Éléments MEMBRANE et GRILLE_MEMBRANE

Résumé :

Ce document décrit la formulation et l'implantation dans *Code_Aster* des éléments MEMBRANE et GRILLE_MEMBRANE. Les éléments MEMBRANE permettent de modéliser un comportement linéaire de membrane quelconque ou un comportement non linéaire de membranes isotropes. Les éléments GRILLE_MEMBRANE sont des éléments finis plus spécifiquement dédiés à la représentation d'armatures d'acier dans un massif (pour des applications de Génie Civil type béton armé). Les principales caractéristiques de ces éléments sont les suivantes :

- éléments de membrane, sans rigidité de torsion ;
- pas de degrés de liberté de rotation, mais en contrepartie pas de possibilité d'excentrement ;
- support géométrique surfacique (triangle, quadrangle ; linéaire ou quadratique, et biquadratique seulement pour les MEMBRANE) ;

Les éléments GRILLE_MEMBRANE permettent de modéliser un comportement non-linéaire des barres d'armature.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

La modélisation MEMBRANE permet de représenter le comportement mécanique d'une membrane éventuellement anisotrope en linéaire et uniquement isotrope en non linéaire. Elle permet de modéliser des éléments de structure dont la rigidité de flexion est négligeable.

Les éléments GRILLE_MEMBRANE permettent de représenter le comportement éventuellement non-linéaire de barres d'armature dans une structure en béton armé. La principale contrainte est que les barres d'armature doivent être périodiquement réparties sur une surface, et orientées toutes dans la même direction. Précisons cependant que des barres d'armatures croisées peuvent être modélisées par superposition de deux modélisations GRILLE_MEMBRANE (voir plus loin).

Les éléments de type GRILLE_MEMBRANE viennent compléter les possibilités de modélisation d'armature dans *Code_Aster*, en complément de la modélisation GRILLE_EXCENTRE. On présente ci-dessous les différences entre les modélisations GRILLE_MEMBRANE et GRILLE_EXCENTRE.

On rappelle que la modélisation GRILLE_EXCENTRE est basée sur une cinématique de coque DKT avec une seule couche dans l'épaisseur [R3.07.03]. Ce soubassement DKT implique la présence de degrés de liberté de rotation aux nœuds des éléments GRILLE_EXCENTRE: s'il permet la notion d'excentrement, il est inutile lorsque l'on n'a pas besoin d'excentrement (dans ce cas il alourdit le modèle de façon inutile, car non seulement les degrés de libertés de rotation allongent le vecteur d'inconnues, mais il faut de plus bloquer un nombre non négligeable de ces degrés de libertés par double multiplicateur de Lagrange). La modélisation GRILLE_MEMBRANE est une modélisation basée sur une cinématique « surfacique », elle ne nécessite pas d'autres degrés de liberté que les déplacements habituels (en revanche, bien évidemment, cette modélisation ne permet pas d'utiliser la notion d'excentrement).

La modélisation GRILLE_EXCENTRE, basée sur DKT, nécessite des éléments géométriques de support de type triangle ou quadrangle linéaire ; la modélisation GRILLE_MEMBRANE est développée à partir des supports géométriques surfacique triangle ou quadrangle, linéaire ou quadratique.

Pour les deux types de modélisation, en revanche, seule une direction d'armature est disponible par éléments finis. Cela permet de modéliser tout type d'armature à plusieurs directions, en superposant un élément par direction ; le coût de calcul engendré par ces duplications est faible : pas de duplication des degrés de libertés (donc coût d'inversion de matrice constant), duplication des calculs élémentaires (mais ils restent simples, en nombre réduit en 3D – éléments de surfaces contre éléments de volume – et les calculs élémentaires pour des structures à grands nombres de degrés de liberté sont de coût faible comparé au coût d'inversion).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Formulation linéaire des éléments de MEMBRANE

Pour un élément de membrane, l'énergie de déformation peut se mettre sous la forme :

$$\Phi = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, ds \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte membranaire et $\boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation membranaire.

La seule difficulté est d'obtenir une expression du type $\boldsymbol{\varepsilon} = BU$ où l'on note U les valeurs nodales du déplacement.

Pour cela, il faut utiliser un peu de géométrie différentielle. En notant a la base naturelle (non orthogonale, seul le troisième vecteur, normal à la surface, est normé) du plan de l'armature et g la métrique contravariante associée à cette base (cf. [R3.07.04].pour plus de détails). On part de l'expression de la dérivée contravariante :

$$\nabla u = \frac{\partial u^i}{\partial \xi_j} = u^i|_j \, a_i \otimes a^j \tag{2}$$

avec $\{\xi_j\}$ un paramétrage admissible de la surface et $a_i = \frac{\partial x}{\partial \xi_i}$. En utilisant le tenseur métrique g , on a alors :

$$\nabla u = \frac{\partial u^i}{\partial \xi_j} = u^i|_j \, g^{jk} a_i \otimes a_k \tag{3}$$

On définit alors la direction d'armature par le vecteur normé e_1 que l'on complète, pour la facilité de l'exposé en une base orthonormée $\{e_i\}$. On appelle R l'opérateur de passage entre cette base et la base naturelle tel que :

$$a_i = R_i^p e_p \tag{4}$$

On note en grec les indices ne prenant que les valeurs dans $(1,2)$, et on obtient :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (\nabla u)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^j} \cdot a^i\right) R_i^\alpha R_k^\beta g^{jk} \tag{5}$$

Par définition de R : $R_3^1 = 0$ et par définition de g : $g^{13} = g^{23} = 0$. On obtient donc :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (\nabla u)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^\delta} \cdot a^\gamma\right) R_\gamma^\alpha R_\theta^\beta g^{\delta\theta} \tag{6}$$

Si l'on note maintenant $\hat{B}$ la dérivée des fonctions de forme au point de Gauss envisagé, il vient :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = R_\gamma^\alpha R_\theta^\beta g^{\delta\theta} \hat{B}_{\delta,n} (a^\gamma)_i U_{i,n} \tag{7}$$

Avec n , l'indice du nœud. D'où le B cherché :

$$B_{i,n} = R_\gamma^\alpha R_\theta^\beta g^{\delta\theta} \hat{B}_{\delta,n} (a^\gamma)_i \tag{8}$$

A partir de B , on a alors toutes les expressions classiques de la déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = BU \tag{9}$$

des forces nodales :

$$F = \int B^T \sigma \tag{10}$$

et de la matrice tangente :

$$K = \int B^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} B \tag{11}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Formulation non linéaire des éléments de MEMBRANE

Toute la partie théorique ainsi que le développement de l'élément fini de membrane sont fondés sur le travail de Anh LE VAN, publié dans son ouvrage *Coques et membranes, Fondements de l'approche non linéaire* [1] .
Dans ce document, nous respecterons les conventions suivantes, sauf contre-indication :

- les lettre latines $\in \{1,2,3\}$
- les lettres grecques $\in \{1,2\}$
- on utilise la convention de sommation d'Einstein
- on écrit en majuscule les composants se référant à la configuration initiale
- on écrit en minuscule les composants se référant à la configuration déformée
- on écrit en gras les tenseurs d'ordre supérieur ou égal à 1
- on mettra un indice 0 pour signifier que l'on se trouve sur la configuration initiale
- les accolades $\{\square\}$ désignent un vecteur colonne
- les crochets $\langle\square\rangle$ désignent un vecteur ligne
- les crochets droits $[\square]$ désignent une matrice ayant plus d'une ligne et plus d'une colonne

L'étude des membranes repose sur beaucoup d'éléments de géométrie différentielle, nous allons donc en exposer les principes les plus importants dans le cadre de notre étude. La géométrie différentielle fait référence à l'application du calcul différentiel à la géométrie, elle intervient notamment dans les problèmes faisant intervenir la notion de courbure. Elle nous sera utile pour tenir compte de la géométrie courbée des membranes.

3.1 Géométrie différentielle

On travaille dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathcal{E}$ muni du produit scalaire usuel $(a,b)\mapsto a.b$, de la norme euclidienne $\|.\|$ et d'un repère global orthonormé $(O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})$.

Le premier élément à expliciter est la base locale (ou base naturelle covariante), cette base n'est a priori ni orthogonale ni normée. Soit une surface $\mathbf{S_0}$, $\mathbf{P_0}$ un point appartenant à cette surface et (ξ^1,ξ^2) un système de coordonnées de cette surface. On définit la base naturelle covariante $(\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\mathbf{A_3})$ par (en notant $\times$ le produit vectoriel) :

$$\mathbf{A_\alpha}=\frac{\partial \mathbf{P_0}}{\partial \xi^\alpha} \quad ; \quad \mathbf{N}\equiv\mathbf{A_3}\equiv\frac{\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}}{\|\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}\|} \tag{12}$$

On écrira alors dans la configuration déformée, en notant $\mathbf{S}$ la surface et $\mathbf{P}$ la position du point $\mathbf{P_0}$ après déformation :

$$\mathbf{a_\alpha}=\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi^\alpha} \quad ; \quad \mathbf{N}\equiv\mathbf{a_3}\equiv\frac{\mathbf{a_1}\times\mathbf{a_2}}{\|\mathbf{a_1}\times\mathbf{a_2}\|} \tag{13}$$

On peut maintenant définir la première forme fondamentale :

$$A_{\alpha\beta}\equiv\mathbf{A_\alpha}.\mathbf{A_\beta} \tag{14}$$

on peut alors construire la matrice :

$$[A..]\equiv\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \tag{15}$$

cette matrice est symétrique et inversible (car $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$ sont libres). On note son inverse :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$[A^{..}] \equiv [A_{..}]^{-1} \equiv \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

on définit alors la base duale $(\mathbf{A^1}, \mathbf{A^2})$ de la base $(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2})$ par :

$$\mathbf{A^\alpha} \equiv A^{\alpha\beta} \mathbf{A_\beta} \quad (17)$$

Cela permet de définir le tenseur métrique :

$$\mathbf{A} \equiv A_{\alpha\beta} \mathbf{A^\alpha} \otimes \mathbf{A^\beta} \quad (18)$$

En théorie des coques ou des membranes, c'est le tenseur $\mathbf{A}$ qui interviendra à la place du tenseur identité I en 3D.

On écrira : $\|\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}\| = \sqrt{A}$ où $A \equiv det(A_{..})$, on appelle A le jacobien de la transformation.

Finalement, on définit le tenseur de courbure :

$$\mathbf{B} = B_{\alpha\beta} \mathbf{A^\alpha} \otimes \mathbf{A^\beta} = (\mathbf{N_{,\alpha}} . \mathbf{A_\beta}) . \mathbf{A^\alpha} \otimes \mathbf{A^\beta} \quad (19)$$

$\mathbf{B}$ est par définition symétrique, comme son nom l'indique il sert à mesurer la courbure d'une surface en un point.

3.2 Hypothèses

Pour parvenir aux équations caractérisant le comportement des membranes il est nécessaire de faire plusieurs hypothèses. Le but ici n'est pas de redémontrer comment on parvient à ces hypothèses, nous allons donc les donner directement sans entrer dans les détails, ceux-ci sont présents dans [1] .

Les hypothèses sont :

- Les déplacements de la membrane sont représentés par les déplacements de la surface moyenne.
- On utilise l'hypothèse cinématique de Cosserat :
  - Tout point défini le long d'une fibre reste après déformation le long de cette même fibre.
  - Il n'y pas de changement de forme de la fibre dans l'épaisseur.
- L'épaisseur H de la membrane est très faible, mathématiquement cela se traduit par les conditions $H|tr\,B| \ll 1$ et $H^2(\det B) \ll 1$.
- On considère un état de contrainte plane $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & 0 \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- La masse volumique est constante dans l'épaisseur.
- Les contraintes sont constantes dans l'épaisseur.
- Le moment de flexion d'ordre 2 est négligé.

3.3 Équations régissant le mouvement des membranes

3.3.1 Principe des puissances virtuelles

L'outil utilisé pour la mise en équation des membranes est le principe des puissances virtuelles (PPV), dont l'expression en variables lagrangiennes s'écrit : $\forall\ t$, $\forall$ champ de vitesses virtuelles U^* ,

$$-\int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi^T} : \mathbf{grad_{Q_0}} \mathbf{U^*}\, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 . \mathbf{f} . \mathbf{U^*}\, d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} . \mathbf{U^*}\, dA_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 . \ddot{\mathbf{U}} . \mathbf{U^*}\, d\Omega_0 \quad (20)$$

Avec :

- $\mathbf{\Pi}$: le tenseur de Piola-Kirchhoff I
- $\mathbf{T} = \mathbf{\Pi} . \mathbf{n}$: le vecteur de contrainte nominale (sur le bord)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- ρ_0 : la masse volumique à l'état de référence
- $\mathbf{f}$: les forces massiques

On note les dérivées temporelles avec la notation « $\dot{}$ ». Ω_0 représente le volume initial et on notera S_0 la surface moyenne initiale. La frontière $\partial\Omega_0$ comprend les faces supérieure et inférieure et le bord de la membrane. On notera H l'épaisseur.

On reconnait dans le PPV les expressions suivantes :

- La puissance virtuelle des quantités d'accélération

$$P^*\left(\rho_0 \ddot{\mathbf{U}}\right) = \int_{\Omega_0} \rho_0 . \ddot{\mathbf{U}} . \mathbf{U}^* \, d\Omega_0 \tag{21}$$

en utilisant les hypothèses de petite épaisseur et de masse volumique constante dans l'épaisseur, on obtient :

$$P^*\left(\rho_0 \ddot{\mathbf{U}}\right) = \int_{S_0} \rho_0 H . \ddot{\mathbf{U}} . \mathbf{U}^* \, dS_0 \tag{22}$$

- La puissance virtuelle des efforts internes

$$P^*_{int} = -\int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi}^{\mathbf{T}} : \mathbf{grad}_{\mathbf{Q_0}} \mathbf{U}^* \, d\Omega_0 \tag{23}$$

pour écrire les contraintes plus simplement on va utiliser le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II, $\Sigma = \Sigma^{ij} A_i \otimes A_j$. Comme les composantes de s contraintes de Cauchy $\sigma^{\alpha\beta}$ sont constantes dans l'épaisseur et que l'épaisseur H est très faible on peut affirmer que les composantes de contraintes de Piola-Kirchhoff II $\Sigma^{\alpha\beta}$ sont aussi constantes dans l'épaisseur. En supposant de plus un état de contrainte plane on arrive à :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} & 0 \\ \Sigma^{21} & \Sigma^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Grâce à ces trois hypothèses on peut déduire que :

$$P^*_{int} = -\int_{S_0} N^{\alpha\beta} \mathbf{a_\alpha} . \mathbf{U}^*_{,\beta} \, dS_0 \quad \text{avec} \quad N^{\alpha\beta} = H \Sigma^{\alpha\beta} \tag{25}$$

- La puissance virtuelle des efforts externes

$$P^*_{ext} = \int_{\Omega_0} \rho_0 . \mathbf{f} . \mathbf{U}^* \, d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} . \mathbf{U}^* \, dA_0 \tag{26}$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$P^*_{ext} = \int_{S_0} p . \mathbf{U}^* \, dS_0 + \int_{S_0} \mathbf{c} . \mathbf{a_3^*} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \left(\mathbf{F} . \mathbf{U}^* + \mathbf{C} . \mathbf{a_3^*}\right) ds_0 \tag{27}$$

où $\mathbf{p}$ (resp. $\boldsymbol{F}$) est la force surfacique sur S_0 (resp. linéique sur le bord ∂S_0) et $\mathbf{c}$ (resp. $\mathbf{C}$) est le couple surfacique sur S_0 (resp. linéique sur le bord ∂S_0). On décompose $\mathbf{p}$ et $\mathbf{F}$ dans la base naturelle actuelle : $p \equiv p^\alpha a_\alpha + p^3 a_3$ et $F \equiv F^\alpha a_\alpha + F^3 a_3$.

On peut finalement écrire le PPV sous la forme : $\forall\ t$, $\forall\ U^*$, $\forall\ a_{3^*}$

$$-\int_{S_0} N^{\alpha\beta} \mathbf{a_\alpha} . \mathbf{U}^*_{,\beta} dS_0 + \int_{S_0} \mathbf{p} . \mathbf{U}^* dS_0 + \int_{S_0} \mathbf{c} . \mathbf{a_3^*} dS_0 + \int_{\partial S_0} \left(\mathbf{F} . \mathbf{U}^* + \mathbf{C} . \mathbf{a_3^*}\right) ds_0 = \int_{S_0} \rho_0 H . \ddot{\mathbf{U}} . \mathbf{U}^* dS_0 \tag{28}$$

3.3.2 Équation locale du mouvement et conditions aux limites

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut maintenant exploiter le PPV pour obtenir les équations locales de la dynamique des membranes et les conditions aux limites sthéniques. Ces équations ne seront pas utilisées pour coder l'élément fini mais les conditions aux limites sthéniques sont nécessaires pour comprendre le comportement des membranes.

La première chose à faire est d'effectuer des intégrations par parties à l'aide du théorème de divergence afin d'éliminer les dérivées $U^*_{,\beta}$ et de faire apparaître U^* . On obtient :

$$\int_{S_0} \frac{1}{\sqrt{A}} \left(N^{\alpha\beta} \mathbf{a_\alpha} \sqrt{A} \right)_{,\beta} \mathbf{U^*} \, dS_0 - \int_{\partial S_0} N^{\alpha\beta} \mathbf{a_\alpha} . \mathbf{U^*} \upsilon_0 . A_\beta ds_0 + \int_{S_0} \mathbf{p} . \mathbf{U^*} \, dS_0 + \int_{S_0} \mathbf{c} . \mathbf{a_3^*} \, dS_0 + \int_{\partial S_0} \left(\mathbf{F} . \mathbf{U^*} + \mathbf{C} . \mathbf{a_3^*} \right) ds_0 = \int_{S_0} \rho_0 H . \ddot{\mathbf{U}} . \mathbf{U^*} \, dS_0 \quad (29)$$

Avec υ_0 la normale unitaire extérieure à ∂S_0 et située dans le plan tangent à S_0 .

En utilisant le fait que les champs virtuels $\mathbf{U^*}$ et $\mathbf{a_3}^*$ sont indépendants et arbitraires on obtient :

- Conditions nécessaires sur le chargement externe :
  - Le couple surfacique doit être nul : $\mathbf{c=0}$.
  - La force linéique sur le bord de la membrane ne doit pas avoir de composante transverse suivant $\mathbf{a_3}$: $F^3=0$.
  - Le couple linéique sur le bord doit être nul : $\mathbf{C=0}$.
- Equation locale de la dynamique : $\forall t$, $\forall \mathbf{P_0} \in S_0$

$$\mathbf{a_{\alpha,\beta}} N^{\alpha\beta} + \mathbf{a_\alpha} \frac{1}{\sqrt{A}} \left(N^{\alpha\beta} \sqrt{A} \right)_{,\beta} + \mathbf{p} = \rho_0 H \ddot{\mathbf{U}} \quad (30)$$

- Condition aux limites : $\forall t$, $\forall \mathbf{P_0} \in \partial S_0$

$$\mathbf{a_\alpha} N^{\alpha\beta} \upsilon_0 \mathbf{A_\alpha} = \mathbf{F} \iff \left\{ \begin{matrix} F^\alpha = N^{\alpha\beta} \left(\upsilon_0 \mathbf{A_\beta} \right) \\ F^3 = 0 \end{matrix} \right\} \quad (31)$$

On remarque que les conditions nécessaires sur le chargement externe portent sur la nullité de certains termes. Cela pouvait être intuité sachant qu'une membrane n'a pas de rigidité en flexion. En effet, appliquer un couple à une membrane entraînerait un mouvement de corps rigide. D'ailleurs, une pression appliquée sur une membrane plane va aussi entraîner un mouvement de corps rigide tant que cette dernière n'est pas déformée et n'a pas acquis une rigidité dite « géométrique ». Pour remédier à ce problème, il faudra créer une rigidité « géométrique » artificielle au début du calcul en imposant une précontrainte que l'on pourra enlever par la suite.

3.3.3 Lois de comportements

Pour lier les contraintes du matériau à ses déplacements, il est nécessaire d'utiliser des lois de comportement. Dans le cas des membranes on utilise des lois de comportement dites « hyperélastiques ».

Nous allons nous contenter de deux lois de comportement hyperélastiques parmi toutes celles qui existent : la loi de Saint Venant-Kirchhoff et la loi néo-Hookéenne. Nous les caractériserons par leur énergie de déformation volumique *w* fonction du tenseur de déformation de Green-Lagrange $\mathbf{E}$ (tel que $\mathbf{E}=E_{ij} A^i \otimes A^j$ avec $E_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}-A_{ij})$) ou du tenseur de dilation $\mathbf{C}$ (tel que $\mathbf{C}=C_{ij} \mathbf{A^i} \otimes \mathbf{A^j}$ avec $C_{ij}=a_{ij}$).

Le contrainte de Piola-Kirchhoff II, $\mathbf{\Sigma}$, est alors reliée à $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{C}$ par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Sigma = \mathrm{Sym}\frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} = 2\,\mathrm{Sym}\frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \tag{32}$$

avec

$$\mathrm{Sym}\frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} + \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}\right)^{T}\right) \tag{33}$$

3.3.3.1 Loi de Saint Venant-Kirchhoff

Le matériau hyperélastique standard est caractérisé par la loi de Saint Venant-Kirchhoff. Son énergie de déformation volumique s'exprime par :

$$w(\mathrm{E}) = \mathbf{\Sigma_0} : \mathbf{E} + \frac{1}{2}\,\mathbf{E} : \mathbf{D} : \mathbf{E} \tag{34}$$

avec $\boldsymbol{D}$ un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'élasticité.

3.3.3.2 Loi Néo-Hookéenne

La loi néo-Hookéenne est une autre loi de comportement hyperélastique classique, elle est notamment utilisée pour l'étude de matériaux incompressibles. Cette loi donne de meilleurs résultats lorsque le corps subit de grandes déformations. Son énergie de déformation volumique s'exprime par :

$$w(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2}(\mathrm{tr}\,\mathbf{C} - 3) - \mu\,.\ln \mathbf{J} + \frac{\lambda}{2}(\ln \mathbf{J})^2 \tag{35}$$

μ et λ sont les coefficients de Lamé, ils sont définis par :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{36}$$

avec E (resp. ν) le module d'Young (resp. le coefficient de poisson).

3.4 Discrétisation éléments finis

On a présenté dans les paragraphes précédents les équations servant à la résolution du comportement des membranes. On les reformule afin de pouvoir les coder dans code_aster.

3.4.1 Interpolation de la géométrie

On notera indifféremment $\mathbf{P_0}$ ou $\mathbf{X}$ la position initiale d'une particule courante située sur la surface moyenne initiale S_0 . Les coordonnées du point $\mathbf{X}$ dans un repère orthonormé fixe $(\mathbf{O}\ ;\ \mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_3})$ sont notées $(X_1,\ X_2,\ X_3)$.

L'élément de référence d'un élément fini *e* de la surface S_0 est noté e_ξ . Les coordonnées de l'élément de référence sont notées ($\xi^1,\ \xi^2$) . La géométrie de l'élément e est représentée par l'interpolation :

$$\begin{array}{c} e_\xi \quad \rightarrow e \\ (\xi^1,\ \xi^2) \mapsto \mathbf{X} \equiv \mathbf{P_0} \quad \text{avec} \quad \forall i \in (1,2,3), \quad X_i = \langle N(\xi^1,\ \xi^2)\rangle \{X_i\}^e \end{array} \tag{37}$$

où

- Le vecteur ligne $\langle N\rangle$ est la fonction d'interpolation géométrique de l'élément e : $\langle N\rangle = \langle N_1, N_2, \ldots, N_{nne}\rangle$ avec nne le nombre de nœuds de l'élément.
- Le vecteur colonne $\{X_i\}^e$ contient les nne coordonnées X_i des nœuds de l'élément e .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En un point $\mathbf{X}\equiv\mathbf{P_0}$ de l'élément e , les vecteurs $\mathbf{A_\alpha}=\frac{\partial \mathbf{P_0}}{\partial \xi^\alpha}$ de la base naturelle sont calculés par

$$\forall \alpha\in(1,2),\ \forall i\in(1,2,3),\ (\mathbf{A_\alpha})_i=\langle N_{,\alpha}\rangle\{X_i\}^e \tag{38}$$

L'élément d'aire dS_0 est défini par $dS_0=\left\|\frac{\partial X}{\partial \xi^1}\times\frac{\partial X}{\partial \xi^2}\right\|d\xi^1 d\xi^2=\|\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}\|d\xi^1 d\xi^2$

Le raisonnement est strictement identique pour les vecteurs de bord, on change juste la notation. La géométrie de l'élément e' est représentée par l'interpolation :

$$\begin{array}{ccc} e'_\xi & \rightarrow & e' \\ \xi & \mapsto & X \end{array} \quad \text{avec } \forall i\in(1,2,3),\ X_i=\langle N'(\xi)\rangle\{X_i\}^{e'} \tag{39}$$

3.4.2 Interpolation du champ de déplacement

On décompose le vecteur déplacement $U=U(\xi^1,\ \xi^2, t)$ de la surface moyenne dans la base orthonormée fixe $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_3})$:

$$\mathbf{U}=U^i\mathbf{e_i} \tag{40}$$

Puisque la base $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_3})$ est orthonormée, les composantes covariantes et contravariantes dans cette base sont confondues. Par conséquent, la position haute ou basse des indices i dans la relation précédente est sans importance.

On travaille avec les éléments finis isoparamétriques, d ans un élément fini e de la surface S_0 , chaque composante U^i du déplacement est donc interpolée par :

$$\forall i\in(1,2,3),\quad U_i=\langle N(\xi^1,\ \xi^2)\rangle\{U_i(t)\}^e=N_a U_a^{ie}\quad(\text{sommation sur } a\in[1,nne]) \tag{41}$$

où

- Les fonctions d'interpolation N_a sont les mêmes que précédemment
- Le vecteur colonne $\{U_i\}^e$ contient les nne composantes de déplacement $U_i(t)$ des nœuds de l'élément e .

On écrit :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \left[N_1 N_1 N_1 \middle| N_2 N_2 N_2 \middle| \cdots \right] \begin{Bmatrix} U^1 \\ (U^2)^1 \\ U^3 \\ U^1 \\ (U^2)^2 \\ U^3 \\ \vdots \end{Bmatrix}^e \tag{42}$$

Ce qu'on abrège en :

$$\{\vec{U}\}=[N]\{\mathbf{U}\}^e \tag{43}$$

3.4.3 Interpolation et discrétisation du champ de déplacement

On décompose le tenseur gradient du champ de déplacement dans la base $\mathbf{A_i}\otimes\mathbf{A_j}$:

$$\mathbf{H}\equiv \text{grad}_{Q_0}\mathbf{U}(\mathbf{Q_0}, t)_{|Q_0=P_0}=H_{ij}\mathbf{A^i}\otimes\mathbf{A^j} \tag{44}$$

Seules les composantes $H_{i\beta}$ nous intéressent, on réécrit ce tenseur sous forme de vecteur colonne :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left(\widetilde{\mathbf{H}}\right)\equiv\begin{Bmatrix}\mathrm{H}_1\\ \mathrm{H}_2\\ \mathrm{H}_3\\ \mathrm{H}_4\\ \mathrm{H}_5\\ \mathrm{H}_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathrm{H}_{11}\\ \mathrm{H}_{21}\\ \mathrm{H}_{31}\\ \mathrm{H}_{12}\\ \mathrm{H}_{22}\\ \mathrm{H}_{32}\end{Bmatrix} \tag{45}$$

On a alors la relation :

$$\left[\widetilde{\mathbf{H}}\right]=\left[\mathrm{G}\right]\left[\mathbf{U}\right]^{\mathrm{e}} \tag{46}$$

avec $\left[G\right]$ une matrice de dimension $6\,x\,3\,nne$ telle que :

$$\left[\mathrm{G}\right]\equiv\begin{bmatrix}\mathrm{N}_{1,1}\begin{bmatrix}(\mathbf{A_1})_1 & (\mathbf{A_1})_2 & (\mathbf{A_1})_3\\ (\mathbf{A_2})_1 & (\mathbf{A_2})_2 & (\mathbf{A_2})_3\\ (\mathbf{A_3})_1 & (\mathbf{A_3})_2 & (\mathbf{A_3})_3\end{bmatrix} & \mathrm{N}_{2,1}\begin{bmatrix}(\mathbf{A_1})_1 & (\mathbf{A_1})_2 & (\mathbf{A_1})_3\\ (\mathbf{A_2})_1 & (\mathbf{A_2})_2 & (\mathbf{A_2})_3\\ (\mathbf{A_3})_1 & (\mathbf{A_3})_2 & (\mathbf{A_3})_3\end{bmatrix} & \cdots\\ \mathrm{N}_{1,2}\begin{bmatrix}(\mathbf{A_1})_1 & (\mathbf{A_1})_2 & (\mathbf{A_1})_3\\ (\mathbf{A_2})_1 & (\mathbf{A_2})_2 & (\mathbf{A_2})_3\\ (\mathbf{A_3})_1 & (\mathbf{A_3})_2 & (\mathbf{A_3})_3\end{bmatrix} & \cdots & \cdots\end{bmatrix} \tag{47}$$

Les champs virtuels, indiqués par « * », seront discrétisés de manière identique.

3.4.4 Discrétisation du principe des puissances virtuelles

Maintenant que l'on dispose de nos fonctions d'interpolation, on peut écrire le principe des puissances virtuelles sous forme matricielle :

- Puissance virtuelle des quantités d'accélération :

$$\mathrm{P}^{*}\left(\rho_0\,\ddot{\mathbf{U}}\right)=\int_{\mathrm{S}_0}\rho_0\,\mathrm{H}.\ddot{\mathbf{U}}.\mathbf{U}^{*}\,\mathrm{d}\,\mathrm{S}_0=\sum_{\mathrm{e}}\left\langle\mathbf{U}^{*}\right\rangle^{\mathrm{e}}\left[\mathbf{M}\right]^{\mathrm{e}}\left[\ddot{\mathbf{U}}\right]^{\mathrm{e}} \tag{48}$$

avec $\left[\mathbf{M}\right]$ la matrice masse élémentaire :

$$\left[\mathbf{M}\right]^{\mathrm{e}}\equiv\int_{\mathrm{e}}\rho_0\left[N\right]^{\mathrm{T}}\left[N\right]\mathrm{H}\,\mathrm{dS}_0 \tag{49}$$

- Puissance virtuelle des efforts internes :

$$\mathrm{P}^{*}_{\mathrm{int}}=-\int_{\Omega_0}\boldsymbol{\Pi}^{T}:\mathbf{grad}_{\mathbf{Q}_0}\mathbf{U}^{*}\,\mathrm{d}\,\Omega_0=-\sum_{\mathrm{e}}\left\langle\mathbf{U}^{*}\right\rangle^{\mathrm{e}}\left\{\boldsymbol{\Psi}\right\}^{\mathrm{e}} \tag{50}$$

avec :

$$\left\{\boldsymbol{\Psi}\right\}^{\mathrm{e}}\equiv\int_{\mathrm{e}}\left[\mathrm{G}\right]^{\mathrm{T}}\left\{\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}\right\}\mathrm{H}\,\mathrm{dS}_0 \tag{51}$$

De la même manière que précédemment, seules les composantes $\Pi^{i\beta}$ nous intéressent :

$$\left\{\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}\right\}\equiv\begin{Bmatrix}\Pi_1\\ \Pi_2\\ \Pi_3\\ \Pi_4\\ \Pi_5\\ \Pi_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Pi^{11}\\ \Pi^{21}\\ \Pi^{31}\\ \Pi^{21}\\ \Pi^{22}\\ \Pi^{32}\end{Bmatrix} \tag{52}$$

R emarque : a u lieu d'utiliser $\left\{\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}\right\}$, on exprimera par la suite $\left\{\boldsymbol{\Psi}\right\}^{\mathrm{e}}$ en fonction de Piola Kirchhoff II $\left(\boldsymbol{\Sigma}\right)$ afin de pouvoir utiliser les lois de comportement du paragraphe 3.3.3 .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Puissance virtuelle des efforts externes :

$$P^*_{ext}=\int_{S_0} p.\mathbf{U}^* dS_0+\int_{\partial S_0} \mathbf{F}.\mathbf{U}^* ds_0=\sum_e \langle \mathbf{U}^* \rangle^e \{\mathbf{\Phi}\}^e+\sum_{e'} \langle \mathbf{U}^* \rangle^{e'} \{\mathbf{\Phi}'\}^{e'} \quad (53)$$

avec

$$\{\mathbf{\Phi}\}^e \equiv \int_e [N]^T \{\mathbf{p}\} dS_0 \quad \text{et} \quad \{\mathbf{\Phi}'\}^{e'} \equiv \int_{e'} [N]^T \{\mathbf{F}\} ds_0 \quad (54)$$

On note $\{\mathbf{p}\}$ (resp. $\{\mathbf{F}\}$) le vecteur contenant les trois composantes du vecteur force surfacique $\mathbf{p}$ (resp. force linéique $\mathbf{F}$) dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

3.4.5 Linéarisation et expression de la matrice raideur tangente

Dans le schéma de Newton-Raphson, le problème va être de calculer le terme $\frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}}$, que l'on appelle matrice raideur tangente, de dimension $3nnx3nn$ avec nn le nombre de nœuds total de l'élément . On appelle $\{R\}=\{\mathbf{\Phi}\}-\{\mathbf{\Psi}\}$ le résidu. On écrit :

$$[\mathbf{K}] \equiv \frac{\partial \{\mathbf{R}\}}{\partial \{\mathbf{U}\}} = \frac{\partial \{\mathbf{\Psi}\}}{\partial \{\mathbf{U}\}} - \frac{\partial \{\mathbf{\Phi}\}}{\partial \{\mathbf{U}\}} \equiv [\mathbf{K}_\mathbf{\Psi}] + [\mathbf{K}_\mathbf{\Phi}] \quad (55)$$

On a au niveau élémentaire :

$$[\mathbf{K}]^e \equiv \frac{\partial \{\mathbf{\Psi}\}^e}{\partial \{\mathbf{U}\}^e} - \frac{\partial \{\mathbf{\Phi}\}^e}{\partial \{\mathbf{U}\}^e} \equiv [\mathbf{K}_\mathbf{\Psi}]^e + [\mathbf{K}_\mathbf{\Phi}]^e \quad (56)$$

On appelle $[\mathbf{K}_\mathbf{\Psi}]^e$ la matrice tangente élémentaire due aux efforts internes et $[\mathbf{K}_\mathbf{\Phi}]^e$ la matrice tangente élémentaire due aux efforts externes.
Dans le cas où il existe aussi des chargements suiveurs appliqués sur le bord de la membrane, il apparaît aussi la matrice raideur tangente élémentaire due aux efforts externes sur le bord e' :

$$[\mathbf{K}']^{e'} \equiv \frac{-\partial \{\mathbf{\Phi}'\}^{e'}}{\partial \{\mathbf{U}\}^{e'}} \quad (57)$$

On notera que les chargements suiveurs n'existent qu'en grandes déformations. En effet, comme en petites déformations on fait l'hypothèse d'une géométrie fixe pour réaliser les calculs, les chargements qui dépendent du déplacement n'ont pas lieu d'être.

3.4.6 Calcul des contraintes dans la membrane

Une remarque importante, bien qu'évidente au regard des équations, est que l'on travaille sur la configuration non déformée de la membrane. Cela a pour conséquence que l'on sera en mesure de calculer les contraintes de Piola-Kirchhoff II et non celles de Cauchy. Or, on ne dispose pas d'équation portant sur l'évolution de l'épaisseur, ce qui en fait aussi une inconnue. On peut montrer que les contraintes de Cauchy sont liées à celles de Piola-Kirchhoff par l'équation :

$$h\sigma^{\alpha\beta} = \frac{H\Sigma^{\alpha\beta}}{\frac{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|}} \quad (58)$$

ce qui donne deux inconnues pour une équation. On ne pourra donc avoir accès qu'aux contraintes de Cauchy intégrées sur l'épaisseur, aussi appelées « efforts généralisés », s'exprimant par « $h\sigma$ ».

3.5 Expression des éléments codés dans code_aster

On donne dans ce paragraphe l'expression des différents tenseurs tels qu'ils sont écrits dans code_aster.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On a pour la loi de comportement de Saint Venant Kirchhoff :

$$\Sigma^{\alpha\beta}=\Sigma_0^{\alpha\beta}+\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{2}(1-\nu)\left(A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta}+A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma}\right)+A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta}\right]\frac{1}{2}\left(a_{\delta\gamma}-A_{\delta\gamma}\right) \quad (59)$$

Et donc :

$$\frac{\partial\Sigma^{\alpha\beta}}{\partial E_{\delta\gamma}}=\mu\left(A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta}+A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma}\right)+\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta} \quad (60)$$

Et pour la loi néo Hookéenne :

$$\Sigma^{\alpha\beta}=\Sigma_0^{\alpha\beta}+\mu\left(A^{\alpha\beta}-a^{\alpha\beta}\right)+\frac{\lambda}{2}\ln\left(\frac{\lambda q}{2\mu}W\left(\frac{2\mu}{\lambda q}\frac{e^{2\mu}}{\lambda}\right)\right)a^{\alpha\beta} \quad (61)$$

Et docc :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma^{\alpha\beta}}{\partial E_{\delta\gamma}}=\frac{\mu C_{33}}{1+2\mu\dfrac{C_{33}}{\lambda}}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}+\frac{1}{2}\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\ln\det\mathbf{C}\right)\left(a^{\alpha\delta}a^{\gamma\beta}+a^{\alpha\gamma}a^{\delta\beta}\right) \quad (62)$$

Avec $C_{33}=\frac{\lambda}{2\mu}W\left(\frac{2\mu}{\lambda q}e^{\frac{2\mu}{\lambda}}\right)$, $q=\frac{\det\left[a_{\alpha\beta}\right]}{\det\left[A_{\alpha\beta}\right]}$, et W la fonction de Lambert $w(z)e^{w(z)}=z$ ($z\in C$).

Dans les prochaines expressions on notera δ le symbole de Kronecker et on aura :

$$i=3(a-1)+p \quad \text{et} \quad j=3(b-1)+q \quad (63)$$

A vec $i,\ j\in(1,3\times nne)$, $a,\ b\in(1,nne)$ et $p,\ q\in(1,2,3)$.
La matrice masse s'écrit :

$$\left[\mathbf{M}\right]_{ij}^{e}\equiv\int_e\delta_{pq}\rho_0N_aN_bH\,dS_0 \quad (64)$$

La matrice tangente élémentaire due aux efforts internes :

$$\left[\mathbf{K}_\Psi\right]_{ij}^{e}=\int_e N_{a,\alpha}N_{b,\beta}\left(\delta_{pq}\Sigma^{\beta\alpha}+x_{p,\gamma}x_{q,\delta}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\mathbf{E}}\right)^{\gamma\alpha\beta\delta}+\left(\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\mathbf{E}}\right)^{\gamma\alpha\delta\beta}\right]\right)H\,dS_0 \quad (65)$$

Et le vecteur force interne élémentaire :

$$\left\{\mathbf{\Psi}\right\}_i^e=\int_e N_{a,\alpha}x_{p,\gamma}\Sigma^{\gamma\alpha}H\,dS_0 \quad (66)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Formulation des éléments de GRILLE_MEMBRANE

Pour une nappe d'armature uniaxiale, l'énergie de déformation peut se mettre sous la forme :

$$\Phi = \frac{1}{2} \int S \sigma \varepsilon \, ds \tag{67}$$

avec S la section d'armature par unité de longueur, σ la contrainte (scalaire) et ε la déformation (scalaire). On cherche à obtenir une expression du type $\varepsilon = BU$ où l'on note U les valeurs nodales du déplacement. En reprenant la démarche de la section précédente, on démontre cette fois-ci que :

$$\varepsilon = (\nabla u)_{11} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^{\beta}} \cdot a^{\alpha} \right) R^1_{\alpha} R^1_{\gamma} g^{\beta\gamma} \tag{68}$$

En introduisant la dérivée $\hat{B}$ des fonctions de forme au point de Gauss envisagé, il vient :

$$\varepsilon = R^1_{\alpha} R^1_{\gamma} g^{\beta\gamma} \hat{B}_{\beta,n} (a^{\alpha})_i U_{i,n} \tag{69}$$

D'où le B cherché. On notera qu'il a la forme d'un vecteur, due à la nature scalaire de la déformation recherchée :

$$B_{i,n} = R^1_{\alpha} R^1_{\gamma} g^{\beta\gamma} \hat{B}_{\beta,n} (a^{\alpha})_i \tag{70}$$

A partir de B , on retrouve toutes les expressions classiques de la déformation, des forces nodales et de la matrice tangente :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= BU \\ F &= \int B^T \sigma \\ K &= \int B^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} B \end{aligned} \tag{71}$$

On notera que ce sont les lois de comportement unidimensionnelles qui sont utilisées pour obtenir la contrainte à partir de la déformation. Toutes les lois de comportement disponible en unidimensionnel sont utilisables. A défaut, on peut également utiliser les lois tridimensionnelles, grâce à la méthode De Borst.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Matrice de masse

Pour les éléments MEMBRANE et GRILLE_MEMBRANE, les termes de la matrice de masse sont obtenus après discrétisation de la formulation variationnelle suivante :

$$\delta W_{mass}^{ac} = \int_{-h/2}^{+h/2} \int_S \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \delta \boldsymbol{u} \, dz \, dS = \int_S \rho_m \left(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w \right) dS \tag{72}$$

Avec $\rho_m = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho \, dz$ .La discrétisation du déplacement (pour N nœuds) pour cet élément isoparamétrique est :

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N} N_k \left\{ \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \right\} k = 1, \cdots, N \tag{73}$$

La matrice de masse, dans la base où les degrés de liberté sont regroupés suivant les directions de translation, a alors pour expression :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M_m} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M_m} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M_m} \end{pmatrix} \tag{74}$$

A vec : $\mathbf{M_m} = \int_S \rho_m \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dS$ et $\mathbf{N} = \left(N_1 \cdots N_k \right)$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Bibliographie

[1] **LE VAN, Anh** . *Coques et membranes, Fondements de l'approche non linéaire* . 2014.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
7.4	P.Badel EDF-R&D/AMA	Texte initial
9.5	J.M.Proix EDF-R&D/AMA	Modification de GRILLE en GRILLE_EXCENTRE
11.3	M. David EDF-R&D/AMA	Ajout de la modélisation MEMBRANE et modifications mineures
13.1	S. Michel-Ponnelle EDF-R&D/AMA	Ajout matrice de masse
13.3	N. Lauzeral École centrale de Nantes	Formulation de l'élément MEMBRANE en grandes transformations

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)