Modélisation des câbles

Résumé :
Les câbles sont des structures souples qui peuvent subir de grands déplacements. Leur analyse est donc non linéaire. Au point de vue mécanique, un câble ne peut supporter aucun moment et n'est le siège que d'un effort normal appelé tension. L'expression du travail virtuel et sa différentiation par rapport aux déplacements conduisent à la modélisation en éléments finis : matrice de rigidité dépendant du déplacement des nœuds et matrice de masse constante. On présente les algorithmes itératifs statique et dynamique. Deux exemples sont donnés : l'un, statique, est la recherche de la figure d'équilibre d'un câble soumis à une tension horizontale donnée ; l'autre, dynamique, est la comparaison entre des calculs par éléments finis et des résultats d'essais de courts-circuits. Enfin quatre annexes traitent : du calcul des forces de Laplace, de l'évolution de la température d'un câble soumis à l'effet Joule, de la force exercée par le vent et de la modélisation de l'opération de pose.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notations....3
2 Introduction....4
3 Hypothèses mécaniques....4
4 Application du Principe des Travaux Virtuels....5
5 Linéarisation....6
6 Réalisation numérique par les éléments finis....6
7 Cas particulier des éléments de câble à deux nœuds....7
8 Utilisation dans Code_Aster....8
9 Problème statique....9
9.1 Algorithme itératif....9
9.2 Exemple....9
10 Problème dynamique....11
10.1 Algorithme itératif d'intégration temporelle....11
10.2 Comparaison de calculs et d'essais de courts-circuits....11
11 Conclusion....13
12 Bibliographie....14
Annexe 1 : Calcul des forces de Laplace entre conducteurs....15
Annexe 2 : Calcul de la force exercée par le vent....19
Annexe 3 : Modélisation de la pose des câbles....20

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

A	aire de la section droite du câble.
$\mathbf{B}$	matrice de déformation.
C_v	chaleur volumique du métal conducteur.
E	module d'Young à la traction.
E_a	module actuel du câble.
E_c	module à la compression.
$\mathbf{F}_{ext}$	forces extérieures données.
$\mathbf{F}_{iner}$	forces d'inertie.
$\mathbf{F}_{int}$	forces internes.
g	mesure de Green de l'allongement relatif par rapport à la situation de référence.
h	coefficient de convection thermique d'un câble avec l'extérieur.
i	intensité de courant instantanée.
k	coefficient de variation de la résistivité avec la température.
$L_i(\xi)$	fonction de forme relative au nœud i .
$[\mathbf{L}]$	$\left[L_i(\xi)\mathbf{1}, L_j(\xi)\mathbf{1}...\right]$
$[\mathbf{L}']$	$\left[\frac{dL_i}{d\xi}\frac{d\xi}{ds_o}\mathbf{1}, \frac{dL_j}{d\xi}\frac{d\xi}{ds_o}\mathbf{1}...\right]$
N	tension du câble.
s_o	abscisse curviligne sur le câble en situation de référence.
T, T_o	température en situation courante et en situation de référence.
$\mathbf{u}(s_o, t)$	vecteur déplacement à l'instant t par rapport à la situation de référence.
$\mathbf{x}(s_o)$	vecteur position en situation de référence.
α	coefficient de dilatation thermique.
β, γ	paramètres de Newmark.
ρ	masse volumique.
σ	résistivité.
$\mathbf{1}$	matrice unité d'ordre 3.
$\left[\frac{\partial}{\partial s_o}\mathbf{1}\right]$	matrice diagonale $\left[\frac{\partial}{ds_o}, \frac{\partial}{ds_o}, \frac{\partial}{ds_o}\right]$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Introduction

La caractéristique essentielle des câbles est que ce sont des **structures souples**, dont l'analyse mécanique est **non linéaire** parce qu'ils sont susceptibles de subir de **grands déplacements**. Ils en subissent au cours de l'opération de **pose**, quand on ajuste des flèches pour respecter des contraintes d'environnement.

Par la suite, les câbles peuvent être animés de **mouvements de grande amplitude** sous l'impulsion de la pression du **vent**, de la chute de **manchons de givre** ou, en cas d'incident, des forces de Laplace résultant des courants de **court-circuit**. Ils exercent alors sur leurs supports des efforts beaucoup plus élevés que les efforts statiques. On doit en tenir compte dans la conception des ouvrages.

Pour les ouvrages anciens, qui peuvent être soumis à des intensités de court-circuit accrues en raison de l'extension du réseau, il faut vérifier que la fiabilité est toujours assurée.

3 Hypothèses mécaniques

Les câbles sont considérés comme des fils parfaitement flexibles, qui ne peuvent supporter aucun moment, ni fléchissant, ni de torsion, et ne sont le siège que d'une tension normale. Cette tension joue le rôle d'une contrainte généralisée.

On veut calculer le champ de déplacement $\mathbf{u}(s_o, t)$ à l'instant t par rapport à la situation de référence. Celle-ci est une configuration statique du câble soumis, par exemple, à la pesanteur et à la température T_o ; elle est définie par le champ de vecteurs position $\mathbf{x}(s_o)$.

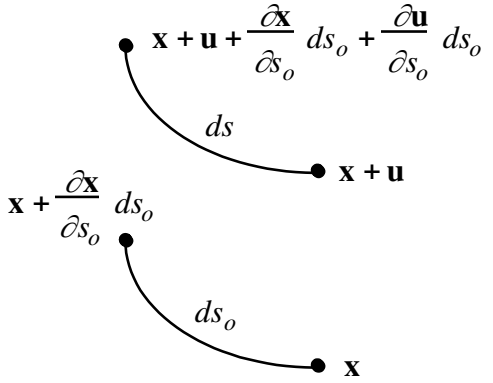


Figure 1 : Tronçon de câble en situations de référence et déplacée

Comme [bib1], on prend pour déformation la mesure de Green de l'allongement relatif par rapport à la situation de référence [Figure 1] :

$$. \; g = \frac{ds^2 - ds_o^2}{2\, ds_o^2}$$

$\mathbf{g}$ **doit rester petit**. Le second membre se prête au calcul parce qu'il ne comporte que des carrés de longueurs élémentaires. On voit sur la [Figure 1] que :

$$g = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_o} . \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_o} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_o}\right)^2 \qquad [1]$$

La relation de comportement est :

$$N = E_a A\left[g - \alpha\left(T - T_o\right)\right] \qquad [2]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec :

$$E_a = \begin{cases} E \text{ si } N > 0 \\ E_c \text{ si } N \leq 0 \end{cases}$$

4 Application du Principe des Travaux Virtuels

Si l'on ne tient pas compte de l'amortissement, le travail virtuel de l'ensemble des forces appliquées à un tronçon de câble au cours du déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$ est :

$$W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - W_{iner}(\ddot{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) - W_{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad [3]$$

en distinguant les travaux des forces intérieures, des forces d'inertie et des forces extérieures. D'après [éq 1] :

$$W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{s_1}^{s_2} (N . \delta g)\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ N . \left[\frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial s_o} . \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial s_o} \right] \right\} ds = \int_{s_1}^{s_2} (N . B \delta \mathbf{u})\, ds \quad [4]$$

où :

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial s_o} \mathbf{1} \right] (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \right\}^T \left[\frac{\partial}{\partial s_o} \mathbf{1} \right] \quad [5]$$

en désignant par l'indice supérieur T la transposée d'une matrice.

$$W_{iner}(\ddot{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) = -\int_{s_1}^{s_2} (\rho A \ddot{\mathbf{u}} . \delta \mathbf{u})\, ds \quad [6]$$

Dans tous les cas, nous considérons le travail W_{ext} comme indépendant de $\mathbf{u}$ au cours d'un pas de temps, car :

- ou bien il l'est réellement, dans le cas de forces conservatives comme la pesanteur ;
- ou bien, dans le cas des forces de Laplace, la force appliquée à un élément de câble dépend non seulement du déplacement de cet élément (force suiveuse classique), mais encore des déplacements de l'ensemble des câbles. On considère alors que, au cours d'un pas de temps, la force est constante et égale à sa valeur à la fin du pas de temps précédent.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Linéarisation

A l'équilibre :

$$W(\mathbf{u},\delta\mathbf{u})=0 \qquad [7]$$

Si, à une tolérance près, l'équation précédente n'est pas satisfaite, on cherche une correction $\Delta\mathbf{u}$ de $\mathbf{u}$ telle que :

$$W(\mathbf{u},\delta\mathbf{u})+DW(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}=0$$

$DW(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}$ étant la dérivée directionnelle de $W(\mathbf{u},\delta\mathbf{u})$ dans la direction $\Delta\mathbf{u}$ [bib 2] et [bib 3]. D'après [éq 2], on a évidemment :

$$DN.\Delta\mathbf{u}=E_a A\, Dg.\Delta\mathbf{u}=E_a A\,\mathbf{B}.\Delta\mathbf{u}$$

D'après [éq 5] :

$$D\boldsymbol{B}.\Delta\mathbf{u}=\left(\left[\frac{d}{ds_o}\mathbf{1}\right]\Delta\mathbf{u}\right)^T\left[\frac{d}{ds_o}\mathbf{1}\right].$$

Donc :

$$DW_{int}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}=\int_{s_1}^{s_2}\left\{(\mathbf{B}\,\delta\mathbf{u})^T E_a A\,\mathbf{B}\,\Delta\mathbf{u}\right\}ds + \int_{s_1}^{s_2}\left\{\left(\left[\frac{d}{ds_o}1\right]\delta\mathbf{u}\right)^T N\left[\frac{d}{ds_o}\mathbf{1}\right]\Delta\mathbf{u}\right\}ds \qquad [8]$$

D'après [éq 6] :

$$DW_{iner}(\ddot{\mathbf{u}},\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}=-\int_{s_1}^{s_2}(\delta\mathbf{u}^T\rho A\,\Delta\ddot{\mathbf{u}})\,ds \qquad [9]$$

6 Réalisation numérique par les éléments finis

On note par l'indice inférieur h les matrices discrétisées en éléments finis. Si $\mathbf{v}$ est un vecteur défini sur le câble (position, déplacement, accélération, …) on a au point courant d'un élément fini de nœuds $i, j, \ldots$:

$$\mathbf{v}=[\mathbf{L}]\,\mathbf{v}_e$$

$\mathbf{v}_e$ étant le vecteur constitué des composantes de $\mathbf{v}$ aux nœuds. De même :

$$\left[\frac{\partial}{\partial s_o}\mathbf{1}\right]_h\mathbf{v}=[\mathbf{L}']\,\mathbf{v}_e.$$

D'après [éq 5] :

$$\mathbf{B}_h=(\mathbf{x}+\mathbf{u})_e^T\mathbf{L}'^T.\mathbf{L}'$$

Les forces internes $\mathbf{F}_{int}^e$ d'un élément fini e de structure sont les forces qu'il faut exercer en ses nœuds pour le maintenir dans sa configuration déformée actuelle. D'après le théorème des travaux virtuels pour les milieux continus, le travail de ces forces ponctuelles est égal au travail des contraintes dans l'élément, c'est-à-dire à W_{int}, pour tout champ de déplacement virtuel. On a donc, d'après [éq 4] :

$$\mathbf{F}_{int}^e=\int_{s_1}^{s_2}N\,\mathbf{B}_h^T\,ds=\int_{s_1}^{s_2}N\,\mathbf{L}'^T\mathbf{L}'\,ds(\mathbf{x}+\mathbf{u})_e.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'autre part, on remplace les forces d'inertie réparties dans l'élément par des forces ponctuelles aux nœuds $\mathbf{F}_{iner}^{e}$ telles que leur travail soit égal à celui des forces d'inertie réelles pour tout champ de déplacement virtuel. D'après [éq 6], on a donc :

$$\mathbf{F}_{iner}^{e}=-\int_{s_1}^{s_2}\mathbf{L}^{T}\,\rho\,A\,\mathbf{L}\,ds\,.\,\ddot{\mathbf{u}}_{e}$$

De même, les forces extérieures réparties sont remplacées par des forces nodales concentrées $\mathbf{F}_{ext}^{e}$ équivalentes au sens du travail virtuel. La différentielle du travail virtuel des forces intérieures d'un élément fini de câble s'écrit, d'après [éq 8] :

$$,\ D_h W_{int}\left(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}\right).\Delta\mathbf{u}=\left(\delta\mathbf{u}_{e}\right)^{T}\left(\mathbf{K}_{M}+\mathbf{K}_{G}\right)\Delta\mathbf{u}_{e}$$

avec :

$$\mathbf{K}_{M}=\int_{s_1}^{s_2}\mathbf{B}_{h}^{T}\,E_{a}\,A\,\mathbf{B}_{h}\,ds$$

$$\mathbf{K}_{G}=\int_{s_1}^{s_2}\mathbf{L}'^{T}\,N\,\mathbf{L}'\,ds$$

$\mathbf{K}_{M}$ et $\mathbf{K}_{G}$ sont appelées matrices de rigidité matérielle et géométrique de l'élément. $\left(\mathbf{K}_{M}+\mathbf{K}_{G}\right)\Delta\mathbf{u}_{e}$ est la partie principale de la variation $\Delta\mathbf{F}_{int}$ des forces intérieures aux nœuds due à la correction de déplacements $\Delta\mathbf{u}_{e}$. La différentielle du travail virtuel des forces d'inertie se déduit de [éq 9] :

$$D_h W_{iner}\left(\ddot{\mathbf{u}},\delta\mathbf{u}\right).\Delta\mathbf{u}=-\left(\delta\mathbf{u}_{e}\right)^{T}\boldsymbol{M}\,\Delta\ddot{\mathbf{u}}_{e}$$

avec :

$$\mathbf{M}=\int_{s_1}^{s_2}\mathbf{L}^{T}\,\rho\,A\,\mathbf{L}\,ds$$

$\mathbf{M}$ est la matrice de masse de l'élément. $-\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{u}}_{e}$ est la variation $\Delta\mathbf{F}_{iner}$ des forces d'inertie aux nœuds due à la correction d'accélération $\Delta\ddot{\mathbf{u}}_{e}$.

7 Cas particulier des éléments de câble à deux nœuds

Ces éléments sont du 1er degré : ils sont donc droits en position de référence et restent droits en position déformée.

Aucun moment n'est appliqué en leurs extrémités et ils ne sont le siège que d'une contrainte uniaxiale. Ce sont donc des **éléments de barre**.

Autrement dit : modéliser un câble par des éléments à deux nœuds revient à l'assimiler à une **chaîne** dont les **maillons** (les éléments de câble) seraient **parfaitement articulés** entre eux.

Par contre, les éléments de câble ayant plus de deux nœuds présentent en général une courbure variable avec la déformation. On ne peut donc pas les traiter comme des éléments de barre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Utilisation dans *Code_Aster*

Ce paragraphe indique comment on introduit les câbles dans les commandes concernées de Code_*Aster*.

Commande	Mot clé facteur	Mot clé	Argument
AFFE_MODELE	AFFE	GROUP_MA	Nom du groupe de mailles supportant un câble.
		PHENOMENE	'MECANIQUE'.
		MODELISATION	'CABLE'.
DEFI_MATERIAU	CABLE	E	Valeur du module du matériau.
		EC_SUR_E	Rapport du module de compression (très faible et pouvant être nul) sur le module.
AFFE_CARA_ELEM	CABLE	GROUP_MA	Nom du groupe de mailles supportant un câble.
		SECTION	Valeur de la section du câble.
STAT_NON_LINE	COMPORTEMENT	GROUP_MA	Nom du groupe de mailles supportant un câble.
		RELATION	'CABLE'
		DEFORMATION	'GREEN'

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Problème statique

Ce problème est celui de la recherche de l'équilibre d'une structure de câbles en position quelconque et soumise à un système de forces données.

9.1 Algorithme itératif

L'équation d'équilibre, forme discrétisée de [éq 7] et [éq 3] sans le terme d'inertie, qui doit être satisfaite en chaque nœud, est :

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \qquad [10]$$

Supposons qu'on vienne de calculer le champ de déplacement des câbles, $\mathbf{u}^n(s_o)$, à l'itération n :

- si ce champ permet de satisfaire, à une tolérance près, à [éq 9.1-1], on considère que la ligne :

$$\mathbf{x}(s_o) + \mathbf{u}^n(s_o)$$

est la figure d'équilibre des câbles ;

- sinon, on calcule des corrections de déplacement $\Delta\mathbf{u}^{n+1}$ par le système linéarisé :

$$\left[\mathbf{K}_M^n + \mathbf{K}_G^n\right]\Delta\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}^n$$

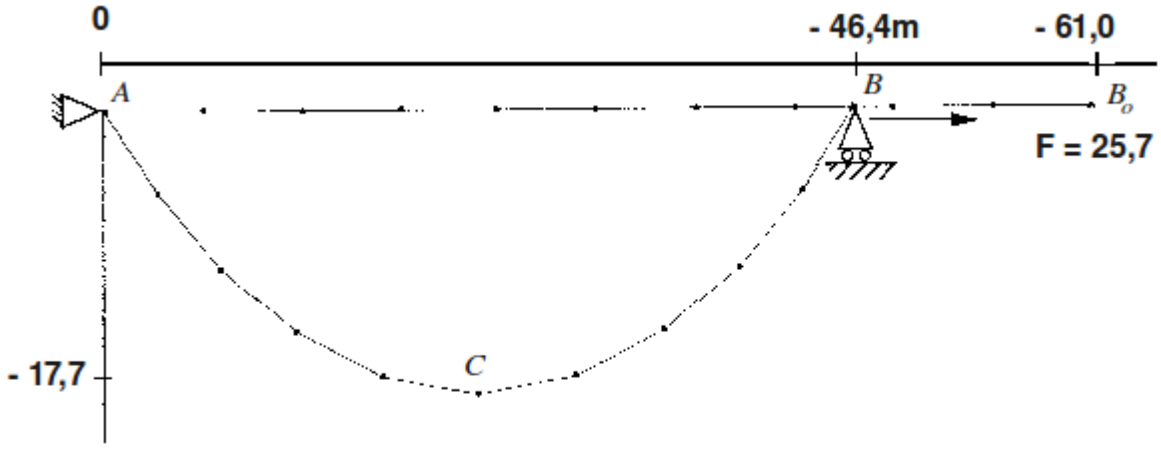
On utilise pour cela l'algorithme non linéaire quasi-statique décrit dans [R5.03.01], et qui correspond à la commande `STAT_NON_LINE`. Le déplacement à l'itération $(n+1)$ est :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta\mathbf{u}^{n+1}$$

On regarde si [éq 10] est satisfaite par le champ $\mathbf{u}^{n+1}$ et ainsi de suite.

9.2 Exemple

On veut calculer la figure d'équilibre d'un câble pesant [fig 9.2-a] dont une extrémité A est fixe et dont l'autre, B de niveau avec A, est soumise à une force horizontale donnée.
Ce problème est traité dans [bib 4], où il est considéré comme hautement non linéaire.



Rigidité extensionnelle (E.A) : 4,45 x 10^5 N, Poids linéique : 1,46 N/m
Figure 2 : Équilibre d'un câble pesant soumis à une tension horizontale

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Au départ, le câble, modélisé par 10 éléments du 1er degré, est supposé en apesanteur et a une position rectiligne horizontale AB_o. On le soumet simultanément à l'action de la pesanteur et à la force horizontale F appliquée en B_o. La position d'équilibre statique ACB est atteinte en 8 itérations seulement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Problème dynamique

Ce problème est celui du calcul de l'évolution d'une structure de câbles.

10.1 Algorithme itératif d'intégration temporelle

La forme discrétisée de [éq 7] et [éq 3] complète, qui doit être satisfaite en chaque nœud et à chaque instant est :

$$\mathbf{F}_{int}(t)-\mathbf{F}_{iner}(t)=\mathbf{F}_{ext}(t) \qquad [11]$$

L'algorithme d'intégration temporelle est de type Newmark [bib 1] et [bib 5]. Supposons que l'état du câble (champs $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}$ *et* $\ddot{\mathbf{u}}$ aux nœuds) soit connu à l'instant t et qu'on vienne de calculer une valeur approchée de ces champs à la n^{ième} itération de l'instant $t+\Delta t$.

- Si ces valeurs satisfont à [éq 11], à une tolérance près, on les prend pour valeurs des champs à l'instant $t+\Delta t$.
- Sinon, on cherche la correction de déplacement $\Delta \mathbf{u}^{n+1}$, à laquelle correspondent, selon l'algorithme de Newmark, les corrections de vitesse et d'accélération :
-

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}^{n+1}=\frac{\gamma}{\beta \Delta t}\Delta \mathbf{u}^{n+1}$$

et

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}^{n+1}=\frac{1}{\beta \Delta t^2}\Delta \mathbf{u}^{n+1}$$

telle que :

$$\left[\mathbf{K}_M^n+\mathbf{K}_G^n+\frac{1}{\beta \Delta t^2}\mathbf{M}\right]\Delta \mathbf{u}^{n+1}=\mathbf{F}_{ext}(t+\Delta t)-\mathbf{F}_{int}^n(t+\Delta t)+\mathbf{F}_{iner}^n(t+\Delta t)$$

Dans l'analyse du mouvement des câbles, l'algorithme de Newmark peut être instable. C'est pourquoi nous utilisons l'algorithme dit HHT, défini dans [bib5, bib7], dans lequel les deux paramètres de Newmark sont fonctions d'un troisième paramètre α :

$$\gamma=\frac{1}{2}-\alpha$$
$$\beta=\frac{(1-\alpha)^2}{4}$$
$$\alpha\leq 0$$

Pour $\alpha=0$, l'algorithme est celui de Newmark, dit "règle du trapèze". Mais pour α légèrement négatif, en pratique : $\alpha\geq -0.3$, il apparaît de l'amortissement numérique qui stabilise le calcul.

La détermination de l'accélération initiale et l'initialisation des champs au début d'un nouveau pas de temps sont indiquées dans [bib 5].

10.2 Comparaison de calculs et d'essais de courts-circuits

Pour valider cette modélisation des câbles, nous avons comparé des calculs dynamiques par *Code_Aster* à des résultats d'essais de courts-circuits [bib8]. Ceux-ci ont été réalisés au Laboratoire de Génie Electrique d'EDF sur une structure expérimentale représentative des configurations de poste [Figure 3]. Trois câbles tendus entre deux portiques distants de $102\ m$ sont court-circuités, au premier plan, par un shunt disposé sur des colonnes isolantes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Au niveau de l'autre portique, ils sont alimentés par un courant triphasé de $35\,kA$ pendant $250\ ms$.
On a enregistré l'évolution :

- de la tension des câbles à leur ancrage sur les portiques, à l'aide de dynamomètres ;
- du déplacement des points milieux des portées, repérés par des sphères de signalisation, à l'aide de caméras rapides. On voit la cage de verre de l'une de ces caméras montée sur un portique, à gauche de [Figure 3].

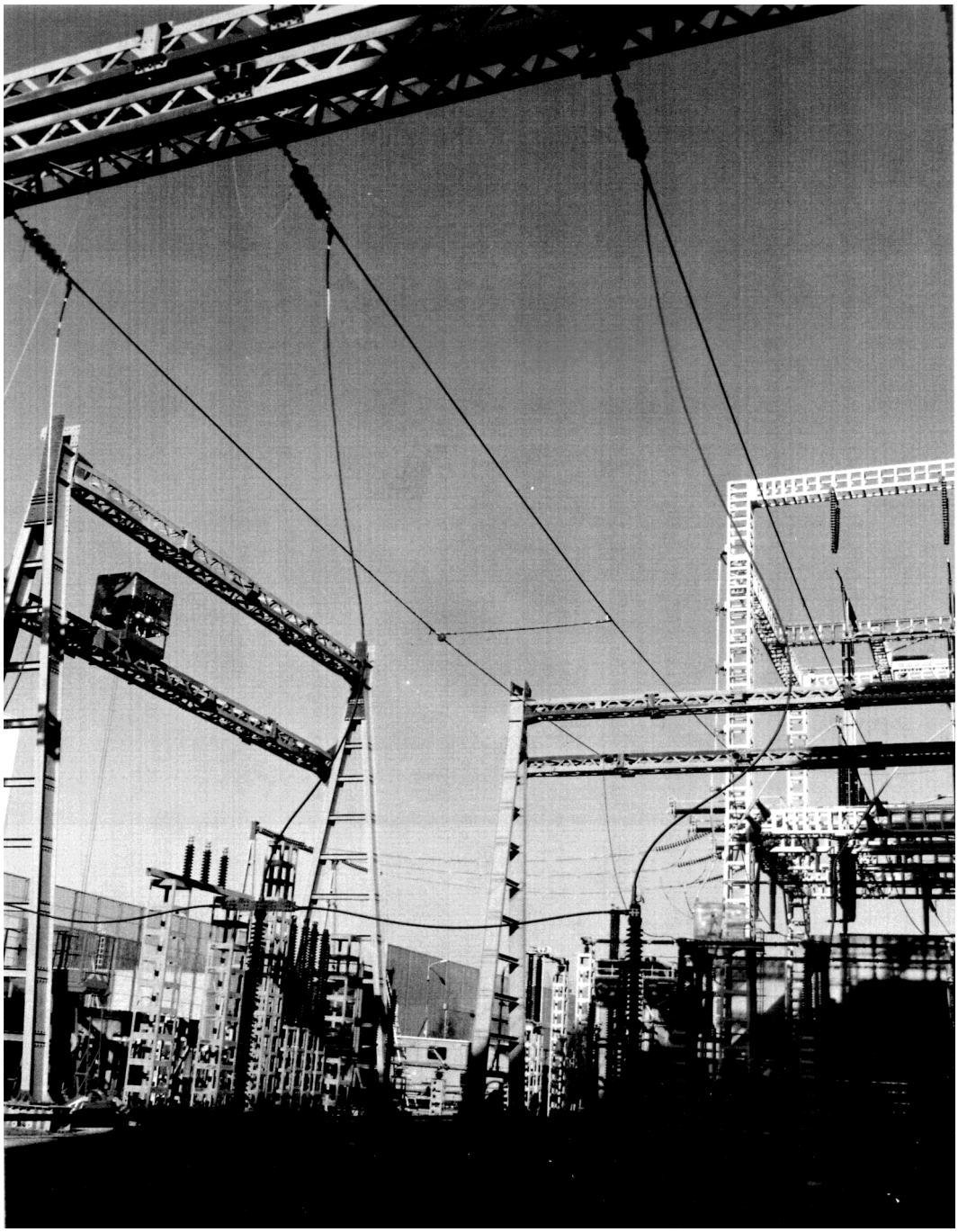
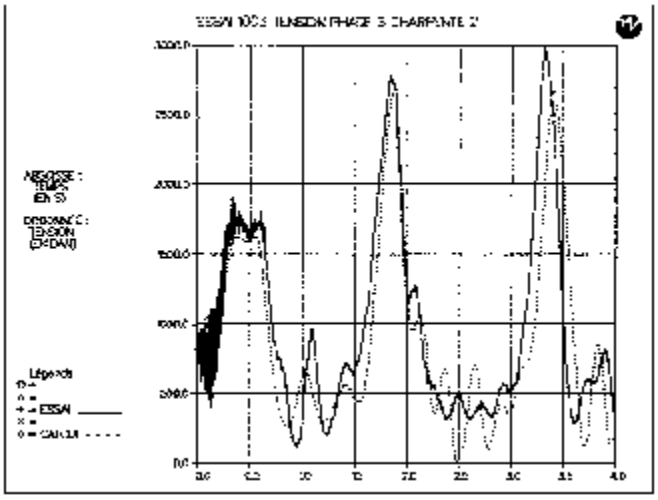


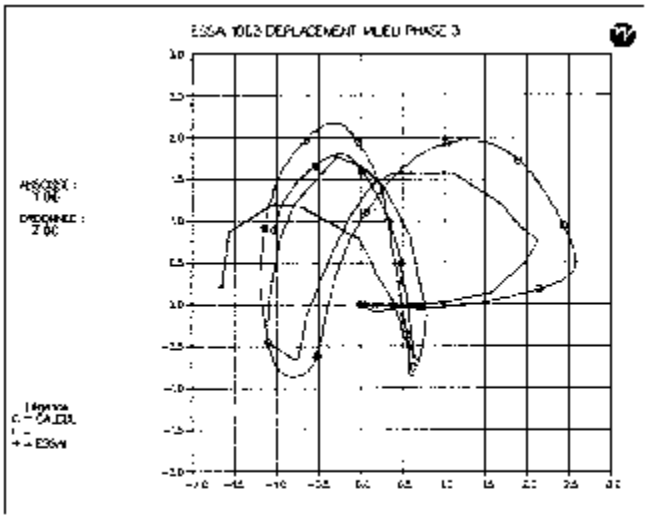
Figure 3 : Vue générale de l'installation d'essais de courts-circuits

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La [Figure4] donne la comparaison pour une tension d'ancrage et pour le déplacement du milieu d'un câble.



a – Evolution d'une tension d'ancrage



b – Trajectoire d'un point milieu de câble

Figure 4 : Comparaisons de calculs par *Code_Aster* et d'essais de courts-circuits

11 Conclusion

La modélisation des câbles présentée ci-dessus est performante (nombre raisonnable d'itérations par pas de temps ou pour atteindre un équilibre statique) et précise : elle est adaptée à l'analyse des câbles longs. Pour les câbles courts, par contre, la rigidité flexionnelle n'est pas négligeable, surtout aux ancrages, et la modélisation doit se faire par des éléments de poutre en grands déplacements et grandes rotations [R5.03.40].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Bibliographie

[1] J.L. LILIEN : Contraintes et conséquences électromécaniques liées au passage d'une intensité de courant dans les structures en câbles. Thèse. Université de Liège (1983).

[2] J.C. SIMO, L. VU-QUOC : A three-dimensional finite-strain rod model. Part II : computational aspects, Comput. Meth. appl. Mech. Engng, Vol. 58, p. 79-116 (1986).

[3] A. CARDONA, M. GERADIN : A beam finite element nonlinear theory with finite rotations, Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol. 26, p. 2403-2438 (1988).

[4] R.L. WEBSTER : On the static analysis of structures with strong geometric non-linearity. Computers & Structures 11, 137-145 (1980).

[5] N.GREFFET, F.VOLDOIRE, M.AUFAURE : Algorithme non linéaire dynamique. Document R5.05.05.

[6] K.J. BATHE : Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall (1982).

[7] H.M. HILBER, T.J.R. HUGHES, R.L. TAYLOR : Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. Earthq. Engng Struct. Dyn. 5, 283-292 (1977).

[8] F. DURAND : Portée de ligne triphasée (102 m) pour postes THT. Rapport d'essais. EDF (1990).

Historique des versions du document

Indice doc	Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
A	3	M.AUFAURE [1] G.DEVESA[1] [1]EDF/R&D	Texte initial
B	9.4	J.L. FLEJOU EDF/R&D/AMA	La température n'est plus affectée par la commande AFFE_CHAR_MECA mais par AFFE_MATERIAU/AFFE_VARC
C	12.3	F. VOLDOIRE EDF/R&D/AMA	Quelques corrections de forme (§ 1, 3, 4...) et de références en dynamique non linéaire § 10.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1 : Calcul des forces de Laplace entre conducteurs

Tout conducteur parcouru par un courant crée un champ magnétique dans son voisinage. Ce champ magnétique, agissant sur le courant véhiculé par un autre conducteur, induit sur celui-ci une force dite de Laplace.

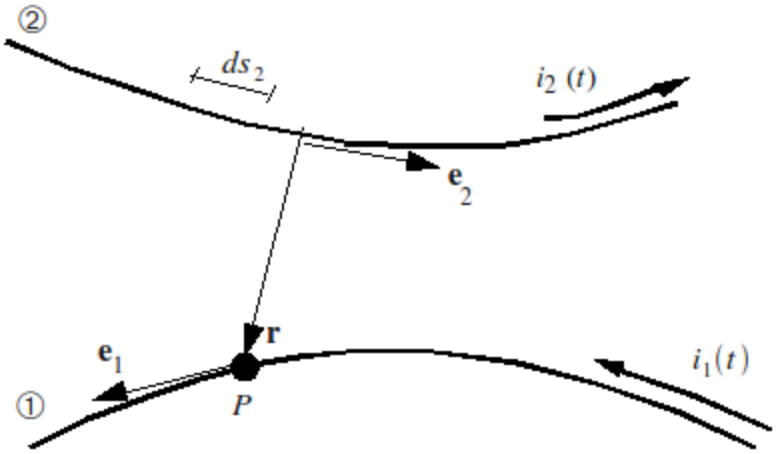


Figure 5 : Disposition de deux conducteurs voisins

Prenons un conducteur (1) parcouru par le courant $i_1(t)$ [Figure A1-a], situé au voisinage du conducteur (2) parcouru par le courant $i_2(t)$. Au point P du conducteur (1), où la tangente unitaire orientée dans le sens du courant est $\mathbf{e}_1$, la force linéique de Laplace induite par le conducteur (2) est :

$$\mathbf{f}(P)=10^{-7} i_1(t) i_2(t) \mathbf{e}_1 \times \int_{\Gamma_2} \mathbf{e}_2 \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds_2$$

On ne s'intéresse qu'aux forces dues aux courants très intenses de court-circuit, les forces de Laplace en régime normal étant négligeables.

$\mathbf{f}(P)$ peut évidemment se mettre sous la forme du produit d'une fonction du temps par une fonction de l'espace.

A1.1 Fonction du temps des forces de Laplace

Cette fonction $g(t)$, est, à un facteur près, le produit des intensités dans les conducteurs (1) et (2) :

$$g(t)=2.10^{-7} i_1(t) i_2(t) \qquad [12]$$

où :

$$i_j(t)=\sqrt{2}\, I_{ej}\left[\cos\left(\omega t+\varphi_j\right)-e^{-t/\tau}\cos\varphi_j\right] \qquad [13]$$

avec :

- I_{ej} : intensité efficace du courant j ;
- ω : pulsation du courant ($\omega=100\pi$ pour un courant de 50 Hz) ;
- φ_j : phase dépendant de l'instant où survient le court-circuit ;
- τ : constante de temps de la ligne court-circuitée dépendant de ses caractéristiques électriques (self, capacité et résistance).

Très souvent, on remplace la fonction complète $g(t)$ [éq 12] et [éq 13] par sa moyenne - qu'on appelle la partie continue - en négligeant les termes $\cos(\omega t+...)$ et $\cos(2\omega t+...)$. La prise en

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

compte de ces termes nécessiterait un pas de temps très petit et les forces correspondantes, à $50\,Hz$ et $100\ Hz$, sont quasiment sans effet sur les câbles dont la fréquence d'oscillation est de l'ordre du Hertz.

Donc :

$$g_{continue}(t)=2\,I_{e1}\,I_{e2}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+e^{-\left(\frac{t}{\tau_1}+\frac{t}{\tau_2}\right)}\cos\varphi_1\cos\varphi_2\right]$$

A1.2 Fonction de l'espace

Cette fonction est :

$$\mathbf{h}(P)=\frac{1}{2}\mathbf{e}_1\times\int\mathbf{e}_2\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}ds_2$$

L'intégrale se calcule analytiquement quand on découpe le conducteur Γ_2 en éléments rectilignes. Le long d'un tel élément M_1M_2 [Figure A1.2-a], on a un effet :

$$r^3=\left(y^2+r_m^2\right)^{3/2}$$
$$\mathbf{e}_2\times\mathbf{r}=\mathbf{e}_2\times\mathbf{r}_m$$
$$ds_2=dy$$

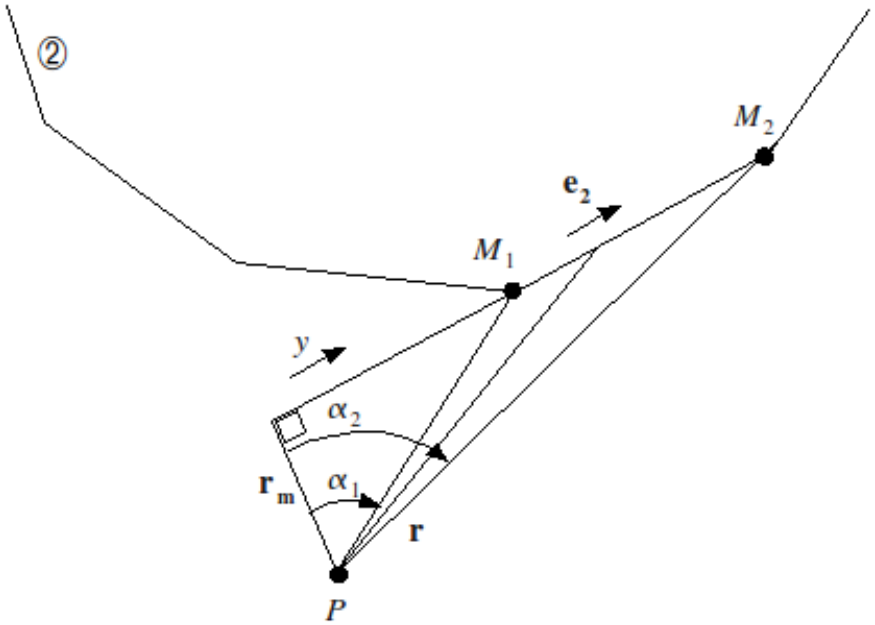


Figure 6 : Force de Laplace induite par un élément rectiligne de conducteur

Comme :

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\left(y^2+\mathbf{r}_m^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{\mathbf{r}_m^2}\left[\frac{y}{\left(y^2+\mathbf{r}_m^2\right)^{1/2}}\right]_{y_1}^{y_2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

on a :

$$\frac{1}{2}\mathbf{e}_1\times\int_{M_1}^{M_2}\mathbf{e}_2\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}dy=\frac{1}{2\mathbf{r}_m^2}\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\times\mathbf{r}_m\left[\frac{y}{\left(y^2+\mathbf{r}_m^2\right)^{1/2}}\right]_{y_1}^{y_2}$$

Le crochet du second membre est aussi égal à :

$$\sin\alpha_2-\sin\alpha_1 \ .$$

A1.3 Réalisation dans *Code_Aster*

La fonction d'espace $\mathbf{h}(P)$ précédemment définie est calculée par une routine élémentaire qui évalue pour chacun des éléments du conducteur (1) , la contribution de tous les éléments du conducteur (2) qui agissent sur lui.

Cette contribution est évaluée aux points de Gauss (1 seul pour les éléments à 2 nœuds) de l'élément du conducteur, (1) par le mot-clé INTE_ELEC de la commande AFFE_CHAR_MECA.

La routine élémentaire a 2 paramètres d'entrée :

- la carte de chargement de l'élément du conducteur (1) comprenant la liste des mailles du conducteur (2) agissant sur lui ;
- le nom de la géométrie, variable au cours du temps, qui permet à chaque instant d'évaluer les quantités $r_m, \sin\alpha_1, \sin\alpha_2$.

La fonction du temps $g(t)$ est calculée par l'opérateur DEFI_FONC_ELEC qui produit un concept de type fonction.

A1.4 Utilisation dans *Code_Aster*

- Définition de la fonction du temps $g(t)$

Commande	Mot clé facteur	Mot clé	Argument
DEFI_FONC_ELEC		SIGNAL	'COMPLET' ou 'CONTINU'
	COUR	INTE_CC_1	I_{e_1}
		TAU_CC_1	τ_1
		PHI_CC_1	φ_1
		INTE_CC_2	I_{e_2}
		TAU_CC_2	τ_2
		PHI_CC_2	φ_2
		INST_CC_INIT	Instant de début de court-circuit.
		INST_CC_FIN	Instant de fin de court-circuit.

- Définition de la fonction de l'espace $\mathbf{h}(P)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Commande	Mot clé facteur	Mot clé	Argument
AFFE_CHAR_MECA		MODELE	Nom du modèle.
	INTE_ELEC	GROUP_MA	Nom du groupe de mailles du conducteur (1) .
		GROUP_MA_2	Nom du groupe de mailles du conducteur (2) .

- Prise en compte des forces de Laplace

Commande	Mot clé facteur	Mot clé	Argument
DYNA_NON_LINE	EXCIT	CHARGE	nom de $\mathbf{h}(P)$
		FONC_MULT	nom de $g(t)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2 : Calcul de la force exercée par le vent

A3.1 Formulation

On admet qu'un vent de vitesse $\mathbf{V}$ exerce au voisinage du point P d'un câble [Figure 7] une force linéique aérodynamique f ayant les caractéristiques suivantes :

- f a la direction et le sens de la composante V_n de la vitesse du vent dans le plan normal du câble.
- f a un module proportionnel au carré de celui de V_n.

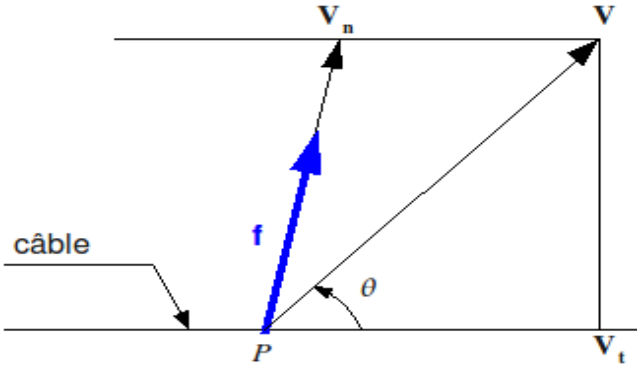


Figure 7 : vitesse du vent au voisinage d'un câble

Les règlements de calcul des lignes définissent la force d'un vent par la pression p qu'il exerce sur une surface plane normale à sa direction. Pour un câble, placé normalement à la direction du vent, ces règlements prescrivent de prendre pour force linéique : $f_{\frac{\pi}{2}} = p\,Ø$,

$Ø$ étant le diamètre du câble. Cela revient à considérer que le câble offre au vent une surface plane égale à son maître-couple. On obtient ainsi une majoration de la force parce que le câble, cylindrique, présente une moindre résistance à l'air qu'une surface plane.
Si la vitesse $\mathbf{V}$ du vent fait un angle θ avec le câble, sa composante dans le plan perpendiculaire au câble a pour module : $\|\mathbf{V}_n\| = \|\mathbf{V}\| . |\sin\theta|$.

Donc, la force linéique est : $f_\theta = p\,Ø\,\sin^2\theta$.
Bien entendu, la force linéique exercée par le vent dépend de la position du câble : elle est "suiveuse".

A3.2 Utilisation dans *Code_Aster*

Voici comment on introduit la force du vent dans *Code_Aster*. Le vecteur unitaire ayant la direction et le sens de la vitesse du vent a pour composantes v_x, v_y, v_z .

Commande	Mot clé facteur	Mot clé	Argument
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_POUTRE	TYPE_CHARGE	'VENT'
		FX	$p\,Ø\,v_x$
		FY	$p\,Ø\,v_y$
		FZ	$p\,Ø\,v_z$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 3 : Modélisation de la pose des câbles

Un câble en cours de pose dans un canton (plusieurs portées entre poteaux) [Figure 8] est fixé à l'un des supports d'arrêt. Il repose sur des poulies placées au bas des isolateurs d'alignement et il est retenu par une force au niveau du second support d'arrêt.

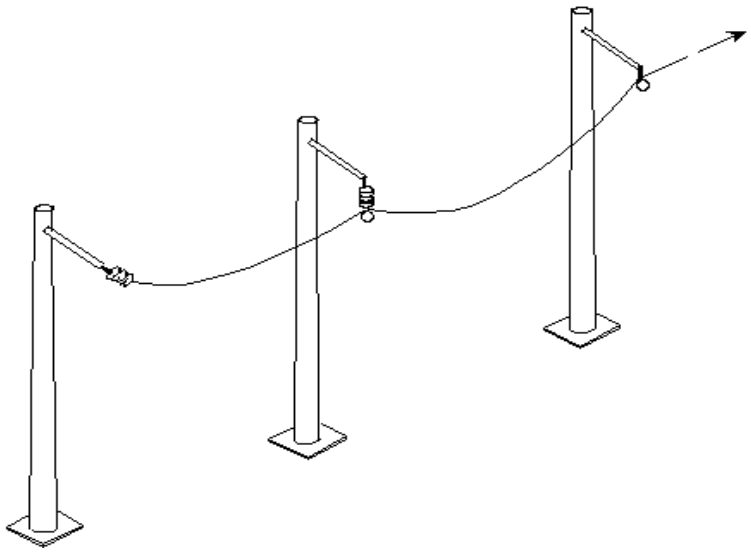


Figure 8 : Pose d'un câble dans un canton à deux portées

En jouant sur cette force - ou en déplaçant son point d'application - on ajuste la flèche de l'une des portées, celle qui est la plus soumise à des contraintes d'environnement. Puis on supprime les poulies et on fixe le câble aux isolateurs : la longueur du câble dans les différentes portées est alors fixée. C'est sur cette configuration qu'on monte éventuellement des composants supplémentaires : les espaceurs, les descentes sur appareillage, les masses ponctuelles, … pour donner au canton sa forme définitive.

Cette modélisation est décrite dans la documentation de référence des éléments `CABLE_POULIE` [R3.08.05].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)