la forme faible des équations d'équilibre, mais aussi du calcul des déformations et de la loi de comportement, en projection sur les trois champs virtuels (déplacements généralisés $\mathbf{U}_s^*$, déformations généralisées $\mathbf{D}_s^*$ et contraintes généralisées $\mathbf{F}_s^*$ ) :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^L \frac{d\boldsymbol{U}_s^*}{dx}\cdot\boldsymbol{F}_s\,dx-\boldsymbol{W}_{\text{ext}}=0 \\ \displaystyle\int_0^L \boldsymbol{F}_s^*\cdot\left(\frac{d\,\boldsymbol{U}_s}{dx}-\boldsymbol{D}_s\right)dx=0 \\ \displaystyle\int_0^L \boldsymbol{D}_s^*\cdot\left(\boldsymbol{F}_s-\boldsymbol{K}_s\cdot\boldsymbol{D}_s\right)dx=0 \end{cases} \quad \text{[éq 4.5.1-1 ]}$$

On introduit l'enrichissement des déformations réelles, et on choisit de décomposer le champ virtuel de déformations en une partie « régulière » issue du champ virtuel de déplacements et une partie enrichie :

$$D_s=\frac{dU_s}{dx}+\bar{D}_s\quad D_s^*=\frac{dU_s^*}{dx}+\bar{D}_s^* \quad \text{[éq 4.5.1-2]}$$

On reporte [éq 4.5.1-2a] dans [éq 4.5.1-1b], ce qui justifie l'« enrichissement » par l'orthogonalité :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\int_0^L \mathbf{F}_s^* . \mathbf{D}_s \, dx = 0 \qquad \text{[éq 4.5.1-3]}$$

L'équation [éq 4.5.1-1c] se décompose en deux puisqu'on a deux champs virtuels indépendants dans [éq 4.5.1-2b] :

$$\int_0^L \frac{dU_s^*}{dx} . \left( F_s - K_s . D_s \right) dx = 0 \quad \int_0^L \bar{\mathbf{D}}_s^* \cdot \left( \mathbf{F}_s - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{D}_s \right) dx = 0 \qquad \text{[éq 4.5.1-4]}$$

Enfin, la méthode des modes incompatibles consiste à choisir l'espace des contraintes orthogonal à l'espace des déformations enrichies, de telle sorte que [éq 4.5.1-3] est automatiquement vérifiée et [éq 4.5.1-4b] donne donc simplement :

$$\int_0^L \bar{\mathbf{D}}_s^* . \mathbf{K}_s . \mathbf{D}_s \, dx = 0 \qquad \text{[éq 4.5.1-5]}$$

Si on revient à la formulation forte de la loi de comportement dans [éq 4.5.1-4a] et [éq 4.5.1-5], le système [éq 4.5.1-1] devient :

$$\int_0^L \frac{dU_s^*}{dx} . F_s \, dx - W_{ext} = 0 \quad \int_0^L \bar{\mathbf{D}}_s^* \cdot \mathbf{F}_s \, dx = 0 \quad \mathbf{F}_s = \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{D}_s \qquad \text{[éq 4.5.1-6]}$$

**Remarque :**

*Ici on n'enrichit que la déformation axiale d'un élément de poutre d'Euler-Bernoulli, avec une fonction continue, donc* $\bar{\mathbf{D}} = \left( \bar{\varepsilon}_s \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T$ .

## 4.5.2 Implantation numérique

Du point de vue éléments finis, on peut écrire les déplacements et les déformations sous forme matricielle, avec la partie enrichie :

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{N} . (\mathbf{U}) + \mathbf{Q} . (\alpha) \quad \mathbf{D} = \mathbf{B} . (\mathbf{U}) + \mathbf{G} . (\alpha) \qquad \text{[éq 4.5.2-1]}$$

où $\mathbf{N}$ et $\mathbf{B}$ sont les matrices classiques des fonctions d'interpolation et de leurs dérivées (voir [éq 4.1-1] et [éq 4.2.2-7]) et :

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T \text{ et } \mathbf{G} = \left( \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T \qquad \text{[éq 4.5.2-2]}$$

**Remarque :**

$\mathbf{G}$ *a été choisie de telle sorte que l'élément passe toujours le « patch test » (énergie de déformation nulle pour un mouvement de solide)* : $\int_0^L \mathbf{G}(x) dx = \mathbf{0}$ [éq 4.5.2-3]

Après des manipulations classiques de passage du continu au discret, le système d'équations [éq 4.5.1-6], écrit pour l'ensemble de la structure, s'approxime par :

$$\begin{cases} A_{e=1}^{N_{elem}} \left( F_{\text{int}} - F_{ext} \right) = 0 \\ h_e = 0 \quad \forall e \in [1, N_{elem}] \end{cases} \qquad \text{[éq 4.5.2-4]}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{int}} = \int_0^L \mathbf{B}^T . \mathbf{F}_s \, dx = \int_0^L \mathbf{B}^T . \mathbf{K}_s . \left( \mathbf{B} . \mathbf{U}_s + \mathbf{G} . \alpha \right) dx \\ \mathbf{F}_{ext} = \int_0^L \mathbf{N}^T . \mathbf{f} \, dx \\ h_e = \int_0^L \mathbf{G}^T . \mathbf{F}_s \, dx \end{cases} \qquad \text{[éq 4.5.2-5]}$$

$A_{e=1}^{N_{elem}}$ dénote l'assemblage sur tous les éléments du maillage ; $\mathbf{f}$ est la charge axiale répartie sur l'élément poutre. Le système d'équations [éq 4.5.2-4] est non linéaire, il est résolu de manière itérative (voir STAT_NON_LINE).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A l'itération $(i+1)$, avec $\Delta \mathbf{U}^{(i)}=\mathbf{U}^{(i+1)}-\mathbf{U}^{(i)}$ et $\Delta\alpha^{(i)}=\alpha^{(i+1)}-\alpha^{(i)}$, la linéarisation du système donne (itérations de correction de Newton) :

$$\begin{cases} A_{e=1}^{N_{elem}}\left(\left(\mathbf{F}_{\text{int}}^{(i+1)}-\mathbf{F}_{ext}^{(i+1)}\right)+\mathbf{K}_e^{(i)}.\Delta\mathbf{U}^{(i)}+\mathbf{X}_e^{(i)}\Delta\alpha^{(i)}\right)=0 \\ h_e^{(i+1)}+\mathbf{X}_e^{(i)T}.\Delta\mathbf{U}^{(i)}+H_e^{(i)}\Delta\alpha^{(i)}=0 \qquad \forall e\in[1,..,N_{elem}] \end{cases} \quad \text{[éq 4.5.2-6]}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_e^{(i)}=\int_L \mathbf{B}^T.\mathbf{K}_s^{(i)}.\mathbf{B}\ dx \\ \mathbf{X}_e^{(i)}=\int_L \mathbf{B}^T.\mathbf{K}_s^{(i)}.\mathbf{G}\ dx \\ H_e^{(i)}=\int_L \mathbf{G}^T.\mathbf{K}_s^{(i)}.\mathbf{G}\ dx \end{cases} \quad \text{[éq 4.5.2-7]}$$

La deuxième équation du système [éq 4.5.2-6] est locale. Elle permet de calculer le degré de liberté d'enrichissement $\alpha$ indépendamment sur chaque élément. On le calcule par une méthode itérative locale (itérations $(j)$ pour un déplacement $d^{(i)}=\Delta\mathbf{U}^{(i)}$ fixé) :

$$\alpha_{(j+1)}^{(i)}=\alpha_{(j)}^{(i)}-\left(H_{e(j)}^{(i)}\right)^{-1}h_{e(j)}^{(i)} \quad \text{[éq 4.5.2-8]}$$

Ainsi, lorsqu'on a convergé au niveau local, on a :

$$h_e(d^{(i)},\alpha^{(i)})=0 \quad \text{[éq 4.5.2-9]}$$

Et on peut opérer une condensation statique pour éliminer $\alpha$ au niveau global.

$$\mathbf{K}_e^{(i)}=\mathbf{K}_e^{(i)}-\mathbf{X}_e^{(i)}\left(H_e^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{X}_e^{(i)T} \quad \text{[éq 4.5.2-10]}$$

D'un point de vue pratique, cette technique permet de traiter l'enrichissement au niveau élémentaire sans perturber le nombre de degrés de liberté globaux. Elle est implantée au niveau de la routine élémentaire chargée de calculer les options FULL_MECA, RAPH_MECA et RIGI_MECA_TANG.

**Remarques :**

- dans le cas particulier exposé ici, $H_e^{(i)}$ est un réel, donc très facile à inverser.
- de même, $h_e$ et $\alpha$ sont aussi des réels.
- Le calcul de $K_e^{(i)}$ est expliqué dans le paragraphe §4.2.5, les autres grandeurs de l'équation [éq 4.5.2-8] se calculent selon la même technique.
- De même le calcul de $\mathbf{F}_{\text{int}}$ est expliqué dans le paragraphe § 4.4, $h_e$ dans l'équation [éq 4.5.2-5] se calcule selon la même technique.

### 4.5.3 Prise en compte de l'excentrement

Pour un comportement élastique, l'enrichissement des déformations axiales permet de tenir compte correctement du couplage entre l'effort normal et les moments fléchissants, et de rendre la réponse de la poutre indépendante de la position choisie pour l'axe de référence (voir mot clé COOR_AXE_POUTRE dans l'opérateur DEFI_GEOM_FIBRE, [U4.26.01]). Il permet ainsi de traiter le cas des poutres excentrées.

L'implantation numérique de l'enrichissement des déformations axiales présenté dans le paragraphe 4.5.2 concerne les calculs non linéaires avec STAT_NON_LINE ou DYNA_NON_LINE, pour les options FULL_MECA, RAPH_MECA et RIGI_MECA_TANG. En effet, la détermination de $\alpha$ se fait par itérations locales au niveau élémentaire [éq 4.5.2-8].



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas de calculs avec l'option RIGI_MECA (MECA_STATIQUE, calcul de modes, calculs non linéaires avec prédiction 'ELASTIQUE'), on peut déterminer $\alpha$ de façon explicite en fonction des excentrements du centre élastique par rapport à l'axe de référence :

$$e_y = \frac{\int_S Ey\, dS}{\int_S E\, dS} = \frac{K_{S13}}{K_{S11}} \text{ et } e_z = \frac{\int_S Ez\, dS}{\int_S E\, dS} = \frac{K_{S12}}{K_{S11}}$$

On peut ensuite traiter la condensation statique pour éliminer $\alpha$ au niveau de la matrice de rigidité élémentaire. Ces calculs ont été fait analytiquement et la matrice est implantée de façon explicite dans *Code_Aster* (modification d'une vingtaine de termes si $e_y$ et/ou $e_z$ ne sont pas nuls).

Étant donné que le déplacement est enrichi, la matrice de masse (voir §4.3) est modifiée. Comme pour la matrice de rigidité, les termes modifiés dans le cas où $e_y$ et/ou $e_z$ ne sont pas nuls, ont été calculés analytiquement et programmés de façon explicite.

L'enrichissement des déformations modifie également le calcul des options DEGE_ELNO [éq 4.5.2-1] et EPSI_ELGA [éq 4.5-2].

## 4.6 Modèles de comportement non linéaires utilisables

Les modèles supportés sont d'une part les relations de comportement 1D de type VMIS_ISOT_LINE, VMIS_CINE_LINE, VMIS_ISOT_TRAC, CORR_ACIER et PINTO_MENEGOTTO [R5.03.09] pour les aciers, d'autre part le modèle MAZARS_GC [R7.01.08] dédié au comportement uniaxial du béton en cyclique. On peut ainsi avoir plusieurs matériaux par élément de poutre multifibre.

Par ailleurs, si le comportement utilisé n'est pas disponible en 1D, on peut utiliser les autres lois 3D à l'aide de la méthode de R.De Borst [R5.03.09]). Par exemple, on peut traiter : GRAN_IRRA_LOG, VISC_IRRA_LOG. Cependant dans ce cas, on ne peut traiter qu'un seul matériau par élément de poutre multifibre.

**Remarque :**

*Les variables internes, constantes par fibre, sont stockées dans les sous-points attachés au point d'intégration considéré.*
*L'accès au post-traitement des grandeurs définies aux sous-points se fait via le format MED3.0, de Salomé.*



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Élément multipoutre

L'élément multipoutre est une généralisation de l'élément de poutre multifibre présenté à la section précédente. Cet élément consiste en un élément ayant une cinétique de poutre, mais où des lots de fibres sont regroupés en sous-poutres. Ces sous-poutres sont elles-mêmes multifibres, comme montré à la figure 5-a. Cet élément est seulement accessible dans le cadre de cinématique de poutres d'Euler.

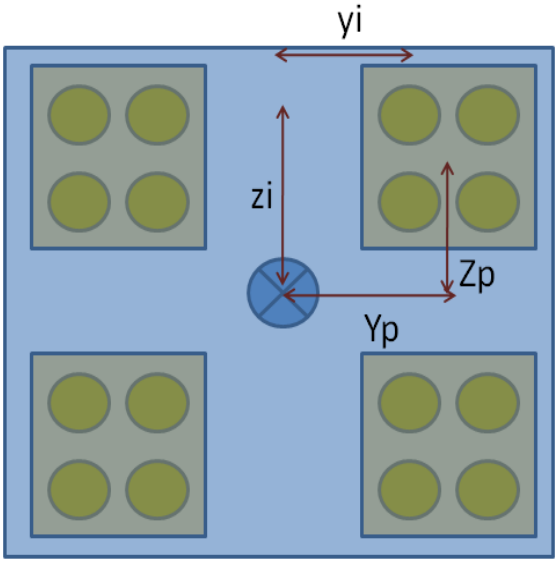



**Figure 5-a : Exemple d'une section multipoutre constituée de 4 sous-poutres décrites par une section rectangulaire. Dans l'exemple les sous-poutres sont constituées de 4 fibres.**

## 5.1 Élément multipoutre de référence

La cinématique de l'élément est la même que pour les poutres multifibres. Néanmoins, puisque les fibres sont assemblées sous forme de sous-poutres, un champ de déplacement local $(u_p, v_p, w_p)$ lié à la sous-poutre $p$ est calculé :

$$u_p(x,y,z) = u_0(x) - Y^p \theta_{sz}(x) + Z^p \theta_{sy}(x)$$
$$v_p(x,y,z) = v_0(x) - Z^p \theta_{sx}(x) + Y^p \theta_{sz}(x)$$
$$w_p(x,y,z) = w_0(x) + Y^p \theta_{sx}(x) - Z^p \theta_{sy}(x)$$

où le vecteur $(u_0, v_0, w_0)$ est le champ de déplacement au centre de la section de l'élément et les couples $(Y^p, Z^p)$ sont les positions des sous-poutres p dans la section de l'élément. Pour toutes les sous-poutres, on suppose que les rotations $\theta_{sx}$ , $\theta_{sy}$ et $\theta_{sz}$ sont constantes dans la section.

Le champ de déplacement local à la sous-poutre p est ensuite employé afin de déterminer un champ de déformation local pour chacune des sous-poutres p comme pour les poutres multifibres classiques.

## 5.2 Détermination des efforts internes de l'élément

Pour toutes les sous-poutres p, un champ des contraintes généralisées est déterminé de la même façon que pour les multifibres classiques. On a donc, pour une sous-poutre p, le champ d'efforts généralisés $\mathbf{F}_s^p$ .

De plus, comme pour les poutres multifibres classiques, la torsion des sous-poutres est considérée linéaire et calculée indépendamment

$$M_x^p = GJ_x^p \frac{\theta_{x2} - \theta_{x1}}{L} \qquad \text{[éq 5.2-1]}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'effort aux nœuds de l'élément associé à la sous-poutre $p$ se décrit également comme pour les poutres multifibres :

$$\mathbf{F}_i^p = \left( F_x^p, V_y^p, V_z^p, M_x^p, M_y^p, M_z^p \right)^T = \int_0^L \mathbf{B}^T . \mathbf{F}_s^p \, dx = j \sum_{i=1}^{2} w_i \mathbf{B}\left(x_i\right)^T . \mathbf{F}_s^p\left(x_i\right)$$

Les efforts dans les sous-poutres sont ensuite assemblés afin de décrire l'effort total dans l'élément. L'effort normal et les efforts tranchants sont obtenus en sommant les efforts individuels sur les $N_p$ sous-poutres :

$$\mathbf{F}_x = \sum_{p=1}^{N_p} F_x^p ; \quad \mathbf{V}_y = \sum_{p=1}^{N_p} V_y^p ; \quad \mathbf{V}_z = \sum_{p=1}^{N_p} V_z^p$$

Pour les moments, ceux-ci sont déterminés en fonction des moments individuels sur toutes les sous-poutres ainsi que de l'excentrement des sous-poutres par rapport à l'élément. Cet excentrement mène à un couplage entre la torsion et les cisaillements et également entre la flexion et les efforts normaux des différentes sous-poutres $p$ :

$$\mathbf{M}_x = \sum_{p=1}^{N_p} M_x^p + \sum_{p=1}^{N_p} V_z^p Y^p - \sum_{p=1}^{N_p} V_y^p Z^p ; \quad \mathbf{M}_y = \sum_{p=1}^{N_p} M_y^p + \sum_{p=1}^{N_p} F_x^p Z^p ; \quad \mathbf{M}_z = \sum_{p=1}^{N_p} M_z^p - \sum_{p=1}^{N_p} F_x^p Y^p$$

## 5.3 Détermination de la matrice de masse de l'élément multifibre et formulation enrichie en déformation

Le calcul se fait exactement comme pour les poutres multifibres.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Cas d'application

On pourra utilement consulter les cas tests suivants :

- ssll111a : Réponse statique d'une poutre en béton armé (section en T) à comportement linéaire thermoélastique, [V3.01.111].
- ssls143a : Poutre cantilever à âme excentrée, [V3.03.143].
- sdll130b : Réponse sismique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement linéaire, [V2.02.130].
- sdll132a : Modes propres d'une charpente en poutres multifibres ; [V2.02.132].
- sdll150a : modes propres d'une poutre à âme excentrée, [V2.02.150].
- ssnl119a, ssnl119b : Réponse statique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire, [V6.02.119].
- sdnl130a : Réponse sismique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire, [V5.02.130].
- ssll102j : Poutre encastrée soumise à des efforts unitaires, [V3.01.102].
- ssnl106g, ssnl106h : Poutre élastoplastique en traction et flexion pure, [V6.02.106].
- ssnl122a : Poutre cantilever multifibres soumise à un effort [V6.02.122].
- ssnl504a : Faisceau de poutres multifibres [V6.02.504].
- ssnl123a : Flambement d'une poutre multifibres [V6.02.123].

# 7 Bibliographie

[1] J.L. BATOZ, G. DHATT : Modélisation des structures par éléments finis - HERMES.

[2] J. GUEDES, P. PEGON & A. PINTO : A fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000 – Ispra, 1994.

[3] P. KOTRONIS : Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D – Thèse de Doctorat de l'ENS Cachan – 2000.

[4] J.M. PROIX, P. MIALON, M.T. BOURDEIX : Éléments "exacts" de poutres (droites et courbes), Documentation de Référence du *Code_Aster* [R3.08.01].

[5] O.C ZIENKIEWICZ et R.L TAYLOR. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 5th ed. Zienkiewicz et Taylor – 2000.

[6] A. IBRAHIMBEGOVIC and E. L. WILSON. A modified method of incompatible modes. Commum. Numer. Methods Eng., 7:187–194 – 1991.

[7] [U4.26.01] Opérateur DEFI_GEOM_FIBRE.

[8] [R7.01.12] Modélisation de la thermo-hydratation, du séchage et du retrait du béton. G.Debruyne, mai 2005.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 8 Description des versions du document

| Indice document | Version Aster | Auteur(s) Organisme(s) | Description des modifications |
|---|---|---|---|
| A | 6.4 | **S.Moulin** (EDF-R&D/AMA), L.Davenne (ENSC/LMT), | Version initiale |
| B | 9.5 | L.Davenne (ENSC/LMT), F.Voldoire (EDF-R&D/AMA) | Enrichissement de la déformation axiale par fonction bulle et condensation statique en non linéaire, prise en compte de la torsion en linéaire, adaptation à la nouvelle structure de données GROUP_FIBRE, cf. fiche REX 9141. Liste des cas d'applications. |
| C | 10 | F.Voldoire (EDF-R&D/AMA) | Corrections de mise en forme Openoffice. |
| D | 12 | J-L.Fléjou | Ajout Modes incompatibles |
| E | | D. Geoffroy | Ajout de la formulation multipoutre |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)