Éléments de coque volumique SHB à 6, 15 et 20 nœuds

Résumé :

Nous présentons dans ce document 3 nouveaux éléments de coque volumique destinés à compléter la modélisation SHB, qui comporte déjà l'élément SHB8 ayant pour maille support un hexaèdre à 8 nœuds [R3.07.07]. Ces 3 éléments sont :

- l'élément SHB6 qui a pour maille support un pentaèdre à 6 nœuds,
- l'élément SHB15 qui a pour maille support un pentaèdre à 15 nœuds,
- l'élément SHB20 qui a pour maille support un hexaèdre à 20 nœuds.

De même que le SHB8, ces 3 éléments ont une direction privilégiée appelée épaisseur. Ainsi, ils peuvent être utilisés pour représenter des structures minces tout en prenant correctement en compte les phénomènes à travers l'épaisseur (flexion, élasto-plasticité), grâce une intégration numérique à 5 points de Gauss dans cette direction privilégiée.

Comme le SHB8, et afin de réduire le temps calcul, ces éléments sont sous-intégrés mais, contrairement à lui, ils ne possèdent pas de modes de Hourglass (modes de déformation à énergie nulle) et ne nécessitent donc pas de mécanisme de stabilisation. Néanmoins, pour éviter les blocages (notamment en cisaillement transverse), le SHB6 est projeté suivant la méthode des déformations supposées (assumed strain).
Les éléments quadratiques ne sont ni stabilisés, ni projetés.

Outre leur coût de calcul relativement faible et leurs bonnes performances en élasto-plasticité, ces éléments possèdent un autre avantage. Puisqu'ils sont basés sur une formulation tri-dimensionnelle et qu'ils ne

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

possèdent que des degrés de liberté de translation, il est facile de les coupler avec des éléments 3D volumiques, ce qui est très utile dans des systèmes où coques et éléments volumiques doivent cohabiter.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....5
2 Élément SHB6....6
2.1 Cinématique de l'élément....6
2.2 Discrétisation....6
2.2.1 Discrétisation du champ de déplacement....6
2.2.2 Opérateur gradient discrétisé....7
2.3 Matrice de rigidité et stabilisation....9
2.3.1 Matrice de rigidité....9
2.3.2 Analyse des modes « hourglass » pour l'élément SHB6....10
2.3.3 Projection par "Assumed local strain method"....11
2.4 Matrice de rigidité géométrique Ksigma....12
2.5 Forces suiveuses et matrice de pression Kp....14
3 Eléments SHB15 et SHB20....16
3.1 Cinématique et interpolation des éléments SHB15 et SHB20....16
3.1.1 Élément SHB15....16
3.1.2 Elément SHB20....17
3.2 Opérateur gradient discrétisé....18
3.2.1 Elément SHB15....18
3.2.2 Elément SHB20....24
3.3 Formulation variationnelle utilisée pour les éléments SHB15 et SHB20....31
3.4 Matrice de rigidité géométrique Ksigma....35
3.5 Forces suiveuses et matrice de pression Kp....37
4 Stratégie pour les calculs non-linéaires....38
4.1 Non-linéarités géométriques....38
4.2 Non-linéarités matériaux....39
5 Implantation des éléments SHB dans Code_Aster....41
5.1 Description....41
5.2 Utilisation....41
5.2.1 Maillage....41
5.2.2 Modélisation....41
5.2.3 Matériau....41
5.2.4 Conditions aux limites et chargement....41
5.2.5 Calcul en élasticité linéaire....41
5.2.6 Calcul en flambement linéaire....41
5.2.7 Calcul en " élasticité " non linéaire géométrique....41
5.2.8 Calcul non linéaire plastique....42
5.3 Implantation....42
5.4 Validation....42

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Bibliographie....43

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Un élément de type solide - coque volumique de géométrie hexaédrique à cinq points de Gauss a déjà été implanté dans ASTER. Les bonnes performances de cet élément, nommé SHB8, ont été mises en évidence par Abed-Meraim et Combescure [bib1], [bib2] ainsi que par Legay dans [bib3]. Cet élément représente une coque épaisse obtenue à partir d'une formulation purement tridimensionnelle. Il possède huit nœuds et cinq points d'intégration répartis selon la direction de l'épaisseur. La loi de comportement tridimensionnelle a également été modifiée pour se rapprocher du comportement des coques et éviter certains verrouillages (cisaillement, membrane). Pour éliminer les modes à énergie nulle dus à la sous-intégration, une technique efficace de stabilisation a été utilisée en suivant la démarche de Belytschko et Bindeman [bib4]. De même, l'opérateur gradient discrétisé a été modifié pour l'élimination des différents blocages. Ainsi, la version obtenue de cet élément possède les avantages suivants :

- capacité à modéliser des structures tridimensionnelles minces avec peu d'éléments de maillage grâce à l'élancement important toléré (gain de temps de calculs significatif),
- maillage simplifié de géométries complexes où coques et éléments solides doivent cohabiter (renforts ou brides par exemple) sans avoir les problèmes classiques de raccordements de maillages faits de différents types d'éléments.

Cet élément hexaédrique a été introduit dans *Code_Aster* en version 7 (voir [R3,07,07]). Toutefois, l'élément hexaédrique SHB8 ne permet pas de mailler des géométries de formes complexes quelconques. Le développement d'un élément similaire mais de géométrie prismatique était donc nécessaire. On décrit dans le début de ce document cet élément prismatique (élément SHB6).

Les travaux de recherche de Caironi et Abed-Meraim [bib5] ont prouvé que l'élément SHB6 ne présentait pas de modes de hourglass, et après l'avoir implanté, ils ont aussi montré que celui-ci présentait un sévère blocage numérique, notamment dans les sollicitations en cisaillement transverse de l'élément. L'élément SHB6 implanté dans Aster vise à éliminer ces blocages numériques en utilisant la méthode « assumed strain » . Le principe de cette méthode consiste à projeter l'opérateur gradient discrétisé B sur un sous-espace approprié afin d'éviter les différents problèmes liés au blocage. Plusieurs projections ont été testées avant de trouver celle qui élimine le maximum de verrouillages.

L' élément SHB6 fait l'objet du §2.

Le §3 présente une extension de cette famille d'éléments finis de type solide-coque : deux éléments finis de géométrie prismatique et hexahédrique mais de formulation quadratique nommés SHB15 et SHB20. Ce sont respectivement des éléments à 15 et 20 nœuds. Ils sont également sous-intégrés par 15 et 20 points de Gauss et possèdent une direction privilégiée selon l'épaisseur de l'élément. Ces éléments n'ayant pas de blocages ne sont pas projetés.

Par ailleurs, l'élément SHB8 initial avait été couplé aux seules lois de comportement élastique et élasto-plastique avec écrouissage isotrope de type Von-Mises. Le champ d'application de l'élément SHB8 ainsi que les autres éléments finis solide-coque SHB6, SHB15 et SHB20 a été élargi aux autres lois de comportement de Code_Aster. Le §4 présente le principe théorique de ce couplage.

Enfin le §5 traite de l'implantation de ces éléments dans *Code_Aster*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Élément SHB6

2.1 Cinématique de l'élément

L'élément SHB6 est un pentaèdre à 6 nœuds. Les cinq points d'intégration sont choisis le long de la direction ζ dans le repère des coordonnées locales de l'élément de référence : ξ, η, ζ (ou $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ pour certaines expressions). La forme de l'élément de référence ainsi que les points d'intégration sont représentés sur la [Figure 1].

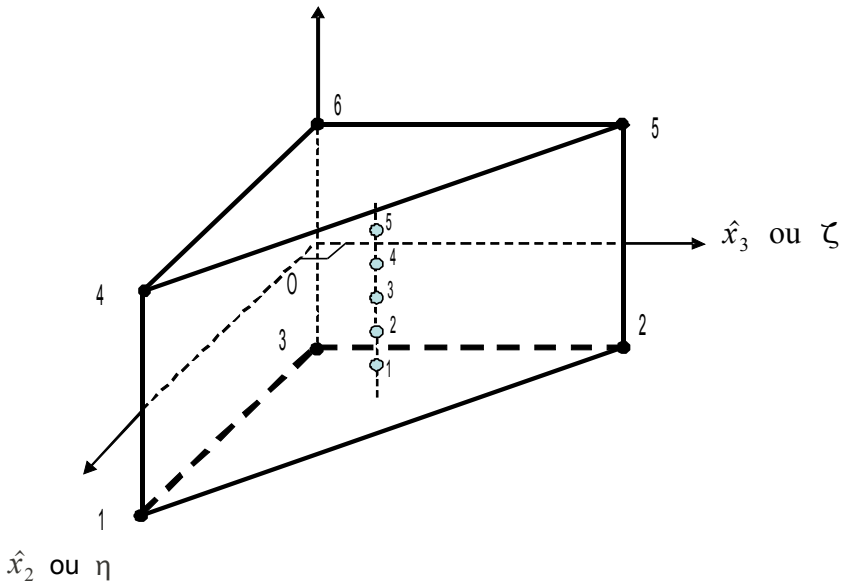


Figure 1 : Géométrie de l'élément de référence et points d'intégration

Cet élément est iso-paramétrique et possède la même interpolation linéaire et la même cinématique que les éléments pentaèdres à 6 nœuds standard.

2.2 Discrétisation

2.2.1 Discrétisation du champ de déplacement

Les coordonnées spatiales x_i de l'élément sont reliées aux coordonnées nodales x_{iI} au moyen des fonctions de formes iso-paramétriques N_I par les formules :

$$\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{x_{iI}} \boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{x_{iI}} \boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$$

Dans la suite, et sauf mention contraire, on adoptera la convention de sommation pour les indices répétés. Les indices en minuscules i varient de un à trois et représentent les directions des coordonnées spatiales. Ceux en majuscules I varient de un à six et correspondent aux nœuds de l'élément.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les mêmes fonctions de formes sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément u_i en fonction des déplacements nodaux u_{iI} :

$$\boldsymbol{u_i} = \boldsymbol{U_{iI}}\, \boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{U_{iI}}\, \boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques linéaires $N_i(\xi, \eta, \zeta) = N_i(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \hat{x_3})$ associées à l'élément prismatique à six nœuds :

$$N_1 = \frac{1}{2}\hat{x}_2(1-\hat{x}_1) \qquad N_4 = \frac{1}{2}\hat{x}_2(1+\hat{x}_1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\hat{x}_3(1-\hat{x}_1) \qquad N_5 = \frac{1}{2}\hat{x}_3(1+\hat{x}_1)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3)(1-\hat{x}_1) \qquad N_6 = \frac{1}{2}(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3)(1+\hat{x}_1)$$

$$\hat{x}_1 = [-1,1]; \qquad \hat{x}_2 = [0,1]; \qquad \hat{x}_3 = [0,1-\hat{x}_2]$$

L'origine du repère est confondue avec le coin droit du triangle du plan médian de l'élément.

2.2.2 Opérateur gradient discrétisé

Le gradient $u_{i,j}$ du champ de déplacement est une fonction des déplacements $\mathbf{U}_{iI}$ des nœuds I dans la direction i

$$u_{i,j} = \mathbf{U}_{iI} N_{I,j}$$

Le tenseur de déformation linéaire est donné par la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

On va maintenant construire des vecteurs permettant d'exprimer la matrice B reliant les déformations aux déplacements sous une forme particulière.

De façon analogue à Belytschko-Bindeman [bib6], on introduit les trois vecteurs $\underline{\mathbf{b}}_i$, dérivées des fonctions de forme à l'origine des coordonnées :

$$\boldsymbol{b_i^T} = \boldsymbol{N_{,i}}(0) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i}\right]_{\hat{x}_1=\hat{x}_2=\hat{x}_3=0} \qquad i = 1,2,3$$

Ces 3 vecteurs sont constants et sont donnés par l'expression :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{b_i^T} = \begin{pmatrix} j_{i1} & j_{i2} & j_{i3} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

où les coefficients j_{kl} sont les coefficients de la matrice jacobienne évaluée à l'origine.

Introduisons également les vecteurs suivants :

$\mathbf{s}^T$ = (1 1 1 1 1 1)
$\mathbf{h}_1^T$ = (-1 0 0 1 0 0)
$\mathbf{h}_2^T$ = (0 -1 0 0 1 0)
$\mathbf{X}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}, x_{i6})$

Les trois vecteurs $\mathbf{X}_i^T$ représentent les coordonnées nodales des six nœuds. Les deux vecteurs $\mathbf{h}_\alpha^T$ représentent respectivement les fonctions h_1 et h_2 pour chacun des six nœuds, qui sont définies par :

$$h_1 = \hat{x}_1 \hat{x}_2 \qquad h_2 = \hat{x}_1 \hat{x}_3$$

Introduisons enfin les deux vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \frac{1}{2}\left[\mathbf{h}_\alpha - \sum_{j=1}^{3} \left(\mathbf{h}_\alpha^T . \mathbf{X}_j\right) \mathbf{b}_j\right] \qquad \alpha = 1,2$$

On peut vérifier par des considérations algébriques que les conditions d'orthogonalité suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{h}_\alpha = 0 \\
&\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{s} = 0 \\
&\mathbf{h}_\alpha{}^T \cdot \mathbf{s} = 0 \\
&\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{X}_j = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,3 \quad \alpha,\beta = 1,2 \\
&\mathbf{h}_\alpha{}^T \cdot \mathbf{h}_\beta = 2\delta_{\alpha\beta} \qquad \textbf{(1)} \\
&\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{X}_j = 0 \\
&\boldsymbol{\gamma}_\alpha{}^T \cdot \mathbf{h}_\beta = \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Ces vecteurs vont permettre d'exprimer la matrice B reliant les déformations aux déplacements sous une forme particulière utilisée par la suite.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le gradient du champ de déplacement peut maintenant s'écrire après calculs sous la forme (sans aucune approximation [bib6]) :

$$u_{i,j} = \left(\boldsymbol{b}_j^T + \boldsymbol{h}_{\alpha,j} \gamma_\alpha^T \right) \cdot \boldsymbol{U}_i$$

L'opérateur gradient symétrique (noté ∇_S) discrétisé reliant le tenseur de déformation au vecteur des déplacements nodaux

$$\nabla_s \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}$$

prend alors la forme matricielle :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x}\gamma_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y}\gamma_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z}\gamma_\alpha^T \\ \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y}\gamma_\alpha^T & \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x}\gamma_\alpha^T & 0 \\ \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z}\gamma_\alpha^T & 0 & \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x}\gamma_\alpha^T \\ 0 & \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z}\gamma_\alpha^T & \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y}\gamma_\alpha^T \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

2.3 Matrice de rigidité et stabilisation

2.3.1 Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'élément est donnée par :

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{V_e} \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B} \, dV$$

Les cinq points d'intégration considérés $\mathbf{P_i}$ se trouvent sur la même droite verticale. Leurs coordonnées et leurs poids d'intégration sont les suivants :

	$\hat{\mathbf{x}}_2$	$\hat{\mathbf{x}}_3$	$\hat{\mathbf{x}}_1$	ω
$\mathbf{P}_1$	1/3	1/3	-0.906179845938664	0.236926885056189
$\mathbf{P}_2$	1/3	1/3	-0.538469310105683	0.478628670499366
$\mathbf{P}_3$	1/3	1/3	0	0.568888888888889
$\mathbf{P}_4$	1/3	1/3	0.538469310105683	0.478628670499366
$\mathbf{P}_5$	1/3	1/3	0.906179845938664	0.236926885056189

Ainsi, l'expression de la rigidité $\mathbf{K}_e$ est :

$$K_e = \sum_{j=1}^{5} \omega(P_j) J(P_j) B^T(P_j).C.B(P_j) \quad \textbf{(3)}$$

où $J(P_j)$ est le Jacobien, calculé au point de Gauss j, de la transformation entre l'élément de référence et l'élément courant. La matrice de comportement élastique $\mathbf{C}$ choisie a la forme suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \bar{\lambda}+2\mu & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda}+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

où E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de cisaillement et $\bar{\lambda}=\frac{E\nu}{1-\nu^2}$ le coefficient de Lamé modifié. Cette loi est spécifique aux éléments SHB. Elle ressemble à celle que l'on aurait dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes, mis à part le terme (3,3).

Même si ce choix entraine un comportement anisotrope artificiel, il permet de satisfaire tous les tests sans introduire de blocage.

2.3.2 Analyse des modes « hourglass » pour l'élément SHB6

Les modes de « hourglass » sont des modes cinématiques qui sont dus à la sous-intégration et sont associés à une énergie nulle alors qu'ils induisent une déformation non nulle. Cette anomalie s'explique par la différence, qu'induit la sous-intégration, entre le noyau de l'opérateur de rigidité discrétisé et celui continu. Commençons d'abord par remarquer que l'opérateur gradient discrétisé sous-intégré associé aux cinq points d'intégration définis ci-dessus prend la forme de l'équation **(2)** avec $\alpha=1,2$.

Analysons maintenant le noyau de la matrice de rigidité obtenue par sous-intégration. D'après (3), cela revient à l'étude du rang de la matrice B dans la mesure où la matrice de comportement C n'est pas singulière. En d'autres termes, il suffit de rechercher les modes de déplacement $\boldsymbol{d}$ à déformation nulle, c'est à dire vérifiant :

$$\nabla_s(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{d}=\mathbf{0} \qquad (4)$$

Nous allons chercher désormais quels sont les modes de déformations qui donnent une énergie de déformation nulle. L'énergie de déformation s'écrit $w(\boldsymbol{\epsilon})=\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\,dV$ et comme $\boldsymbol{\epsilon}=\boldsymbol{B}.\boldsymbol{d}$. nous avons donc :

$$w(\boldsymbol{\epsilon})=\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}\,dV=\boldsymbol{d}^T\left[\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}\,dV\right]\boldsymbol{d}$$

et si nous considérons l'approximation suivante : $\boldsymbol{B}$ est calculé aux points d'intégration de Gauss, nous obtenons :

$$w(\boldsymbol{\epsilon})=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{d}$$

Ainsi rechercher les modes de déformations à énergie nulle c'est rechercher le noyau de $\boldsymbol{K}_e$

$$K_e\cdot\boldsymbol{X}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}(\xi_{Gj})\cdot\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$$

Ainsi rechercher les modes de hourglass c'est rechercher les vecteurs $\boldsymbol{X}$ tels que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{B}(\xi_{Gj})\cdot\boldsymbol{X}=\mathbf{0} \quad \forall \xi_{Gj} \qquad (5)$$

Il est naturel de retrouver dans le noyau de la rigidité $\boldsymbol{K}_e$ les modes associés aux mouvements de corps rigides. Pour un élément tridimensionnel tel que le prisme à 6 nœuds, ces mouvements rigidifiant sont composés de trois translations et de trois rotations. Ainsi le noyau de l'opérateur continu de rigidité est de dimension six et se réduit aux seuls modes suivants :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{S}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{S}} \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} & \underline{\mathbf{z}} & \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{z}} \\ \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\mathbf{x}} & -\underline{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

On vérifie aisément que chacun des six vecteurs colonnes ci-dessus satisfait à l'équation **(5)** et appartient donc au noyau de $\boldsymbol{K}_e$. Il suffit, pour le voir, d'utiliser l'expression **(2)** de $\boldsymbol{B}$ et les conditions d'orthogonalité **(1)**. Les trois premiers vecteurs colonnes correspondent aux translations selon les axes Ox, Oy et Oz respectivement. Les trois autres vecteurs sont relatifs aux rotations autour des axes Oz, Oy et Ox.

Nous recherchons désormais, outre les modes rigides précédents, des modes qui annulent également l'opérateur gradient discrétisé donné en **(2)**. Prenons une base de dix-huit vecteurs suivants :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{S}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{y}} & \underline{\mathbf{z}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{y}} & \underline{\mathbf{z}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{h}}_1 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{h}}_2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{S}} & \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{z}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{y}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{z}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{h}}_1 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{h}}_2 & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{S}} & \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\mathbf{x}} & -\underline{\mathbf{y}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{z}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{y}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{h}}_1 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{h}}_2 \end{bmatrix}$$

On peut montrer facilement que les vecteurs ci-dessus sont linéairement indépendants dans l'espace de dimension dix-huit. Des calculs élémentaires utilisant les conditions d'orthogonalité **(1)** montrent que les douze derniers vecteurs colonnes ne vérifient pas l'équation **(5)**.

Cela veut dire qu'il n'y a pas d'autres modes que les modes rigides qui annulent l'opérateur gradient discrétisé donné en **(2)**. Autrement dit, l'élément SHB6 ne présente pas de mode hourglass.

2.3.3 Projection par "Assumed local strain method"

La première étape est de se placer dans le repère local de l'élément défini par le repère $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ décrit dans la *Figure 1*. Les déformations seront donc désormais calculées dans ce repère. L'opérateur gradient discrétisé $\boldsymbol{B}$ sera projeté sur un sous espace approprié afin d'éviter les différents problèmes de blocage. Cette méthode est variationnellement cohérente avec le principe de Hu-Washizu si l'interpolation de la contrainte est choisie judicieusement (Simo et Hughes [15]). Cependant, il est très difficile de sélectionner de manière générale et systématique le bon champ de déformation postulée. Les champs de déformation postulée ne doivent présenter ni blocage volumique ni blocage en cisaillement.

Nous présentons ici un choix simple et acceptable. L'opérateur $\boldsymbol{B}$ est tout d'abord séparé en deux parties $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ et $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$. La matrice $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ contient les gradients dans le plan moyen de la coque et la déformation perpendiculaire, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$ contient les gradients associés aux déformations de cisaillement transverse.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \\ \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$$

Les blocages constatés dans l'élément proviennent des cisaillements transverses. On va chercher un schéma d'intégration qui permette de sous - intégrer cette partie de l'énergie. Pour ce faire on cherche à contrôler chaque composante entrant dans l'énergie de cisaillement transverse. Étant donnée la forme de la matrice $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ nous avons donc 12 termes non nuls qui interviennent dans la déformation. Ils seront contrôlés par l'introduction du paramètre c dans les matrices $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$. La matrice $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$ devient alors $\overline{\underline{\underline{\mathbf{B}}}}_2$:

$$\overline{\underline{\underline{\mathbf{B}}}}_2 = c \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité s'écrit maintenant :

$$\boldsymbol{K}_e = \int_V \bar{\boldsymbol{B}}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \bar{\boldsymbol{B}}\, dV = \int_V \bar{\boldsymbol{B}}_1^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_1\, dV + \int_V \bar{\boldsymbol{B}}_2^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_1\, dV + \int_V \bar{\boldsymbol{B}}_1^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_2\, dV + \int_V \bar{\boldsymbol{B}}_2^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \bar{\boldsymbol{B}}_2\, dV =$$
$$= \boldsymbol{K}_{e1} + \boldsymbol{K}_{e2} + \boldsymbol{K}_{e3} + \boldsymbol{K}_{e4}$$

Les matrices $\boldsymbol{K}_{e1,}\boldsymbol{K}_{e2,}\boldsymbol{K}_{e3,}\boldsymbol{K}_{e4}$ sont intégrées avec les cinq points de Gauss définis précédemment. La décomposition additive donnée plus haut, $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$, pour l'opérateur gradient discrétisé, fait que les termes croisés $\mathbf{K}_{e2}$ et $\mathbf{K}_{e3}$ s'annulent. Suite aux nombreux test numériques, il a été choisi de caractériser la matrice $\overline{\underline{\underline{\mathbf{B}}}}_2$ par le coefficient : $c = 0{,}45$, qui joue ici le rôle d'un facteur de réduction du cisaillement.

Ce choix donne à l'élément un bon comportement dans les cas de référence. Il est clair que cette stratégie, comme celle mise en place pour les éléments coques volumiques cubiques ne sont adaptés qu'au comportement quasi isotrope du matériau choisi.

2.4 Matrice de rigidité géométrique Ksigma

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La matrice $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\sigma}}$ a pour objectif de résoudre les problèmes de flambement. Nous rappelons ici que les modes de flambement sont les vecteurs propres du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\left(\boldsymbol{K}+\mu\,\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\,\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{u}$$

avec $\lambda=-\mu$, et μ est le coefficient multiplicateur du chargement.

En introduisant la déformation quadratique $\underline{\mathbf{e}}^{Q}$ telle que :

$$e_{ij}^{Q}(\delta\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})=\sum_{k=1}^{3}\delta u_{k,i}.\Delta u_{k,j}$$

On peut définir cette matrice de rigidité géométrique par :

$$\delta\boldsymbol{u}^{T}\cdot\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\Delta\boldsymbol{u}=\int_{\Omega_0}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{Q}}(\delta\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})\,d\,\Omega=\int_{\Omega_0}\boldsymbol{\sigma}:\nabla\delta\boldsymbol{u}^{T}\nabla\Delta\boldsymbol{u}\;\;d\,\Omega$$

Afin d'exprimer cette matrice dans l'espace discrétisé, introduisons les opérateurs gradient quadratique discrétisés $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{Q}$ (en notation matricielle) tels que :

$$\underline{\mathbf{e}}^{Q}\left(\delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{u}\right)=\begin{bmatrix}e_{11}^{Q}\\e_{22}^{Q}\\e_{33}^{Q}\\e_{12}^{Q}+e_{21}^{Q}\\e_{13}^{Q}+e_{31}^{Q}\\e_{23}^{Q}+e_{32}^{Q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{\delta\mathbf{u}}^{T}\cdot\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11}^{Q}\cdot\underline{\Delta\mathbf{u}}\\\underline{\delta\mathbf{u}}^{T}\cdot\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22}^{Q}\cdot\underline{\Delta\mathbf{u}}\\\underline{\delta\mathbf{u}}^{T}\cdot\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{33}^{Q}\cdot\underline{\Delta\mathbf{u}}\\\underline{\delta\mathbf{u}}^{T}\cdot\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12}^{Q}\cdot\underline{\Delta\mathbf{u}}\\\underline{\delta\mathbf{u}}^{T}\cdot\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{13}^{Q}\cdot\underline{\Delta\mathbf{u}}\\\underline{\delta\mathbf{u}}^{T}\cdot\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23}^{Q}\cdot\underline{\Delta\mathbf{u}}\end{bmatrix}$$

Les différents termes $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{ij}^{Q}$ sont donnés par les équations suivantes :

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11}^{Q}=\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\;;\;\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22}^{Q}=\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\;;\;\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{33}^{Q}=\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12}^{Q}=\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{13}^{Q}=c^{2}\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23}^{Q}=c^{2}\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}}\\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_2\underline{\mathbf{B}}_3^{\mathrm{T}}+\underline{\mathbf{B}}_3\underline{\mathbf{B}}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU

avec les vecteurs $\underline{\mathbf{B}}_i$ (i = 1, 2, 3) définis comme :

$$\underline{\mathbf{B}}_i = \left(\underline{\mathbf{b}}_i + h_{\alpha,i}\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha\right)$$

Remarque : Nous devons multiplier les matrices $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{13}^{\mathbf{Q}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23}^{\mathbf{Q}}$ par le coefficient $c^2 = 0,45^2 = 0,2025$ car l'élément SHB6 est projeté par la technique « *Assumed local strain method* » voir section 2.3.3 .

Avec ces notations, la contribution à la matrice de rigidité géométrique, $\underline{\underline{\mathbf{k}}}_{\boldsymbol{\sigma}}$, au point de Gauss ξ_j est donnée par :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{k}}}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\xi_j\right) = {} & \sigma_{11}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11}^{Q}\left(\xi_j\right) + \sigma_{22}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22}^{Q}\left(\xi_j\right) + \sigma_{33}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{33}^{Q}\left(\xi_j\right) \\ & + \sigma_{12}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12}^{Q}\left(\xi_j\right) + \sigma_{13}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{13}^{Q}\left(\xi_j\right) + \sigma_{23}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23}^{Q}\left(\xi_j\right)\end{aligned}$$

Par intégration sur les points de Gauss de l'élément, la matrice de rigidité géométrique s'obtient par la formule :

$$\underline{\underline{K}}_{\sigma} = \sum_{j=1}^{5} \omega(\xi_j) J(\xi_j) \underline{\underline{k}}_{\sigma}(\xi_j)$$

2.5 Forces suiveuses et matrice de pression K_p

Les forces de pression suiveuses sont présentes dans la matrice tangente via la matrice $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_P$, car les forces externes suiveuses dépendent du déplacement [R3.03.04]. Les forces de pression suiveuses s'écrivent :

$$\int_{\partial\Omega} p\,\boldsymbol{n}^T\cdot\boldsymbol{u}\,dS = \int_{\partial\Omega_0} p\det[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})]\,\boldsymbol{n_0}^T\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})^{-\mathrm{T}}\,dS_0 = p\,\boldsymbol{F_0} - p\,\boldsymbol{K}_p\cdot\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{1} + \nabla\boldsymbol{u}$$

en utilisant les notations :

- $\underline{\mathbf{n}}_0{}^T = (n_1, n_2, n_3)$, normale à la surface extérieure de l'élément dans la configuration de référence ;
- $\underline{\mathbf{b}}_i^{\%}$, vecteur de dimension 3, dérivée des fonctions de forme aux 3 nœuds de la face de l'élément chargée en pression ;
- S_0 aire de la face chargée en pression. Pour l'élément SHB6, cette surface S_0 vaut $\frac{1}{2}$.

La formulation précédente conduit à une matrice non-symétrique. On sait que l'on peut néanmoins utiliser une formulation symétrique si les forces extérieures dues à la pression dérivent d'un potentiel. C'est le cas si les forces de pression ne travaillent pas sur la frontière du domaine modélisé. On considère donc que la partie symétrique de la matrice suffit. La matrice symétrisée prend la forme suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{K}_p = S_0 \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_1 - \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_2 & \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_1 - \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_3 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_1 - \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_2 & \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_1 - \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_3 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_1 - \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_2 & \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_1 - \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_3 \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_2 - \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_2 - \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_3 \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_2 - \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_2 - \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_3 \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_2 - \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_2 - \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_3 \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_3 - \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_1 & \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_3 - \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_2 & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_3 - \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_1 & \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_3 - \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_2 & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_1^T n_3 - \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_1 & \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T n_3 - \tilde{\boldsymbol{b}}_3^T n_2 & 0 \end{vmatrix}$$

C’est une matrice (9,9), qu’il faut multiplier par les déplacements des 3 nœuds de la face sur laquelle on applique une pression.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Eléments SHB15 et SHB20

Dans ce paragraphe, on présente les modélisations des éléments finis coques volumiques quadratiques SHB15 et SHB20.

L'élément SHB15 est un prisme à quinze nœuds purement tridimensionnel avec trois degrés de liberté en déplacement à chaque nœud, et il a également une direction privilégiée appelée « épaisseur » qui est normale au plan moyen du prisme. L'intégration numérique réduite est utilisée (3 points de Gauss dans le plan). L'intégration à travers l'épaisseur s'appuie sur 5 points de Gauss.

L'élément SHB20 est un hexaèdre à vingt nœuds purement tridimensionnel avec trois degrés de liberté en déplacement à chaque nœud, et il a aussi une direction privilégiée appelée « épaisseur » qui est normale au plan moyen de l'hexaèdre. L'intégration numérique réduite est utilisée (4 points de Gauss dans le plan). L'intégration à travers l'épaisseur s'appuie sur 5 points de Gauss.

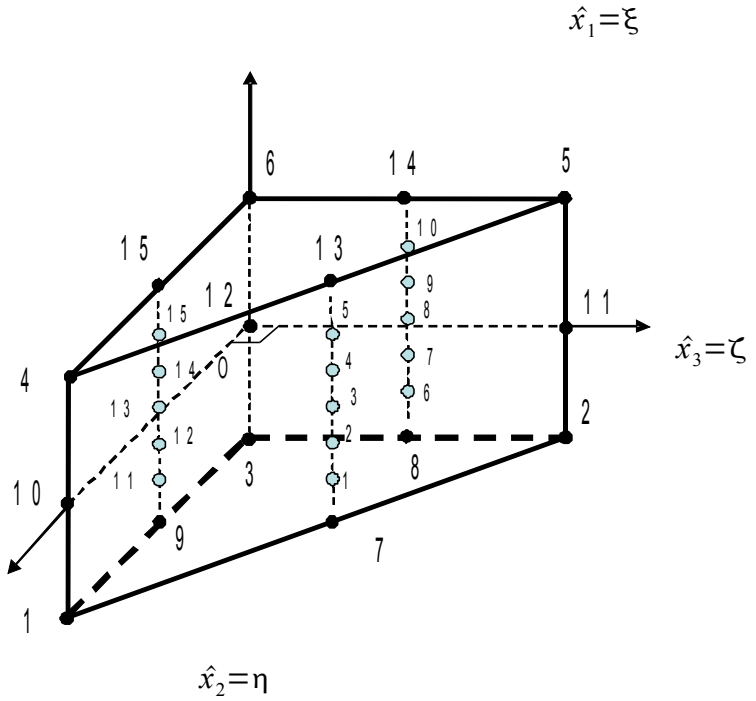
Contrairement aux éléments linéaires ces éléments finis n'ont ni stabilisation ni projection.

3.1 Cinématique et interpolation des éléments SHB15 et SHB20

3.1.1 Élément SHB15

L'élément SHB15 est formulé dans les axes locaux du plan moyen. La F igure 3.1.1-a représente la géométrie d'un élément de référence SHB15 et ses points d'intégration.

Le repère des coordonnées locales de l'élément de référence est défini par : ξ, η, ζ ou $\hat{x_1}, \hat{x_2}, \hat{x_3}$



F igure 3.1.1-a . Géométrie de l'élément de référence SHB15 et ses points d'intégration

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Coordonnées des noeuds:

$1(-1,1,0)$; $2(-1,0,1)$; $3(-1,0,0)$; $4(1,1,0)$; $5(1,0,1)$; $6(1,0,0)$;

$7\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; $8\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$; $9\left(-1,\frac{1}{2},0\right)$;

$10(0,1,0)$; $11(0,0,1)$; $12(0,0,0)$; $13\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; $14\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$; $15\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.

L'élément SHB15 est un élément quadratique iso-paramétrique. Les coordonnées spatiales $\mathbf{x}_i$ sont reliées aux coordonnées nodales $\mathbf{x}_{iI}$ au moyen des fonctions de forme $\mathbf{N}_I$ par les formules :

$$\boldsymbol{x_i}=\boldsymbol{x_{iI}}\,\boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)=\sum_{i=1}^{15}\boldsymbol{x_{iI}}\,\boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$$

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément $\mathbf{u}_i$ en termes des déplacements nodaux $\boldsymbol{U_{iI}}$:

:

$$\boldsymbol{u_i}=\boldsymbol{u_{iI}}\,\boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)=\sum_{i=1}^{15}\boldsymbol{U_{iI}}\,\boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3) \qquad \textbf{(6)}$$

3.1.2 Elément SHB20

L'élément SHB20 est formulé dans les axes locaux du plan moyen. La Figure 3.1.2-a représente la géométrie d'un élément de référence SHB20 et ses points d'intégration.

Le repère des coordonnées locales de l'élément de référence est défini par : ξ,η,ζ ou $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3$

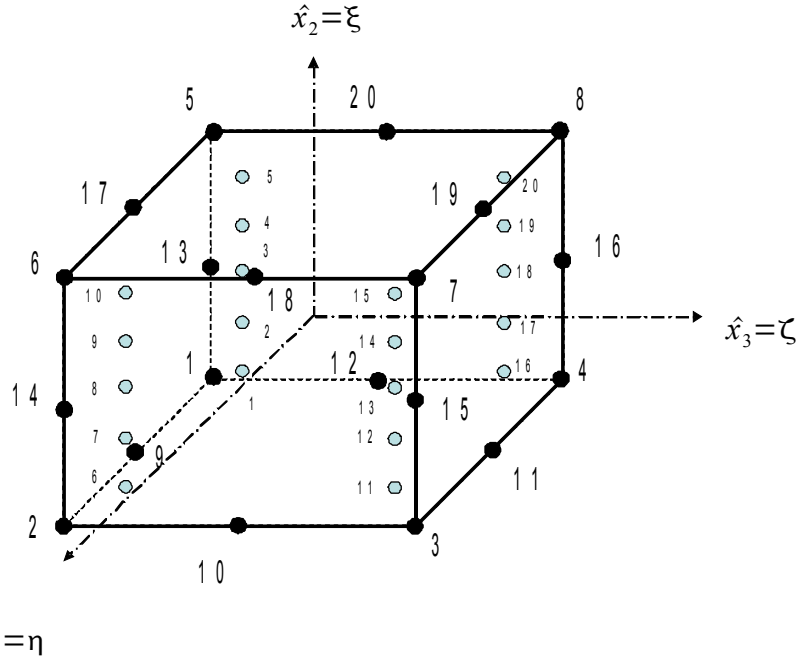


Figure 3.1.2-a. Géométrie de l'élément de référence SHB20 et ses points d'intégration

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Coordonnées des noeuds:

$1(-1,-1,-1)$ $2(1,-1,-1)$ $3(1,1,-1)$ $4(-1,1,-1)$
$5(-1,-1,1)$ $6(1,-1,1)$ $7(1,1,1)$ $8(-1,1,1)$
$9(0,-1,-1)$ $10(1,0,-1)$ $11(0,1,-1)$ $12(-1,0,-1)$
$13(-1,-1,0)$ $14(1,-1,0)$ $15(1,1,0)$ $16(-1,1,0)$
$17(0,-1,1)$ $18(1,0,1)$ $19(0,1,1)$ $20(-1,0,1)$

L'élément SHB20 est aussi un élément quadratique iso-paramétrique. Les coordonnées spatiales $\mathbf{x}_i$ sont reliées aux coordonnées nodales $\mathbf{x}_{iI}$ au moyen des fonctions de forme $\mathbf{N}_I$ par les formules :

$$\boldsymbol{x_i}=\boldsymbol{x_{iI}}\,\boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)=\sum_{i=1}^{20}\boldsymbol{x_{iI}}\,\boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$$

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément $\mathbf{u}_i$ en termes des déplacements nodaux $\boldsymbol{U_{iI}}$:

$$\boldsymbol{u_i}=\boldsymbol{u_{iI}}\,\boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)=\sum_{i=1}^{20}\boldsymbol{U_{iI}}\,\boldsymbol{N_I}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3) \quad (6)$$

3.2 Opérateur gradient discrétisé

3.2.1 Elément SHB15

L'interpolation du champ de déplacement de l'élément (**6**) va nous permettre de définir le taux de déformation et d'écrire les relations reliant les déformations aux déplacements nodaux. On commence d'abord par écrire le gradient $\mathbf{u}_{i,j}$ du champ de déplacement :

$$\boldsymbol{u_{i,j}}=\boldsymbol{U_{iI}}\,\boldsymbol{N_{I,j}} \quad (7)$$

Le tenseur de déformation ε_{ij} est donné ensuite par la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad (8)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques quadratiques $N_i(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$, associées à l'élément prismatique à quinze nœuds:

$$N_1=\frac{1}{2}\hat{x}_2(1-\hat{x}_1)(2\hat{x}_2-2-\hat{x}_1) \qquad N_4=\frac{1}{2}\hat{x}_2(1+\hat{x}_1)(2\hat{x}_2-2+\hat{x}_1)$$
$$N_2=\frac{1}{2}\hat{x}_3(1-\hat{x}_1)(2\hat{x}_3-2-\hat{x}_1) \qquad N_5=\frac{1}{2}\hat{x}_3(1+\hat{x}_1)(2\hat{x}_3-2+\hat{x}_1) \quad (9)$$
$$N_3=-\frac{1}{2}(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3)(1-\hat{x}_1)\hat{x}_1 \qquad N_6=\frac{1}{2}(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3)(1+\hat{x}_1)\hat{x}_1$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$N_7 = 2(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2\hat{x}_3 \qquad N_8 = 2(1-\hat{x}_1)\left(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3\right)\hat{x}_3 \qquad N_9 = 2(1-\hat{x}_1)\hat{x}_2\left(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3\right)$$

$$N_{10} = (1-\hat{x}_1)(1+\hat{x}_1)\hat{x}_2 \qquad N_{11} = (1-\hat{x}_1)(1+\hat{x}_1)\hat{x}_3 \qquad N_{12} = (1-\hat{x}_1)(1+\hat{x}_1)\left(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3\right)$$

$$N_{13} = 2(1+\hat{x}_1)\hat{x}_2\hat{x}_3 \qquad N_{14} = 2(1+\hat{x}_1)\left(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3\right)\hat{x}_3 \qquad N_{15} = 2(1+\hat{x}_1)\hat{x}_2\left(1-\hat{x}_2-\hat{x}_3\right)$$

$$\hat{x}_1 = [-1,1]; \qquad \hat{x}_2 = [0,1]; \qquad \hat{x}_3 = [0,1-\hat{x}_2]$$

En combinant les équations précédentes on arrive à développer le champ de déplacement comme étant la somme d'un terme constant, de termes linéaires en x_i, et de termes faisant intervenir les fonctions h_α □

Pour simplifier les écritures, on notera $\xi = \hat{x}_1$, $\eta = \hat{x}_2$, $\zeta = \hat{x}_3$

$$\begin{cases} u_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}\,h_1 + c_{2i}\,h_2 + c_{3i}\,h_3 + \\ \qquad c_{4i}\,h_4 + c_{5i}\,h_5 + c_{6i}\,h_6 + c_{7i}\,h_7 + c_{8i}\,h_8 + c_{9i}\,h_9 + c_{10i}\,h_{10} + c_{11i}\,h_{11} \\ i = 1,2,3 \\ h_1 = \xi\zeta, h_2 = \eta\zeta, h_3 = \xi\eta, h_4 = \xi\eta\zeta, h_5 = \xi^2, h_6 = \eta^2, \\ h_7 = \zeta^2, h_8 = \xi^2\zeta, h_9 = \eta^2\zeta, h_{10} = \xi\zeta^2, h_{11} = \eta\zeta^2 \end{cases} \quad (10)$$

En évaluant l'équation **(6)** aux nœuds de l'élément, on arrive aux trois systèmes de quinze équations suivants :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{d}}_i = a_{0i}\underline{\mathbf{S}} + a_{1i}\underline{\mathbf{x}}_1 + a_{2i}\underline{\mathbf{x}}_2 + a_{3i}\underline{\mathbf{x}}_3 + c_{1i}\underline{\mathbf{h}}_1 + c_{2i}\underline{\mathbf{h}}_2 + c_{3i}\underline{\mathbf{h}}_3 + \\ \qquad c_{4i}\underline{\mathbf{h}}_4 + c_{5i}\underline{\mathbf{h}}_5 + c_{6i}\underline{\mathbf{h}}_6 + c_{7i}\underline{\mathbf{h}}_7 + c_{8i}\underline{\mathbf{h}}_8 + c_{9i}\underline{\mathbf{h}}_9 + c_{10i}\underline{\mathbf{h}}_{10} + c_{11i}\underline{\mathbf{h}}_{11} \\ i = 1,2,3 \end{cases} \quad (11)$$

Ainsi les vecteurs $\underline{\mathbf{d}}_i$ et $\underline{\mathbf{x}}_i$ représentent, respectivement, les déplacements et les coordonnées nodales et sont donnés par :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{d}}_i^T = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6}, u_{i>7}, u_{i8}, u_{i9}, u_{i10}, u_{i11}, u_{i12}, u_{i13}, u_{i14}, u_{i15}) \\ \underline{\mathbf{x}}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}, x_{i6}, x_{i7}, x_{i8}, x_{i9}, x_{i10}, x_{i11}, x_{i12}, x_{i13}, x_{i14}, x_{i15}) \end{cases} \quad (12)$$

Les vecteurs **s** et $\mathbf{h}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3,...,11)$ sont donnés quant à eux par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{S}}^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \\ \underline{\mathbf{h}}_1^T = \left(0\ -\frac{1}{2}\ -1\ -\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_2^T = \left(0\ 0\ 0\ -\frac{1}{2}\ -1\ -\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 1\ \frac{1}{2}\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_3^T = \left(0\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ 0\ 0\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_4^T = \left(0\ 0\ 0\ -\frac{1}{4}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ 0\ 0\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_5^T = \left(0\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{4}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{4}\ 0\ 0\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_6^T = \left(0\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{4}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{4}\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_7^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \\ \underline{\mathbf{h}}_8^T = \left(0\ -\frac{1}{4}\ -1\ -\frac{1}{4}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{4}\ 0\ 0\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_9^T = \left(0\ 0\ 0\ -\frac{1}{4}\ -1\ -\frac{1}{4}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{4}\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_{10}^T = \left(0\ \frac{1}{2}\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\right) \\ \underline{\mathbf{h}}_{11}^T = \left(0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 1\ \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (13)$$

Pour arriver à une écriture avantageuse de l'opérateur gradient discrétisé $\mathbf{B}$, on va introduire les trois vecteurs $\mathbf{b_i}$ définis par :

$$\mathbf{b_i^T} = \mathbf{N^T}_{,i}(0) = {}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x_i}}(0) \quad \text{i = 1, 2,3} \qquad (14)$$

Si nous nous plaçons en $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3) = (0,0,0)$ alors nous obtenons :

$$\mathbf{b_i^T} = \mathbf{N^T}_{,i}(0) = \mathbf{cste}$$

où $\mathbf{N^T}$ représente: $(\mathrm{N_1}\ \ \mathrm{N_2}\ \ \mathrm{N_3}\ \ .\ \ .\ \ \mathrm{N_{15}})$.

$$\mathbf{b_i^T} = \mathbf{N^T}_{,i}(0) = (\frac{\partial \mathrm{N}_{1}}{\partial \mathrm{x_i}}(0), ..., \frac{\partial \mathrm{N}_{15}}{\partial \mathrm{x_i}}(0))$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial N_I}{\partial x_j}=\left(\frac{\partial N_I}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x_j}+\frac{\partial N_I}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial x_j}+\frac{\partial N_I}{\partial \zeta}.\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\right)_{|\xi=\eta=\zeta=0}=\left(\frac{\partial N_I}{\partial \xi}.j_{1j}+\frac{\partial N_I}{\partial \eta}.j_{2j}+\frac{\partial N_I}{\partial \zeta}.j_{3j}\right)_{\xi=\eta=\zeta=0}$$

$$avec \quad I=1,2,...,15 \quad et \quad j=1,2,3$$

$$\mathbf{F}^{-1}{}_{|\xi=\eta=\zeta=0}=\begin{pmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z}\\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z}\end{pmatrix}_{|\xi=\eta=\zeta=0}=\begin{pmatrix}j_{11} & j_{12} & j_{13}\\ j_{21} & j_{22} & j_{23}\\ j_{31} & j_{32} & j_{33}\end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$N_{1,\xi}=\frac{(1-\zeta)}{2}(4\xi+4\eta+\zeta-2) \quad N_{1,\eta}=\frac{(1-\zeta)}{2}(4\xi+4\eta+\zeta-2) \quad N_{1,\zeta}=\frac{(1-\xi-\eta)}{2}(2\xi+2\eta+2\zeta-1)$$
$$N_{2,\xi}=2(1-\zeta)(1-2\xi-\eta) \quad N_{2,\eta}=-2(1-\zeta)\xi \quad N_{2,\zeta}=-2\xi(1-\xi-\eta)$$
$$N_{3,\xi}=\frac{(1-\zeta)}{2}(-2+4\xi-\zeta) \quad N_{3,\eta}=0 \quad N_{3,\zeta}=\frac{\xi}{2}(1-2\xi+2\zeta)$$
$$N_{4,\xi}=2(1-\zeta)\eta \quad N_{4,\eta}=2(1-\zeta)\xi \quad N_{4,\zeta}=-2\xi\eta$$
$$N_{5,\xi}=0 \quad N_{5,\eta}=\frac{(1-\zeta)}{2}(-2+4\eta-\zeta) \quad N_{5,\zeta}=\frac{\eta}{2}(1-2\eta+2\zeta)$$
$$N_{6,\xi}=-2(1-\zeta)\eta \quad N_{6,\eta}=2(1-\zeta)(1-\xi-2\eta) \quad N_{6,\zeta}=-2\eta(1-\xi-\eta)$$
$$N_{7,\xi}=-1+\zeta^2 \quad N_{7,\eta}=-1+\zeta^2 \quad N_{7,\zeta}=-2\zeta(1-\xi-\eta)$$
$$N_{8,\xi}=1-\zeta^2 \quad N_{8,\eta}=0 \quad N_{8,\zeta}=-2\zeta\xi$$
$$N_{9,\xi}=0 \quad N_{9,\eta}=1-\zeta^2 \quad N_{9,\zeta}=-2\zeta\eta$$
$$N_{10,\xi}=\frac{(1+\zeta)}{2}(4\xi+4\eta-\zeta-2) \quad N_{10,\eta}=\frac{(1+\zeta)}{2}(4\xi+4\eta-\zeta-2) \quad N_{10,\zeta}=\frac{(1-\xi-\eta)}{2}(-2\xi-2\eta+2\zeta+1)$$
$$N_{11,\xi}=2(1+\zeta)(1-2\xi-\eta) \quad N_{11,\eta}=-2(1+\zeta)\xi \quad N_{11,\zeta}=2\xi(1-\xi-\eta)$$
$$N_{12,\xi}=\frac{(1+\zeta)}{2}(-2+4\xi+\zeta) \quad N_{12,\eta}=0 \quad N_{12,\zeta}=\frac{\xi}{2}(-1+2\xi+2\zeta)$$
$$N_{13,\xi}=2(1+\zeta)\eta \quad N_{13,\eta}=2(1+\zeta)\xi \quad N_{13,\zeta}=2\xi\eta$$
$$N_{14,\xi}=0 \quad N_{14,\eta}=\frac{(1+\zeta)}{2}(-2+4\eta+\zeta) \quad N_{14,\zeta}=\frac{\eta}{2}(-1+2\eta+2\zeta)$$
$$N_{15,\xi}=-2(1+\zeta)\eta \quad N_{15,\eta}=2(1+\zeta)(1-2\eta-\xi) \quad N_{15,\zeta}=2\eta(1-\xi-\eta)$$

Donc, en $(\hat{\mathbf{x}}_1,\hat{\mathbf{x}}_2,\hat{\mathbf{x}}_3)=(0,0,0)$, nous avons :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{\mathbf{b}}^T{}_i = \begin{pmatrix} j_{i1} & j_{i2} & j_{i3} \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De plus, on peut vérifier par des considérations algébriques que les conditions d'orthogonalité suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i^T . \underline{\mathbf{h}}_\alpha = 0; \quad \underline{\mathbf{b}}_i^T . \underline{\mathbf{S}} = 0; \quad \underline{\mathbf{b}}_i^T . \underline{\mathbf{x}}_j = \delta_{ij} \\ \underline{\mathbf{h}}_1^T . \underline{\mathbf{S}} = 0; \quad \underline{\mathbf{h}}_2^T . \underline{\mathbf{S}} = 0; \quad \underline{\mathbf{h}}_3^T . \underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}; \quad \underline{\mathbf{h}}_4^T . \underline{\mathbf{S}} = 0; \quad \underline{\mathbf{h}}_5^T . \underline{\mathbf{S}} = 4; \quad \underline{\mathbf{h}}_6^T . \underline{\mathbf{S}} = 4; \\ \underline{\mathbf{h}}_7^T . \underline{\mathbf{S}} = 12; \quad \underline{\mathbf{h}}_8^T . \underline{\mathbf{S}} = 0 \quad \underline{\mathbf{h}}_9^T . \underline{\mathbf{S}} = 0 \quad \underline{\mathbf{h}}_{10}^T . \underline{\mathbf{S}} = 4 \quad \underline{\mathbf{h}}_{11}^T . \underline{\mathbf{S}} = 4 \\ \underline{\mathbf{h}}_m^T . \underline{\mathbf{h}}_n = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{13}{4} & \frac{1}{8} & 3 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{13}{4} & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & 3 & 12 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 4 & 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \\ \alpha = 1,2,...,11 \qquad i,j = 1,2,3 \\ \delta \text{ désigne le symbol de Kronec} \ker ; m,n = 1,2,...,11 \end{cases} \quad (15)$$

A ce stade, on peut déterminer les constantes inconnues qui interviennent dans l'écriture (10) du champ de déplacement en multipliant scalairement l'équation (11) par $\underline{\mathbf{b}}_j^T$, $\underline{\mathbf{S}}^T$ et $\underline{\mathbf{h}}_\alpha^T$ respectivement, et en utilisant les relations d'orthogonalité (15).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient après calculs : $a_{ji} = \underline{\mathbf{b}}_j^T . \underline{\mathbf{d}}_i \qquad c_{\alpha i} = \underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T . \underline{\mathbf{d}}_i$

avec

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T = n_{\alpha 1}\left(\underline{\mathbf{h}}_1^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_1^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 2}\left(\underline{\mathbf{h}}_2^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_2^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) +$$
$$+ n_{\alpha 3}\left[\left(\underline{\mathbf{h}}_3^T - \frac{1}{30}\underline{\mathbf{S}}^T\right) - \left(\left(\underline{\mathbf{h}}_3^T - \frac{1}{30}\underline{\mathbf{S}}^T\right) . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right] + n_{\alpha 4}\left(\underline{\mathbf{h}}_4^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_4^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right)$$
$$+ n_{\alpha 5}\left[\left(\underline{\mathbf{h}}_5^T - \frac{4}{15}\underline{\mathbf{S}}^T\right) - \left(\left(\underline{\mathbf{h}}_5^T - \frac{4}{15}\underline{\mathbf{S}}^T\right) . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right] + n_{\alpha 6}\left(\underline{\mathbf{h}}_6^T - \frac{4}{15}\underline{\mathbf{S}}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_6^T - \frac{4}{15}\underline{\mathbf{S}}^T\right) . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T$$
$$+ n_{\alpha 7}\left(\left(\underline{\mathbf{h}}_7^T - \frac{4}{5}\underline{\mathbf{S}}^T\right) - \left(\left(\underline{\mathbf{h}}_7^T - \frac{4}{5}\underline{\mathbf{S}}^T\right) . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 8}\left(\underline{\mathbf{h}}_8^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_8^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 9}\left(\underline{\mathbf{h}}_9^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_9^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right)$$
$$+ n_{\alpha 10}\left(\left(\underline{\mathbf{h}}_{10}^T - \frac{4}{15}\underline{\mathbf{S}}^T\right) - \left(\left(\underline{\mathbf{h}}_{10}^T - \frac{4}{15}\underline{\mathbf{S}}^T\right) . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 11}\left(\underline{\mathbf{h}}_{11}^T - \frac{4}{15}\underline{\mathbf{S}}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_{11}^T - \frac{4}{15}\underline{\mathbf{S}}^T\right) . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T$$

$$\left[\mathbf{n}_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix}
\frac{17}{2} & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{17}{2} & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{256}{17} & 0 & \frac{36}{17} & \frac{36}{17} & 2 & 0 & 0 & -\frac{58}{17} & -\frac{58}{17} \\
-8 & -8 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{36}{17} & 0 & \frac{316}{187} & \frac{146}{187} & 1 & 0 & 0 & -\frac{324}{187} & -\frac{171}{187} \\
0 & 0 & \frac{36}{17} & 0 & \frac{146}{187} & \frac{316}{187} & 1 & 0 & 0 & -\frac{171}{187} & -\frac{324}{187} \\
0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\
-9 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -9 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{58}{17} & 0 & -\frac{324}{187} & -\frac{171}{187} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{505}{187} & \frac{585}{374} \\
0 & 0 & -\frac{58}{17} & 0 & -\frac{171}{187} & -\frac{324}{187} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{585}{374} & \frac{505}{187}
\end{bmatrix} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, ..., 11$$

Le champ de déplacement se met finalement sous la forme suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned}
u_i &= a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}\,h_1 + c_{2i}\,h_2 + c_{3i}\,h_3 + c_{4i}\,h_4 + c_{5i}\,h_5 + c_{6i}\,h_6 \\
&\quad + c_{7i}\,h_7 + c_{8i}\,h_8 + c_{9i}\,h_9 + c_{10i}\,h_{10} + c_{11i}\,h_{11} \\
u_i &= a_{0i} + \underline{\mathbf{b}}_1^T.\underline{\mathbf{d}}_i x_1 + \underline{\mathbf{b}}_2^T.\underline{\mathbf{d}}_i x_2 + \underline{\mathbf{b}}_3^T.\underline{\mathbf{d}}_i x_3 + \underline{\gamma}_1^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_1 + \underline{\gamma}_2^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_2 + \\
&\quad + \underline{\gamma}_3^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_3 + \underline{\gamma}_4^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_4 + \underline{\gamma}_5^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_5 + \underline{\gamma}_6^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_6 + \underline{\gamma}_7^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_7 \\
&\quad + \underline{\gamma}_8^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_8 + \underline{\gamma}_9^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_9 + \underline{\gamma}_{10}^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_{10} + \underline{\gamma}_{11}^T.\underline{\mathbf{d}}_i\,h_{11} \\
u_i &= a_{0i} + (\underline{\mathbf{b}}_1^T x_1 + \underline{\mathbf{b}}_2^T x_2 + \underline{\mathbf{b}}_3^T x_3 + \underline{\gamma}_1^T\,h_1 + \underline{\gamma}_2^T\,h_2 + \underline{\gamma}_3^T\,h_3 + \underline{\gamma}_4^T\,h_4 + \underline{\gamma}_5^T\,h_5 \\
&\quad + \underline{\gamma}_6^T\,h_6 + \underline{\gamma}_7^T\,h_7 + \underline{\gamma}_8^T\,h_8 + \underline{\gamma}_9^T\,h_9 + \underline{\gamma}_{10}^T\,h_{10} + \underline{\gamma}_{11}^T\,h_{11}).\underline{\mathbf{d}}_i
\end{aligned}$$

(16)

En dérivant la formule ci-dessus par rapport à x_j , on obtient le gradient de déplacement :

$$u_{i,j} = \left(\boldsymbol{b}_j^t + \sum_{\alpha=1}^{11} h_{\alpha,j}\,\gamma_\alpha^T \right) \cdot \boldsymbol{d}_i \qquad (17)$$

3.2.2 Elément SHB20

L'interpolation du champ de déplacement de l'élément va nous permettre de définir le taux de déformation et d'écrire les relations reliant les déformations aux déplacements nodaux. On commence d'abord par écrire le gradient $\mathbf{u}_{i,j}$ du champ de déplacement :

$$\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_{iI}\mathbf{N}_{I,j} \qquad (18)$$

Le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ est donné ensuite par la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (19)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques quadratiques $\boldsymbol{N}_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ associées à l'élément hexaédrique à vingt nœuds :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{N}_1=\frac{1}{8}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3\right)\left(-2-\hat{\mathbf{x}}_1-\hat{\mathbf{x}}_2-\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_2=\frac{1}{8}\left(1+\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3\right)\left(-2+\hat{\mathbf{x}}_1-\hat{\mathbf{x}}_2-\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_3=\frac{1}{8}\left(1+\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3\right)\left(-2+\hat{\mathbf{x}}_1+\hat{\mathbf{x}}_2-\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_4=\frac{1}{8}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3\right)\left(-2-\hat{\mathbf{x}}_1+\hat{\mathbf{x}}_2-\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_5=\frac{1}{8}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_3\right)\left(-2-\hat{\mathbf{x}}_1-\hat{\mathbf{x}}_2+\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_6=\frac{1}{8}\left(1+\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_3\right)\left(-2+\hat{\mathbf{x}}_1-\hat{\mathbf{x}}_2+\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_7=\frac{1}{8}\left(1+\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_3\right)\left(-2+\hat{\mathbf{x}}_1+\hat{\mathbf{x}}_2+\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_8=\frac{1}{8}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_3\right)\left(-2-\hat{\mathbf{x}}_1+\hat{\mathbf{x}}_2+\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_9=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1^{\,2}\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_{10}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2^{\,2}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$

(20)

$$\mathbf{N}_{11}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1^{\,2}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3\right) \qquad \mathbf{N}_{12}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2^{\,2}\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_{13}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3^{\,2}\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2\right) \qquad \mathbf{N}_{14}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3^{\,2}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2\right)$$
$$\mathbf{N}_{15}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3^{\,2}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_2\right) \qquad \mathbf{N}_{16}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_3^{\,2}\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_2\right)$$
$$\mathbf{N}_{17}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1^{\,2}\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_3\right) \qquad \mathbf{N}_{18}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2^{\,2}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$
$$\mathbf{N}_{19}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1^{\,2}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_2\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_3\right) \qquad \mathbf{N}_{20}=\frac{1}{4}\left(1-\hat{\mathbf{x}}_2^{\,2}\right)\left(1-\hat{\mathbf{x}}_1\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}_3\right)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1=[-1,1]; \qquad \hat{\mathbf{x}}_2=[-1,1]; \qquad \hat{\mathbf{x}}_3=[-1,1]$$

En combinant les équations précédentes on arrive à développer le champ de déplacement comme étant la somme d'un terme constant, de termes linéaires en x_i , et de termes faisant intervenir les fonctions h_α □

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \mathrm{u}_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}\,\mathrm{h}_1 + c_{2i}\,\mathrm{h}_2 + c_{3i}\,\mathrm{h}_3 + c_{4i}\,\mathrm{h}_4 + c_{5i}\,\mathrm{h}_5 + c_{6i}\,\mathrm{h}_6 + c_{7i}\,\mathrm{h}_7 \\ \qquad + c_{8i}\,\mathrm{h}_8 + c_{9i}\,\mathrm{h}_9 + c_{10i}\,\mathrm{h}_{10} + c_{11i}\,\mathrm{h}_{11} + c_{12i}\,\mathrm{h}_{12} + c_{13i}\,\mathrm{h}_{13} + c_{14i}\,\mathrm{h}_{14} + c_{15i}\,\mathrm{h}_{15} + c_{16i}\,\mathrm{h}_{16} \\ i = 1,2,3 \\ \mathrm{h}_1 = \xi\zeta, \mathrm{h}_2 = \eta\zeta, \mathrm{h}_3 = \xi\eta, \mathrm{h}_4 = \xi^2, \mathrm{h}_5 = \eta^2, \mathrm{h}_6 = \zeta^2, \mathrm{h}_7 = \xi\eta\zeta, \mathrm{h}_8 = \xi^2\eta, \mathrm{h}_9 = \xi^2\zeta, \\ \mathrm{h}_{10} = \eta^2\xi, \mathrm{h}_{11} = \eta^2\zeta, \mathrm{h}_{12} = \zeta^2\xi, \mathrm{h}_{13} = \zeta^2\eta, \mathrm{h}_{14} = \xi^2\eta\zeta, \mathrm{h}_{15} = \xi\eta^2\zeta, \mathrm{h}_{16} = \xi\eta\zeta^2 \end{cases} \quad (21)$$

Pour simplifier les écritures, on notera $\xi = \hat{x}_1$, $\eta = \hat{x}_2$, $\zeta = \hat{x}_3$

En évaluant l'équation **16** aux nœuds de l'élément, on arrive aux trois systèmes de vingt équations suivants :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{d}}_i = a_{0i}\underline{\mathbf{S}} + a_{1i}\underline{\mathbf{x}}_1 + a_{2i}\underline{\mathbf{x}}_2 + a_{3i}\underline{\mathbf{x}}_3 + c_{1i}\underline{\mathbf{h}}_1 + c_{2i}\underline{\mathbf{h}}_2 + c_{3i}\underline{\mathbf{h}}_3 + \ldots + c_{16i}\underline{\mathbf{h}}_{16} \\ i = 1,2,3 \end{cases} \quad (22)$$

Ainsi les vecteurs $\underline{\mathbf{d}}_i$ et $\underline{\mathbf{x}}_i$ représentent, respectivement, les déplacements et les coordonnées nodales et sont donnés par :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{d}}_i^T = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \ldots, u_{i20}) \\ \underline{\mathbf{x}}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \ldots, x_{i20}) \end{cases} \quad (23)$$

Les vecteurs $\underline{\mathbf{S}}$ et $\underline{\mathbf{h}}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3,\ldots,16)$ sont donnés quant à eux par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases}
\underline{\mathbf{S}}^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \\
\underline{\mathbf{h}}_1^T = (1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 0\ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ -1) \\
\underline{\mathbf{h}}_2^T = (1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_3^T = (1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ -1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_4^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1) \\
\underline{\mathbf{h}}_5^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_6^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1) \\
\underline{\mathbf{h}}_7^T = (-1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_8^T = (-1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ -1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_9^T = (-1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ -1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1) \\
\underline{\mathbf{h}}_{10}^T = (-1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_{11}^T = (-1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_{12}^T = (-1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 0\ 1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ -1) \\
\underline{\mathbf{h}}_{13}^T = (-1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_{14}^T = (1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_{15}^T = (1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \\
\underline{\mathbf{h}}_{16}^T = (1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)
\end{cases} \quad (24)$$

Pour arriver à une écriture avantageuse de l'opérateur gradient discrétisé $\mathbf{B}$, on va introduire les trois vecteurs $\mathbf{b_i}$ définis par :

$$\mathbf{b_i^T} = \mathbf{N^T}_{,i}(0) = {}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x_i}}(0) \quad \text{i = 1, 2,3} \qquad (25)$$

Si nous nous plaçons en $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3) = (0,0,0)$ alors nous obtenons :

$$\mathbf{b_i^T} = \mathbf{N^T}_{,i}(0) = \mathbf{cste}$$

où $\mathbf{N^T}$ représente: $(\mathrm{N}_1\ \mathrm{N}_2\ \mathrm{N}_3 \ldots \mathrm{N}_{20})$

$$\mathbf{b_i^T} = \mathbf{N^T}_{,i}(0) = (\frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial \mathrm{x}_i}(0), ..., \frac{\partial \mathrm{N}_{20}}{\partial \mathrm{x}_i}(0))$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial \mathrm{N}_I}{\partial x_j}=\left(\frac{\partial \mathrm{N}_I}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x_j}+\frac{\partial \mathrm{N}_I}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial x_j}+\frac{\partial \mathrm{N}_I}{\partial \zeta}.\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\right)_{|\xi=\eta=\zeta=0}=\left(\frac{\partial \mathrm{N}_I}{\partial \xi}.j_{1j}+\frac{\partial \mathrm{N}_I}{\partial \eta}.j_{2j}+\frac{\partial \mathrm{N}_I}{\partial \zeta}.j_{3j}\right)_{\xi=\eta=\zeta=0}$$

$$avec \quad I=1,2,...,20 \quad et \quad j=1,2,3$$

$$\mathbf{F}^{-1}{}_{|\xi=\eta=\zeta=0}=\begin{pmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z}\\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z}\end{pmatrix}_{|\xi=\eta=\zeta=0}=\begin{pmatrix}j_{11} & j_{12} & j_{13}\\ j_{21} & j_{22} & j_{23}\\ j_{31} & j_{32} & j_{33}\end{pmatrix}$$

Après calculs on trouve :

$$\underline{\mathbf{b}}_i^T=\begin{pmatrix}j_{i1} & j_{i2} & j_{i3}\end{pmatrix}.\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

De plus, on peut vérifier par des considérations algébriques que les conditions d'orthogonalité suivantes sont satisfaites :

$$\underline{\mathbf{h}}_m^T.\underline{\mathbf{h}}_n=\begin{bmatrix}\mathbf{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0\\ 0 & \mathbf{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8}\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{16} & \mathbf{12} & \mathbf{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & \mathbf{16} & \mathbf{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & \mathbf{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & \mathbf{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0\\ \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8}\end{bmatrix}$$

$$m,n=1,2,...,16$$

$$\underline{\mathbf{b}}_i^T.\underline{\mathbf{h}}_\alpha=0;\quad \underline{\mathbf{b}}_i^T.\underline{\mathbf{S}}=0;\ \underline{\mathbf{b}}_i^T.\underline{\mathbf{x}}_j=\delta_{ij}$$

$$\underline{\mathbf{h}}_1^T.\underline{\mathbf{S}}=0;\ \underline{\mathbf{h}}_2^T.\underline{\mathbf{S}}=0;\ \underline{\mathbf{h}}_3^T.\underline{\mathbf{S}}=0;\ \underline{\mathbf{h}}_4^T.\underline{\mathbf{S}}=16;\ \underline{\mathbf{h}}_5^T.\underline{\mathbf{S}}=16;\ \underline{\mathbf{h}}_6^T.\underline{\mathbf{S}}=16;\ \underline{\mathbf{h}}_7^T.\underline{\mathbf{S}}=0;\ \underline{\mathbf{h}}_8^T.\underline{\mathbf{S}}=0$$
$$\underline{\mathbf{h}}_9^T.\underline{\mathbf{S}}=0\ \ \underline{\mathbf{h}}_{10}^T.\underline{\mathbf{S}}=0;\ \underline{\mathbf{h}}_{11}^T.\underline{\mathbf{S}}=0\ \ \underline{\mathbf{h}}_{12}^T.\underline{\mathbf{S}}=0\ \ \underline{\mathbf{h}}_{13}^T.\underline{\mathbf{S}}=0\ \ \underline{\mathbf{h}}_{14}^T.\underline{\mathbf{S}}=0\ \ \underline{\mathbf{h}}_{15}^T.\underline{\mathbf{S}}=0\ \ \underline{\mathbf{h}}_{16}^T.\underline{\mathbf{S}}=0 \quad (26)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A ce stade, on peut déterminer les constantes inconnues qui interviennent dans l'écriture **(21)** du champ de déplacement en multipliant scalairement l'équation (22) par $\underline{\mathbf{b}}_j^T$, $\underline{\mathbf{S}}^T$ et $\underline{\mathbf{h}}_\alpha^T$ respectivement, et en utilisant les relations d'orthogonalité **(26)**. On obtient :

$$a_{ji} = \underline{\mathbf{b}}_j^T . \underline{\mathbf{d}}_i \qquad c_{\alpha i} = \underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T . \underline{\mathbf{d}}_i$$

avec :

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T = n_{\alpha 1}\left(\underline{\mathbf{h}}_1^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_1^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 2}\left(\underline{\mathbf{h}}_2^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_2^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 3}\left(\underline{\mathbf{h}}_3^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_3^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right)$$

$$+ n_{\alpha 4}\left[\left(\underline{\mathbf{h}}_4^T - \frac{4}{5}\underline{\mathbf{S}}^T \div \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right] + n_{\alpha 5}\left[\left(\underline{\mathbf{h}}_5^T - \frac{4}{5}\underline{\mathbf{S}}^T \div \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right] +$$

$$+ n_{\alpha 6}\left[\left(\underline{\mathbf{h}}_6^T - \frac{4}{5}\underline{\mathbf{S}}^T \div \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right] + n_{\alpha 7}\left(\underline{\mathbf{h}}_7^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_7^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right)$$

$$+ n_{\alpha 8}\left(\underline{\mathbf{h}}_8^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_8^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 9}\left(\underline{\mathbf{h}}_9^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_9^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 10}\left(\underline{\mathbf{h}}_{10}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_{10}^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right)$$

$$+ n_{\alpha 11}\left(\underline{\mathbf{h}}_{11}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_{11}^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 12}\left(\underline{\mathbf{h}}_{12}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_{12}^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 13}\left(\underline{\mathbf{h}}_{13}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_{13}^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right)$$

$$+ n_{\alpha 14}\left(\underline{\mathbf{h}}_{14}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_{14}^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 15}\left(\underline{\mathbf{h}}_{15}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_{15}^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right) + n_{\alpha 16}\left(\underline{\mathbf{h}}_{16}^T - \left(\underline{\mathbf{h}}_{16}^T . \underline{\mathbf{x}}_j\right)\underline{\mathbf{b}}_j^T\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left[\mathbf{n}_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix}
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}
\end{bmatrix} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, ..., 16$$

Pour les 2 éléments SHB15 et SHB20, l'opérateur gradient discrétisé reliant le tenseur de déformation au vecteur des déplacements nodaux est donné par :

$$\underline{\underline{\nabla}}_S\left(\underline{\mathbf{u}}\right) = \underline{\underline{\mathbf{B}}}.\underline{\mathbf{d}} \tag{27}$$

où:

$$\underline{\underline{\nabla}}_S\left(\underline{\mathbf{u}}\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_{x,x} \\ \mathrm{u}_{y,y} \\ \mathrm{u}_{z,z} \\ \mathrm{u}_{x,y} + \mathrm{u}_{y,x} \\ \mathrm{u}_{x,z} + \mathrm{u}_{z,x} \\ \mathrm{u}_{y,z} + \mathrm{u}_{z,y} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{d}}_1 \\ \underline{\mathbf{d}}_2 \\ \underline{\mathbf{d}}_3 \end{bmatrix} \tag{28}$$

et prend alors la forme matricielle pratique :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \\ \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{0} \\ \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{0} & \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \\ \underline{0} & \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad \textbf{(29)}$$

Cette écriture de l'opérateur gradient discrétisé utilisant les formules de Hallquist [4] est très commode car les vecteurs $\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha$, qui interviennent dans l'expression de $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T . \underline{\mathbf{x}}_j = 0 \quad , \quad \underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T . \underline{\mathbf{h}}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \qquad (30)$$

Ceci permet de manipuler séparément chacun des modes de la déformation pour obtenir simplement la forme du champ de déformation postulée. Notons qu'un élément basé sur la formulation (29) est convergent lorsqu'il est évalué exactement. Cependant, l'évaluation de cet opérateur $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, donné en (29), en chacun des points d'intégration rend cet élément coûteux en temps de calcul pour les applications pratiques, et une forme simplifiée de cet élément s'impose.

3.3 Formulation variationnelle utilisée pour les éléments SHB15 et SHB20

L'extension de la forme faible du principe variationnel de Hu-Washizu au cas de la mécanique des solides non linéaires est due à Fish et Belytschko [6]. Pour un simple élément, on a :

$$\delta\pi(\boldsymbol{u}, \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{V_e} \delta\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}\, dV + \delta \int_{V_e} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\nabla_s \boldsymbol{u} - \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}\right) dV - \delta \boldsymbol{d}^T \cdot \boldsymbol{f}^{ext} = 0 \quad \textbf{(31)}$$

où δ représente une variation, $\underline{\mathbf{u}}$ le champ de déplacement, $\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}$ est le taux de déformation postulée, $\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}}$ la contrainte postulée, $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ la contrainte évaluée par la loi constitutive, $\underline{\mathbf{d}}$ les déplacements nodaux, $\underline{\mathbf{f}}^{ext}$ les forces nodales externes, et $\nabla_s \boldsymbol{u}$ la partie symétrique du gradient du champ de déplacement.

La formulation « *Assumed strain* » (projection de l'opérateur gradient discrétisé $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ sur un sous espace approprié afin d'éviter les différents problèmes de blocage) est basée sur une forme simplifiée du principe variationnel de Hu-Washizu comme elle a été décrite par Simo et Hughes [7]. Dans cette forme simplifiée, la contrainte postulée est choisie orthogonale à la différence entre la partie symétrique du gradient de déplacement et le taux de déformation postulée. Ainsi, le second terme dans l'équation **(31)** s'élimine et l'on obtient :

$$\delta\pi(\boldsymbol{u}, \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{V_e} \delta\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dV - \delta \boldsymbol{d}^T \cdot \boldsymbol{f}^{ext} = 0 \qquad (32)$$

Sous cette forme, le principe variationnel est indépendant de l'interpolation de la contrainte, puisque la contrainte postulée n'intervient plus et n'a donc pas besoin d'être définie. Les équations discrétisées nécessitent donc la seule interpolation du déplacement $\underline{\mathbf{u}}$ et du taux de déformation postulée $\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}$ dans l'élément. Avec les notations vectorielles précédentes on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\sum_{i=1}^{15}\boldsymbol{d_I}(t)N_I(x) \text{ (élément SHB15)}$$

Ou $$\boldsymbol{u}(x,t)=\sum_{i=1}^{20}\boldsymbol{d_I}(t)N_I(x) \text{ (élément SHB20)} \quad (33)$$

Ceci conduit à :

$$\nabla_s \boldsymbol{u}(x,t)=\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{d}(t) \quad (34)$$

La déformation postulée est définie quant à elle par :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(x,t)=\bar{\boldsymbol{B}}(x)\boldsymbol{d}(t) \quad (35)$$

Remplaçant l'expression (35) dans le principe variationnel (32), on obtient :

$$\delta \boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}}\left(\int_{V_e}\bar{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dV-\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ext}}\right)=0 \quad (36)$$

Comme $\delta \underline{d}$ peut être choisi arbitrairement, l'équation précédente conduit à :

$$\underline{\mathbf{f}}^{\text{int}}=\underline{\mathbf{f}}^{ext} \quad (37)$$

avec :

$$\boldsymbol{f}^{\mathbf{int}}=\int_{V_e}\bar{\boldsymbol{B}}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\,dV \quad (38)$$

Dans l'équation ci-dessus, il est bien précisé que la contrainte $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ est calculée par la loi constitutive à partir du taux de déformation postulée. $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ Pour les problèmes non linéaires, $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ peut aussi être une fonction intégrale du taux de déformation postulée et des autres variables internes :

$$\boldsymbol{\sigma}=F(\dot{\boldsymbol{\epsilon}},\boldsymbol{\alpha},...) \quad (39)$$

où $\underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}$ représente les variables internes. La formulation ainsi obtenue est valable pour des problèmes incluant les deux types de non linéarités : géométriques et matérielles. Dans le cas de problèmes linéaires, on a :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}=\underline{\underline{\mathbf{C}}}.\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}}=\underline{\underline{\mathbf{C}}}.\underline{\underline{\bar{\mathbf{B}}}}.\underline{\mathbf{d}} \quad (40)$$

La matrice de comportement élastique $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, dans le cas d'un matériau isotrope, est choisie comme suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

Dans cette matrice, E est le module d'Young et v est le coefficient de Poisson. Cette loi est spécifique aux éléments SHB. Elle ressemble à celle que l'on aurait dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes, mise à part le terme (3,3). Nous pouvons noter que ce choix entraîne un comportement anisotrope artificiel. Ce choix permet de satisfaire tous les tests sans introduire de blocage.

Les forces internes de l'élément s'écrivent alors simplement en termes de la matrice de rigidité élémentaire :

$$\boldsymbol{f}^{\mathbf{int}} = \boldsymbol{K}_e \cdot \boldsymbol{d} \qquad (41)$$

où :

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{V_e} \bar{\boldsymbol{B}}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \bar{\boldsymbol{B}}\, dV \qquad (42)$$

Dans une approche standard en déplacement, le taux de déformation postulée s'identifie à la partie symétrique du gradient de vitesse, ce qui revient à remplacer $\bar{\boldsymbol{B}}$ par $\boldsymbol{B}$ dans les expressions précédentes. On obtient donc simplement :

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{V_e} \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}\, dV \qquad (43)$$

L'élément prismatique à 15 nœuds, nommé « SHB15 », possède 15 points d'intégration. Leurs coordonnées (ξ, η, ζ) et leurs poids d'intégration sont les racines du polynôme de Gauss-Legendre donnés dans le tableau suivant :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Point de Gauss	ξ	η	ζ	$w(\xi,\eta,\zeta)$
P(1)	1/2	1/2	$\xi_{G1}=-0.906179845938664$	0.236926885056189/6
P(2)	1/2	1/2	$\xi_{G2}=-0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(3)	1/2	1/2	$\xi_{G3}=0$	0.568888888888889/6
P(4)	1/2	1/2	$\xi_{G4}=0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(5)	1/2	1/2	$\xi_{G5}=0.906179845938664$	0.236926885056189/6
P(6)	0	1/2	$\xi_{G6}=-0.906179845938664$	0.236926885056189/6
P(7)	0	1/2	$\xi_{G7}=-0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(8)	0	1/2	$\xi_{G8}=0$	0.568888888888889/6
P(9)	0	1/2	$\xi_{G9}=0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(10)	0	1/2	$\xi_{G10}=0.906179845938664$	0.236926885056189/6
P(11)	1/2	0	$\xi_{G11}=-0.906179845938664$	0.236926885056189/6
P(12)	1/2	0	$\xi_{G12}=-0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(13)	1/2	0	$\xi_{G13}=0$	0.568888888888889/6
P(14)	1/2	0	$\xi_{G14}=0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(15)	1/2	0	$\xi_{G15}=0.906179845938664$	0.236926885056189/6

Ainsi, l'expression de la rigidité est : $\boldsymbol{K}_e=\sum_{j=1}^{15} w(P(j))J(P(j))\,\bar{\boldsymbol{B}}^T(P(j))\cdot\boldsymbol{C}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(P(j))$

Les coordonnées des points de Gauss et leurs poids pour l'élément SHB20 sont données dans le tableau ci-dessous :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Point de Gauss	ξ	η	ζ	$w(\xi,\eta,\zeta)$
P(1)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G1}=-0.906179845938664$	0.236926885056189
P(2)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G2}=-0.538469310105683$	0.478628670499366
P(3)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G3}=0$	0.568888888888889
P(4)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G4}=0.538469310105683$	0.478628670499366
P(5)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G5}=0.906179845938664$	0.236926885056189
P(6)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G6}=-0.906179845938664$	0.236926885056189
P(7)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G7}=-0.538469310105683$	0.478628670499366
P(8)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G8}=0$	0.568888888888889
P(9)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G9}=0.538469310105683$	0.478628670499366
P(10)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G10}=0.906179845938664$	0.236926885056189
P(11)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G11}=-0.906179845938664$	0.236926885056189
P(12)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G12}=-0.538469310105683$	0.478628670499366
P(13)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G13}=0$	0.568888888888889
P(14)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G14}=0.538469310105683$	0.478628670499366
P(15)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G15}=0.906179845938664$	0.236926885056189
P(16)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G16}=-0.906179845938664$	0.236926885056189
P(17)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G17}=-0.538469310105683$	0.478628670499366
P(18)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G18}=0$	0.568888888888889
P(19)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G19}=0.538469310105683$	0.478628670499366
P(20)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G20}=0.906179845938664$	0.236926885056189

Ainsi, l'expression de la rigidité est : $\boldsymbol{K}_e=\sum_{j=1}^{20} w(P(j))J(P(j))\,\bar{\boldsymbol{B}}^T(P(j))\cdot\boldsymbol{C}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(P(j))$

3.4 Matrice de rigidité géométrique Ksigma

La matrice $\boldsymbol{K}_\sigma$ a pour objectif de résoudre les problèmes de flambement. Nous rappelons ici que les modes de flambement sont les vecteurs propres du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\left(\boldsymbol{K}+\mu\,\boldsymbol{K}_\sigma\right)\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\,\boldsymbol{K}_\sigma\cdot\boldsymbol{u}$$

avec $\lambda=-\mu$, et μ est le coefficient multiplicateur du chargement.

En introduisant la déformation quadratique $\underline{\mathbf{e}}^Q$ telle que :

$$e_{ij}^Q(\delta\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})=\sum_{k=1}^{3}\delta u_{k,i}.\Delta u_{k,j}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut définir cette matrice de rigidité géométrique par :

$$\delta \boldsymbol{u}^{T} \cdot \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \Delta \boldsymbol{u} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{Q}}(\delta \boldsymbol{u}, \Delta \boldsymbol{u})\, d\Omega = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \boldsymbol{u}^{T} \nabla \Delta \boldsymbol{u}\ \ d\Omega$$

Afin d'exprimer cette matrice dans l'espace discrétisé, introduisons les opérateurs gradient quadratique discrétisés $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{Q}$ (en notation matricielle) tels que :

$$\underline{\mathbf{e}}^{Q}\left(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}\right) = \begin{bmatrix} e_{11}^{Q} \\ e_{22}^{Q} \\ e_{33}^{Q} \\ e_{12}^{Q} + e_{21}^{Q} \\ e_{13}^{Q} + e_{31}^{Q} \\ e_{23}^{Q} + e_{32}^{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\delta\mathbf{u}}^{T} \times \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11}^{Q} \times \underline{\Delta\mathbf{u}} \\ \underline{\delta\mathbf{u}}^{T} \times \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22}^{Q} \times \underline{\Delta\mathbf{u}} \\ \underline{\delta\mathbf{u}}^{T} \times \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{33}^{Q} \times \underline{\Delta\mathbf{u}} \\ \underline{\delta\mathbf{u}}^{T} \times \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12}^{Q} \times \underline{\Delta\mathbf{u}} \\ \underline{\delta\mathbf{u}}^{T} \times \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{13}^{Q} \times \underline{\Delta\mathbf{u}} \\ \underline{\delta\mathbf{u}}^{T} \times \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23}^{Q} \times \underline{\Delta\mathbf{u}} \end{bmatrix}$$

Les différents termes $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{ij}^{Q}$ sont donnés par les équations suivantes :

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11}^{Q} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \ ; \ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22}^{Q} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \ ; \ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{33}^{Q} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12}^{Q} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{13}^{Q} = c^2 \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_1^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23}^{Q} = c^2 \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\mathbf{B}}_2 \underline{\mathbf{B}}_3^{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{B}}_3 \underline{\mathbf{B}}_2^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

avec les vecteurs $\underline{\mathbf{B}}_i$ (i = 1, 2, 3) définis comme :

$$\underline{\mathbf{B}}_i = \left(\underline{\mathbf{b}}_i \boldsymbol{\gamma} + h_{\alpha,i_\alpha} \right)$$

Avec ces notations, la contribution à la matrice de rigidité géométrique, $\underline{\underline{\mathbf{k}}}_{\boldsymbol{\sigma}}$, au point de Gauss ξ_j est donnée par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{\underline{\mathbf{k}}}_{\boldsymbol{\sigma}}\left(\xi_j\right)=\sigma_{11}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11}^{Q}\left(\xi_j\right)+\sigma_{22}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22}^{Q}\left(\xi_j\right)+\sigma_{33}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{33}^{Q}\left(\xi_j\right)$$
$$+\sigma_{12}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12}^{Q}\left(\xi_j\right)+\sigma_{13}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{13}^{Q}\left(\xi_j\right)+\sigma_{23}\left(\xi_j\right)\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{23}^{Q}\left(\xi_j\right)$$

Par intégration sur les points de Gauss de l'élément, la matrice de rigidité géométrique s'obtient par la formule :

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\sigma}}=\sum_{j=1}^{5} w(\xi_j)J(\xi_j)\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\sigma}}(\xi_j)$$ pour l'élément SHB15 et pour l'élément SHB20

3.5 Forces suiveuses et matrice de pression K_p

Les forces de pression suiveuses sont présentes dans la matrice tangente via la matrice K_p, car les forces externes suiveuses dépendent du déplacement. Les forces de pression suiveuses s'écrivent :

$$\int_{\partial\Omega} p\,\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{u}\,dS=\int_{\partial\Omega_0} p\det\left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\right]\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})^{-\mathrm{T}}dS_0=p\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{0}}-p\,\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})=\mathbf{1}+\nabla\boldsymbol{u}$$

en utilisant les notations :

- $\underline{\mathbf{n}}_0{}^T=(n_1,n_2,n_3)$, normale à la surface extérieure de l'élément dans la configuration de référence ;
- $\tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{i}}$, vecteur de dimension 6 (pour SHB15) ou 8 (pour SHB20), dérivée des fonctions de forme aux 6 (pour SHB15) ou 8 (pour SHB20) nœuds de la face de l'élément chargée en pression ;
- S_0 aire de la face chargée en pression.

La formulation précédente conduit à une matrice non-symétrique. On sait qu'on peut néanmoins utiliser une formulation symétrique si les forces extérieures dues à la pression dérivent d'un potentiel. C'est le cas si les forces de pression ne travaillent pas sur la frontière du domaine modélisé. On considère donc que la partie symétrique de la matrice suffit. La matrice symétrisée prend la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\mathbf{P}}=S_0\begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3\\
\mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3\\
\mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3\\
\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2-\tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2-\tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3\\
\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2-\tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2-\tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3\\
\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2-\tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2-\tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3\\
\tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3-\tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0}\\
\tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3-\tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0}\\
\tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1-\tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3-\tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0}
\end{bmatrix}$$

C'est une matrice 18×18 ou 24×24, qu'il faut multiplier par les déplacements des 6 (pour SHB15) ou 8 (pour SHB20) nœuds de la face sur laquelle on applique une pression.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Stratégie pour les calculs non-linéaires

4.1 Non-linéarités géométriques

On traite ici le cas des grands déplacements, mais rotations faibles et petites déformations. On adopte pour cela une formulation lagrangienne mise à jour.

En non linéaire, nous cherchons à écrire l'équilibre entre forces internes et force externes à la fin de l'incrément de charge (repéré par l'indice 2) :

$$\mathbf{F}_2^{\text{int}} = \mathbf{F}_2^{\text{ext}}$$

L'expression des forces internes s'écrit :

$$\underline{\mathbf{F}}_2^{\text{int}} = \int_{\Omega_2} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2^T \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 dV$$

Dans l'équation précédente l'opérateur $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$ est l'opérateur permettant de passer du déplacement à la déformation linéaire calculé sur la géométrie à la fin du pas, la contrainte $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2$ est la contrainte de Cauchy à la fin du pas et l'intégration est faite sur le volume Ω_2 déformé à la fin du pas.

Remarques importantes :

- Pour l'élément SHB6, la matrice $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$ est également modifiée par « *Assumed local strain method* ». Elle prend la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \\ \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} \\ c*\left(\underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T\right) & \underline{\mathbf{0}} & c*\left(\underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T\right) \\ \underline{\mathbf{0}} & c*\left(\underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T\right) & c*\left(\underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T\right) \end{bmatrix} \quad \text{où } c = 0{,}45$$

- Pour les éléments SHB15 ou SHB20, la matrice $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$ n'a pas besoin de modification. Elle prend donc, la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T \\ \underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T & \underline{\mathbf{0}} \\ \left(\underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T\right) & \underline{\mathbf{0}} & \left(\underline{\mathbf{b}}_1^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_1}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T\right) \\ \underline{\mathbf{0}} & \left(\underline{\mathbf{b}}_3^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_3}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T\right) & \left(\underline{\mathbf{b}}_2^T + \mathrm{h}_{\alpha,x_2}\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^T\right) \end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'élément disponible à ce jour dans *Aster* est programmé en petites rotations. En effet, l'incrément de déformation est calculé en utilisant uniquement la déformation linéaire :

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla_1(\Delta \boldsymbol{u}) + \nabla_1^T(\Delta \boldsymbol{u})\right)$$

L'opérateur gradient est calculé sur la géométrie de début de pas. Cette écriture de la déformation est limitée aux petites rotations (inférieur à 5 degrés).

On pourrait sans difficulté étendre la formulation aux grandes rotations en incluant dans la déformation les termes de second ordre (tenseur de Green-Lagrange) :

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla_1(\Delta \boldsymbol{u}) + \nabla_1^T(\Delta \boldsymbol{u}) + \nabla_1^T(\Delta \boldsymbol{u}) \cdot \nabla_1(\Delta \boldsymbol{u})\right)$$

Le tenseur de contrainte associé est le second tenseur de Piola Kirchhoff II [R5.03.22]. Mais ceci n'est pas disponible dans la version 12 de Code_Aster.

En élasticité, la loi de comportement s'écrit :

$$\Delta \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C'}} \Delta \underline{\underline{E}}$$

où C' est la matrice de Hooke. Remarquons que pour les éléments SHB, cette matrice est une matrice orthotrope transverse qui s'écrit dans les axes du lamina :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}' = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

4.2 Non-linéarités matériaux

En non-linéaire matériaux, nous proposons une méthode de construction particulière de la matrice tangente $\underline{\underline{C}}^T$. Elle consiste à supposer d'abord que l'élément est en état de contrainte plane dans le repère local de chaque point d'intégration de Gauss et les déformations hors plan sont élastiques. Cela entraîne alors immédiatement que les déformations totales hors plan sont égales aux déformations élastiques. Appelons $\underline{\underline{C}}^{CPT}$ la matrice tangente en contraintes planes. La matrice de comportement tangente pour le comportement choisi et s'écrit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{\underline{C}}^{T} = \begin{bmatrix} C^{CPT}_{xxxx} & C^{CPT}_{xxyy} & 0 & C^{CPT}_{xxxy} & 0 & 0 \\ C^{CPT}_{xyyx} & C^{CPT}_{yyyy} & 0 & C^{CPT}_{yyxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ C^{CPT}_{xyxx} & C^{CPT}_{xyyy} & 0 & C^{CPT}_{xyxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Ensuite les contraintes hors plan sont calculées de façon élastique. Cette méthode permet ainsi de connecter les éléments SHB à toutes les lois de comportement disponibles dans *Code Aster*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Implantation des éléments SHB dans *Code_Aster*

5.1 Description

Ces éléments s'appuient sur les mailles 3D volumiques PENTA6, HEXA8, PENTA15 et HEXA20.

5.2 Utilisation

Ces éléments s'utilisent de la façon suivante :

5.2.1 Maillage

Vérifier la bonne orientation des faces des éléments désignés (compatibilité avec la direction privilégiée) en utilisant ORIE_SHB de l'opérateur MODI_MAILLAGE.

5.2.2 Modélisation

Le nom de la modélisation SHB a été conservé. C'est bien sûr un abus de langage, cette modélisation regroupant maintenant les 4 éléments finis SHB6, SHB8, SHB15, SHB20.

5.2.3 Matériau

Pour un comportement élastique isotrope homogène dans l'épaisseur on utilise le mot-clé ELAS dans DEFI_MATERIAU où l'on définit les coefficients E, module d'Young et NU, coefficient de Poisson.

Pour définir un comportement plastique on utilise le mot-clé TRACTION dans DEFI_MATERIAU où l'on définit le nom d'une courbe de traction. Seul ce type de définition est disponible pour l'instant.

A noter que la dilatation thermique n'est pas prise en compte dans la version 12 de Code_Aster pour les éléments SHB.

5.2.4 Conditions aux limites et chargement

On impose les conditions aux limites sur les degrés de liberté de volume 3D (AFFE_CHAR_MECA / DDL_IMPO), et les efforts dans le repère global (FORCE_NODALE).

On définit les efforts de pression répartie sur les faces de l'élément (sous le mot-clé PRES_REP). On aura pris soin au préalable de définir des mailles de peau QUAD4 et d'orienter convenablement les normales sortantes à ces mailles de peau à l'aide de la commande
MODI_MAILLAGE mot-clé ORIE_PEAU_3D

5.2.5 Calcul en élasticité linéaire

Commande MECA_STATIQUE
Les options de post-traitement disponibles sont SIEF_ELNO et SIEQ_ELNO.

5.2.6 Calcul en flambement linéaire

L'option RIGI_MECA_GE étant activée dans le catalogue de l'élément, il est possible d'effectuer un calcul de flambement classique après assemblage des matrices de rigidité élastique et géométrique.

5.2.7 Calcul en " élasticité " non linéaire géométrique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On choisit le comportement ELAS sous le mot-clé COMPORTEMENT de STAT_NON_LINE, en petites déformations ('PETIT') ou en grands déplacements et en petites rotations ('GROT_GDEP') sous le mot-clé DEFORMATION. Dans ce dernier cas, seule la géométrie est actualisée en début de pas de temps, le comportement reste calculé en petites déformations.

La stratégie utilisée étant basée sur l'utilisation d'une matrice de rigidité tangente au cours des itérations (réactualisation en début de pas uniquement), on veillera à ne pas utiliser une autre option que celle qui est activée par défaut, à savoir REAC_ITER = 0 sous NEWTON.

L'intégration numérique dans l'épaisseur est réalisée avec 5 points de Gauss, tout comme en non linéaire matériel.

5.2.8 Calcul non linéaire plastique

Seul le critère de Von Mises est disponible à ce jour (RELATION = 'VMIS_ISOT_TRAC' sous COMPORTEMENT). On définit le mode de calcul des déformations comme dans le cas de l'élasticité non linéaire (DEFORMATION = 'GROT_GDEP' ou 'PETIT').

La stratégie utilisée étant basée sur l'utilisation d'une matrice de rigidité tangente au cours des itérations (réactualisation en début de pas uniquement), on veillera à ne pas utiliser une autre option que celle qui est activée par défaut, à savoir REAC_ITER = 0 sous NEWTON.

5.3 Implantation

Les options RIGI_MECA, RIGI_MECA_GE, FORC_NODA, FULL_MECA, RIGI_MECA_TANG, RAPH_MECA, SIEF_ELGA, SIEF_ELNO ont été activées dans le catalogue gener_shb3d_3.cata.

Aucun développement n'a été nécessaire pour les forces de pression réparties et pour les forces de pressions suiveuses. En effet, ces chargements s'appuient sur des mailles de peau identiques à celles des éléments 3D volumiques.

5.4 Validation

Les tests validant ces éléments sont :

Tests en linéaire :

- SSLS101 C, D, K, L : plaque circulaire simplement posée soumise à une pression uniforme [V3.03.101] Modélisation C :SHB8, Modélisation D :SHB20, Modélisation K :SHB6, Modélisation L :SHB15.
- SSLS105 C : hémisphère doublement pincée [V3.03.105] test classique pour vérifier la convergence de l'élément (SHB8)
- SSLS108 C à H : poutre vrillée en flexion, test permettant de vérifier l'absence de blocage [V3.03.108] Modélisations C, D :SHB8, Modélisation G :SHB20, Modélisations E, F :SHB6, Modélisation H :SHB15.
- SSLS123 A : sphère sous pression externe [V3.03.123] pour valider les chargements de pression et le comportement orthotrope particulier à cet élément Modélisation A :SHB8, Modélisations C , D :SHB6.
- SSLS124 A à G : plaque mince en flexion avec divers élancements, pour délimiter le domaine d'usage de l'élément [V3.03.124]. Modélisations A, B :SHB8, Modélisation C : SHB6, Modélisations D, E : SHB20, Modélisations F, G :SHB15.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- SSLS125 A, B : flambage (modes d'Euler) d'un cylindre libre sous pression externe [V3.03.125] ce test permet de valider la nature de rigidité géométrique
  Modélisation A :SHB8, Modélisation B : SHB20.

Tests en non linéaire :

- SSNS101 C à G : claquage d'un toit cylindrique [V6.03.101]. Ce test permet de valider le calcul non linéaire géométrique et l'élastoplasticité
  Modélisations C, D :SHB8, Modélisation E : SHB20, Modélisation F : SHB6, Modélisation G :SHB15.

- SSNS102 A, B : flambage d'une coque avec raidisseurs en grands déplacements et pression suiveuse [V6.03.102].
  Modélisation A :SHB8, Modélisation B : SHB20.

6 Bibliographie

[1] F. Abed-Meraim and A. Combescure. SHB8PS, a new adaptive, assumed strain continuum mechanics shell element for impact analysis. *Computers and Structures* , 80:791-803, 2002.

[2] F. Abed-Meraim et A. Combescure. Stabilisation des éléments finis sous-intégrés. Rapport interne n° 247, LMT de Cachan, 2001.

[3] A. Legay. Une méthode de calcul efficace pour l'étude paramétrique du flambage non-linéaire des structures tridimensionnelles : application à la fiabilité. *Thèse de doctorat du LMT de Cachan*, 2002.

[4] T. Belytschko, J.S.-J. Ong, W.K. Liu, and J.M. Kennedy. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.,* 43:251-276, 1984.

[5] N. Caironi et F. Abed-Meraim. Implémentation de l'élément SHB6 à intégration réduite dans le code Inca et analyse des instabilités de type hourglass. *Rapport de projet de fin d'études au laboratoire LPMM, ENSAM Metz*, juin 2003.

Description des versions du document :

Version Aster	Auteur(s), Organisme(s)	Description des modifications
9.5	Trinh Vuong Dieu (thèse) X Desroches EDF R&D AMA	Version initiale

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)