Élément de coque volumique SHB à 8 nœuds

Résumé :

Nous présentons dans ce document la formulation théorique de l'élément SHB8 et son implantation numérique pour des analyses incrémentales non-linéaires implicites (grands déplacements, petites rotations, petites déformations).

Il s'agit d'un élément cubique tri-dimensionnel à 8 nœuds avec une direction privilégiée appelée épaisseur. Ainsi, il peut être utilisé pour représenter des structures minces tout en prenant correctement en compte les phénomènes à travers l'épaisseur (flexion, élasto-plasticité), grâce une intégration numérique à 5 points de Gauss dans cette direction privilégiée.

Afin de réduire considérablement le temps de calcul et d'écarter les différents blocages susceptibles d'apparaître, cet élément est sous-intégré. Il nécessite par conséquent un mécanisme de stabilisation afin de contrôler les modes de déformation à énergie nulle (modes de Hourglass).

Outre son coût de calcul relativement faible et ses bonnes performances en élasto-plasticité, cet élément possède un autre avantage. Puisqu'il est basé sur une formulation tri-dimensionnelle et qu'il ne possède que des degrés de liberté de translation, il est très facile de le coupler avec des éléments 3D volumiques, ce qui est très utile dans des systèmes où coques et éléments volumiques doivent cohabiter. De plus, il permet de modéliser aisément les plaques et coques à épaisseur variable.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction....3
2 Cinématique de l'élément....4
3 Formulation variationnelle....4
4 Discrétisation....5
4.1 Discrétisation du champ de déplacement....5
4.2 Opérateur gradient discrétisé....5
4.3 Matrice de rigidité....7
4.4 Matrice de rigidité géométrique Kσ....8
4.5 Matrice de pression Kp....9
5 Stabilisation de l'élément....10
5.1 Motivations....10
5.2 Modes de "Hourglass"....11
5.3 Stabilisation du type "Assumed Strain Method"....11
6 Stratégie pour les calculs non-linéaires....13
6.1 Non-linéarités géométriques....13
6.2 Petits déplacements....14
6.3 Forces de stabilisation....14
6.4 Plasticité....15
7 Implantation de l'élément SHB8 dans le Code_Aster....16
7.1 Description....16
7.2 Utilisation....16
7.2.1 Maillage....16
7.2.2 Modélisation....16
7.2.3 Matériau....16
7.2.4 Conditions aux limites et chargement....16
7.2.5 Calcul en élasticité linéaire....16
7.2.6 Calcul en flambement linéaire....16
7.2.7 Calcul non linéaire géométrique....16
7.2.8 Calcul non linéaire matériau....17
7.3 Particularités de l'implantation....17
7.4 Validation....17
8 Bibliographie....18
9 Description des versions....18

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

De nombreux travaux récents ont proposé d'utiliser une formulation volumique pour les structures minces. Deux familles principales de méthodes, qui reposent toutes sur l'introduction d'un champ de déformation postulée (« assumed strain »), se dégagent. Les méthodes de la première famille consistent à utiliser une intégration numérique conventionnelle avec un contrôle adéquat de tous les modes de blocage et de verrouillage (volume, cisaillement transverse, membrane). Les méthodes de la seconde famille consistent à sous-intégrer les éléments pour supprimer les blocages et à contrôler les modes de *Hourglass* qui découlent de cette sous-intégration (voir [bib3] [bib4]). Les deux approches ont été étudiées en détails dans le cas d'un comportement élastique. Par contre, très peu de travaux traitent du cas élasto-plastique.

L'élément présenté ici repose sur une formulation sous-intégrée spécialement développée pour le comportement élasto-plastique des structures en flexion. L'idée de base consiste tout d'abord à s'assurer qu'il y a suffisamment de points de Gauss dans l'épaisseur pour représenter correctement le phénomène de flexion, puis à calculer des rigidités de stabilisation de manière adaptative suivant l'état plastique de l'élément. Cela représente une amélioration certaine par rapport aux formulations classiques pour les forces de stabilisation, car ces dernières reposent sur une stabilisation élastique qui devient trop rigide lorsque les effets de la plasticité dominent la réponse de la structure.

L'élément SHB8 est un cube tri-dimensionnel continu à huit nœuds, dans lequel une direction privilégiée, appelée épaisseur, a été choisie. Il peut ainsi être utilisé pour modéliser les structures minces et pour prendre en compte les phénomènes qui se développent dans l'épaisseur dans le cadre de la mécanique des milieux continus tri-dimensionnelle. Etant donné que cet élément est sous-intégré, il exhibe des modes de *Hourglass* qui doivent être stabilisés. Nous avons choisi la méthode de stabilisation introduite par Belytschko, Bindeman et Flanagan [bib3] [bib4]. Cet élément (intitulé alors SHB8PS) et cette méthode de stabilisation ont été initialement mis en œuvre dans une formulation explicite par Abed-Meraim and Combescure [bib2]. La mise en œuvre numérique de cet élément dans un cadre non-linéaire implicite a été proposée par Legay et Combescure dans [bib1].

Cette documentation décrit la formulation de cet élément, sa mise en œuvre numérique pour la prédiction des instabilités structurelles élastiques et élasto-plastiques, ainsi que son implantation dans le *Code_Aster*. Pour les problèmes non-linéaires, une formulation incrémentale implicite de type Newton-Raphson est utilisée [R5.03.01]. Les équations d'équilibre sont résolues par la méthode du Lagrangien mise à jour. Le contrôle des incréments de charge et de déplacement est basé sur une méthode de pilotage proche de l'algorithme de Riks [bib5].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Cinématique de l'élément

L'élément SHB8 est un hexaèdre à 8 nœuds. Les cinq points d'intégration sont choisis le long de la direction ζ dans le repère des coordonnées locales. La forme de l'élément de référence ainsi que les points d'intégration sont représentés sur la [Figure 2-a].

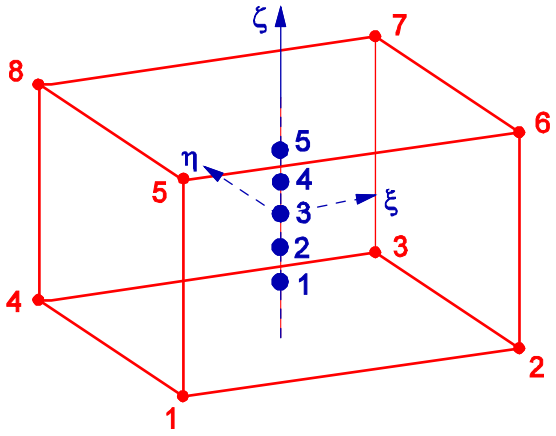


Figure 2-a : Géométrie de l'élément de référence et points d'intégration

Cet élément est iso-paramétrique et possède la même interpolation linéaire et la même cinématique que les éléments hexaèdraux à 8 nœuds standard.

3 Formulation variationnelle

La formulation utilisée pour la construction de l'élément SHB8 se différencie d'une formulation classique simplement par le choix d'une déformation postulée $\dot{\bar{\varepsilon}}$, donc d'un opérateur gradient discrétisé, permettant d'éviter les modes parasites induits par la sous intégration.

Ainsi, le principe variationnel s'écrit :

$$\delta\pi\left(v,\dot{\bar{\varepsilon}}\right)=\int_V \delta\left(\dot{\bar{\varepsilon}}\right):\sigma\, dV-\delta\dot{u}\, f^{ext}=0$$

où π représente la puissance virtuelle totale, δ la variation, v le champ de vitesse, $\dot{u}$ les vitesses nodales, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ le taux de déformation postulée (assumed strain rate), σ la contrainte de Cauchy, V le volume actualisé et f^{ext} les forces extérieures.

Les équations discrétisées nécessitent donc la seule interpolation de la vitesse v et du taux de déformation postulée $\dot{\bar{\varepsilon}}$ dans l'élément. Nous allons maintenant construire l'élément SHB8 à partir de cette équation. Les développements complets et les démonstrations concernant cet élément sont exposés en détails dans [bib2].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Discrétisation

4.1 Discrétisation du champ de déplacement

Les coordonnées spatiales x_i de l'élément sont reliées aux coordonnées nodales x_{iI} au moyen des fonctions de formes iso-paramétriques N_i par les formules :

$$x_i = x_{iI} N_I(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{I=1}^{8} N_I(\xi,\eta,\zeta) x_{iI}$$

Dans la suite, et sauf mention contraire, on adoptera la convention de sommation pour les indices répétés. Les indices en minuscules i varient de un à trois et représentent les directions des coordonnées spatiales. Ceux en majuscules I varient de un à huit et correspondent aux nœuds de l'élément.

Les mêmes fonctions de formes sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément u_i en fonction des déplacements nodaux u_{iI} :

$$u_i = u_{iI} N_i(\xi,\eta,\zeta)$$

On choisit des fonctions de forme iso-paramétriques tri-linéaires :

$$\begin{cases} N_I(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi_I\xi)(1+\eta_I\eta)(1+\zeta_I\zeta) \\ \xi,\eta,\zeta \in [-1,1], \quad I=1,...,8 \end{cases}$$

Ces fonctions de forme transforment un cube unitaire dans l'espace (ξ,η,ζ) en un hexaèdre quelconque dans l'espace (x_1, x_2, x_3) .

4.2 Opérateur gradient discrétisé

Le gradient $u_{i,j}$ du champ de déplacement est une fonction du déplacement $\mathbf{U}_{iI}$ du nœud I dans la direction i :

$$u_{i,j} = \mathbf{U}_{iI} N_{I,j}$$

Le tenseur de déformation linéaire est donné par la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Introduisons les trois vecteurs $\mathbf{b}_i$, dérivées des fonctions de forme aux points de Gauss P_3 :

$$\mathbf{b}_i^T(P_3) = \left.\frac{\partial N}{\partial x_i}\right|_{\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=0}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Introduisons également les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}^T &= (\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\ ) \\
\mathbf{h}_1^T &= (\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1\ ) \\
\mathbf{h}_2^T &= (\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1\ ) \\
\mathbf{h}_3^T &= (\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\ ) \\
\mathbf{h}_4^T &= (-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\ ) \\
\mathbf{X}_1^T &= (-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1\ ) \\
\mathbf{X}_2^T &= (-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1\ ) \\
\mathbf{X}_3^T &= (-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\ )
\end{aligned}$$

Les trois vecteurs $\mathbf{X}_i^T$ représentent les coordonnées nodales des huit nœuds. Les quatre vecteurs $\mathbf{h}_\alpha^T$ représentent respectivement les fonctions h_1, h_2 , h_3 et h_4 pour chacun des huit nœuds, qui sont définies par :

$$h_1 = \eta\zeta \qquad h_2 = \zeta\xi \qquad h_3 = \xi\eta \qquad h_4 = \xi\eta\zeta$$

Introduisons enfin les quatre vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \frac{1}{8}\left[\mathbf{h}_\alpha - \sum_{j=1}^{3}\left(\mathbf{h}_\alpha^T.\mathbf{X}_j\right)\mathbf{b}_j\right]$$

Le gradient du champ de déplacement peut maintenant s'écrire sous la forme (sans aucune approximation [bib3]) :

$$u_{i,j} = \left(\mathbf{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^{4}\mathbf{h}_{\alpha,j}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T\right)\cdot\mathbf{U}_i = \left(\mathbf{b}_j^T + \mathbf{h}_{\alpha,j}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T\right)\cdot\mathbf{U}_i$$

Ou encore, sous forme de vecteur :

$$\nabla_S\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y}+u_{y,x} \\ u_{x,z}+u_{z,x} \\ u_{y,z}+u_{z,y} \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{U}_i$ le déplacement nodal dans la direction i. L'opérateur gradient symétrique (noté ∇_s) discrétisé reliant le tenseur de déformation au vecteur des déplacements nodaux

$$\nabla_s\mathbf{u} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

prend alors la forme matricielle :

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T+h_{\alpha,x}\gamma_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_y^T+h_{\alpha,y}\gamma_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_z^T+h_{\alpha,z}\gamma_\alpha^T \\ \mathbf{b}_y^T+h_{\alpha,y}\gamma_\alpha^T & \mathbf{b}_x^T+h_{\alpha,x}\gamma_\alpha^T & 0 \\ \mathbf{b}_z^T+h_{\alpha,z}\gamma_\alpha^T & 0 & \mathbf{b}_x^T+h_{\alpha,x}\gamma_\alpha^T \\ 0 & \mathbf{b}_z^T+h_{\alpha,z}\gamma_\alpha^T & \mathbf{b}_y^T+h_{\alpha,y}\gamma_\alpha^T \end{bmatrix}$$

La formulation détaillée a été présentée par Belytschko dans [bib3].

4.3 Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'élément est donnée par :

$$\mathbf{K}_e=\int_{\Omega_e}\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}\ d\,\Omega$$

Les cinq points d'intégration considérés se trouvent sur la même droite verticale. Leurs coordonnées sont (ξ,η,ζ) et leurs poids d'intégration sont les racines du polynôme de Gauss-Legendre :

	ξ	η	ζ	ω
P(1)	0	0	$\zeta_1=0.91$	$\omega_1=0.24$
P(2)	0	0	$\zeta_2=0.54$	$\omega_2=0.48$
P(3)	0	0	0	0.57
P(4)	0	0	$-\zeta_2$	ω_2
P(5)	0	0	$-\zeta_1$	ω_1

Ainsi, l'expression de la rigidité $\mathbf{K}_e$ est :

$$\mathbf{K}_e=\sum_{j=1}^{5}\omega(\zeta_j)J(\zeta_j)\mathbf{B}^T(\zeta_j)\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}(\zeta_j)$$

où $J(\zeta_j)$ est le Jacobien, calculé au point de Gauss j, de la transformation entre la configuration unitaire de référence et un hexaèdre arbitraire. La matrice de comportement élastique $\mathbf{C}$ choisie a la forme suivante :

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \bar{\lambda}+2\mu & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda}+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

où E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de cisaillement et $\bar{\lambda}=\frac{E\nu}{1-\nu^2}$ le coefficient de Lamé modifié. Cette loi est spécifique à l'élément SHB8. Elle ressemble à celle que l'on aurait dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes, mis à part le terme (3,3). On peut noter que ce choix entraîne un comportement anisotropique artificiel.
Ce choix permet de satisfaire tous les tests sans introduire de blocage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.4 Matrice de rigidité géométrique Kσ

En introduisant la déformation quadratique $\mathbf{e}^{Q}$:

$$\mathbf{e}^{Q}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{3} u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

on peut définir cette matrice de rigidité géométrique par :

$$\mathbf{u}^{T}\cdot\mathbf{K}_{\sigma}\cdot\mathbf{u}=\int_{\Omega_0}\sigma:\mathbf{e}^{Q}(\mathbf{u},\mathbf{u})\,d\Omega=\int_{\Omega_0}\sigma:(\nabla\mathbf{u}^{T}\cdot\nabla\mathbf{u})\,d\Omega$$

Afin d'exprimer cette matrice dans l'espace discrétisé, introduisons les opérateurs gradient quadratique discrétisés $\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}$ tels que :

$$\mathbf{e}^{Q}(\mathbf{u}(\zeta_j),\mathbf{u}(\zeta_j))=\begin{bmatrix}\mathbf{e}^{Q}_{xx} & \mathbf{e}^{Q}_{yy} & \mathbf{e}^{Q}_{zz}\\ \mathbf{e}^{Q}_{yy} & \mathbf{e}^{Q}_{zz} & \mathbf{e}^{Q}_{xy}+\mathbf{e}^{Q}_{yx}\\ \mathbf{e}^{Q}_{zz} & \mathbf{e}^{Q}_{xy}+\mathbf{e}^{Q}_{yx} & \mathbf{e}^{Q}_{xz}+\mathbf{e}^{Q}_{zx}\\ \mathbf{e}^{Q}_{xy}+\mathbf{e}^{Q}_{yx} & \mathbf{e}^{Q}_{xz}+\mathbf{e}^{Q}_{zx} & \mathbf{e}^{Q}_{yz}+\mathbf{e}^{Q}_{zy}\\ \mathbf{e}^{Q}_{xz}+\mathbf{e}^{Q}_{zx} & \mathbf{e}^{Q}_{yz}+\mathbf{e}^{Q}_{zy} & \\ \mathbf{e}^{Q}_{yz}+\mathbf{e}^{Q}_{zy} & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{xx}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{yy}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{zz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U}\\ \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{yy}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{zz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{xy}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U}\\ \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{zz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{xy}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{xz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U}\\ \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{xy}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{xz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{yz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U}\\ \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{xz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{yz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & \\ \mathbf{U}^{T}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{yz}(\zeta_j)\cdot\mathbf{U} & & \end{bmatrix}$$

Les différents termes $\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{ij}}$ sont donnés par les équations suivantes :

$$\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{xx}}(\zeta_j)=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{yy}}(\zeta_j)=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{y}} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B}_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{y}} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{y}}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{zz}}(\zeta_j)=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{z}} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B}_{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{z}} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{z}}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{Q}}_{\mathbf{xy}}(\zeta_j)=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{y}}+\mathbf{B}_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{y}}+\mathbf{B}_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{y}}+\mathbf{B}_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}}\end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{B}_{\mathbf{xz}}^{\mathbf{Q}}(\zeta_j)=\begin{bmatrix}\mathbf{B_x}\cdot\mathbf{B_z^T}+\mathbf{B_z}\cdot\mathbf{B_x^T} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B_x}\cdot\mathbf{B_z^T}+\mathbf{B_z}\cdot\mathbf{B_x^T} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B_x}\cdot\mathbf{B_z^T}+\mathbf{B_z}\cdot\mathbf{B_x^T}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{yz}}^{\mathbf{Q}}(\zeta_j)=\begin{bmatrix}\mathbf{B_y}\cdot\mathbf{B_z^T}+\mathbf{B_z}\cdot\mathbf{B_y^T} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B_y}\cdot\mathbf{B_z^T}+\mathbf{B_z}\cdot\mathbf{B_y^T} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B_y}\cdot\mathbf{B_z^T}+\mathbf{B_z}\cdot\mathbf{B_y^T}\end{bmatrix}$$

où $\mathbf{B}_i=\mathbf{b}_i^T+h_{\alpha,i}\gamma_\alpha^T$ avec $i=x,y,z$

Avec ces notations, la matrice de rigidité géométrique $\mathbf{k}_\sigma$ au point de Gauss ζ_j est donnée par :

$$\mathbf{k}_\sigma(\zeta_j)=\sigma_{xx}(\zeta_j).\mathbf{B}_{\mathbf{xx}}^{\mathbf{Q}}(\zeta_j)+\sigma_{yy}(\zeta_j).\mathbf{B}_{\mathbf{yy}}^{\mathbf{Q}}(\zeta_j)+\sigma_{zz}(\zeta_j).\mathbf{B}_{\mathbf{zz}}^{\mathbf{Q}}(\zeta_j)$$
$$+\sigma_{xy}(\zeta_j).\mathbf{B}_{\mathbf{xy}}^{\mathbf{Q}}(\zeta_j)+\sigma_{xz}(\zeta_j).\mathbf{B}_{\mathbf{xz}}^{\mathbf{Q}}(\zeta_j)+\sigma_{yz}(\zeta_j).\mathbf{B}_{\mathbf{yz}}^{\mathbf{Q}}(\zeta_j)$$

et la matrice de rigidité géométrique de l'élément est donnée par :

$$\mathbf{K}_\sigma=\sum_{j=1}^{5}\omega(\zeta_j)J(\zeta_j)\mathbf{k}_\sigma(\zeta_j)$$

4.5 Matrice de pression K_p

Les forces de pression suiveuses sont présentes dans la matrice tangente via la matrice $\mathbf{K_P}$, car les forces externes suiveuses dépendent du déplacement. Les forces de pression suiveuses s'écrivent :

$$\int_{\partial\Omega} p\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\,dS=\int_{\partial\Omega\,0} p\,\mathbf{det}[F(\mathbf{u})]\mathbf{n}_0^T\cdot F(\mathbf{u})^{-1T}\,dS_0=p\,\mathbf{F}_0-p\,\mathbf{K_p}\cdot\mathbf{U}$$
$$F(\mathbf{u})=1+\nabla\mathbf{u}$$

en utilisant les notations :

- $\mathbf{n}_0{}^T=(n_x,n_y,n_z)$, normale à la surface extérieure de l'élément dans la configuration de référence
- $\mathbf{b}_i$, vecteur de dimension 4, dérive des fonctions de forme aux 4 nœuds de la face de l'élément chargée en pression
- S_0 aire de la face chargée en pression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La formulation précédente conduit à une matrice non-symétrique. On sait qu'on peut néanmoins utiliser une formulation symétrique si les forces extérieures dues à la pression dérivent d'un potentiel. C'est le cas si les forces de pression ne travaillent pas sur la frontière du domaine modélisé. On considère donc que la partie symétrique de la matrice suffit. La matrice symétrisée prend la forme suivante :

$$\mathbf{K_p} = S_0 \begin{pmatrix}
0 & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_x - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_y & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_x - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_z \\
0 & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_x - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_y & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_x - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_z \\
0 & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_x - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_y & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_x - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_z \\
0 & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_x - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_y & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_x - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_z \\
\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_y - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_x & 0 & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_y - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_z \\
\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_y - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_x & 0 & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_y - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_z \\
\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_y - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_x & 0 & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_y - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_z \\
\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_y - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_x & 0 & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_y - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_z \\
\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_z - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_x & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_z - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_y & 0 \\
\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_z - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_x & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_z - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_y & 0 \\
\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_z - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_x & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_z - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_y & 0 \\
\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{x}^T n_z - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_x & \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{y}^T n_z - \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{z}^T n_y & 0
\end{pmatrix}$$

C'est une matrice $(12 \text{x} 12)$, qu'il faut multiplier par les déplacements des 4 nœuds de la face sur laquelle on applique une pression.

La formulation est similaire à celle utilisée en 3D, décrite dans [R3.03.04].

5 Stabilisation de l'élément

5.1 Motivations

La sous-intégration de l'élément SHB8 (5 points de Gauss seulement) vise à réduire considérablement le temps de calcul (gradient déplacement, loi de comportement, …). Elle permet également d'écarter les différents blocages rencontrés dans la mise en œuvre numérique des éléments finis.

Cependant, cette sous-intégration n'a pas que des avantages : elle introduit malheureusement des modes parasites associés à une énergie nulle (mode de *Hourglass* ou de sablier). En statique, cela peut conduire à une singularité de la matrice de raideur globale pour certaines conditions aux limites. En dynamique transitoire, en revanche, cela conduit à des modes de sablier qui vont déformer le maillage de façon irréaliste et qui finissent par faire exploser la solution. Cette déficience de la matrice de raideur, due à la sous-intégration, doit donc être compensée en ajoutant à la rigidité élémentaire une matrice de stabilisation. Le noyau de la nouvelle rigidité, ainsi obtenue, doit se réduire aux seuls modes correspondant aux mouvements de solides rigides.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Modes de "Hourglass"

Etant donné que les points d'intégration se trouvent sur la même droite verticale (direction privilégiée), les dérivées des fonctions h_3 et h_4 s'annulent en ces points. L'opérateur gradient discrétisé est ainsi réduit à :

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,x}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_y^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,y}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_z^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,z}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_y^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,y}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_x^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,x}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & 0 \\ \mathbf{b}_z^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,z}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & 0 & \mathbf{b}_x^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,x}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ 0 & \mathbf{b}_z^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,z}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_y^T+\sum_{\alpha=1}^{2} h_{\alpha,y}\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix}$$

Les modes de *Hourglass* sont des modes de déplacement à énergie nulle, i.e. ils vérifient $\mathbf{Bu}=0$. Les six modes, autres que les modes de solides rigides, qui vérifient cette équation sont :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{h}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_4 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_4 \end{bmatrix}$$

5.3 Stabilisation du type "Assumed Strain Method"

Dans cette approche, inspirée des travaux de Belytschko, Bindeman et Flanagan [bib3] [bib4], les dérivées $\mathbf{b_i}$ des fonctions de forme ne sont pas calculées aux points de Gauss mais moyennées sur l'élément :

$$\hat{\mathbf{b}}_i^T=\frac{1}{V}\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_{,i}(\xi,\eta,\zeta)d\Omega \quad , \quad i=1,2,3$$

Ainsi, le nouvel opérateur gradient discrétisé peut s'écrire :

$$\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{B}+\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'expression de $\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}$ est donnée par :

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}=\begin{bmatrix} \sum_{\alpha=3}^{4} h_{\alpha,x}\hat{\gamma}_{\alpha}^{T} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{\alpha=3}^{4} h_{\alpha,y}\hat{\gamma}_{\alpha}^{T} & 0 \\ 0 & 0 & h_{3,z}\hat{\gamma}_{3}^{T} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{4,y}\hat{\gamma}_{4}^{T} \end{bmatrix}$$

et celle des vecteurs $\hat{\gamma}_{\alpha}$ par :

$$\hat{\gamma}_{\alpha}=\frac{1}{8}\left[\mathbf{h}_{\alpha}-\sum_{j=1}^{3}\left(\mathbf{h}_{\alpha}^{T}\cdot\mathbf{X}_{j}\right)\hat{\mathbf{b}}_{j}\right]$$

La nouvelle matrice de rigidité devient :

$$\mathbf{K}=\int_{\Omega_e}\mathbf{B}^{T}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}\;d\,\Omega+\int_{\Omega_e}\mathbf{B}^{T}\cdot\mathbf{C}\cdot\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}\;d\,\Omega+\int_{\Omega_e}\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}{}^{T}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}\;d\,\Omega+\underbrace{\int_{\Omega_e}\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}{}^{T}\cdot\mathbf{C}\cdot\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}}_{\mathbf{K}^{\mathbf{stab}}}\;d\,\Omega$$

Le dernier terme de l'équation précédente ($\mathbf{K}^{\mathbf{stab}}$) suffit pour stabiliser l'élément. On peut donc réduire la matrice de rigidité stabilisée à :

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}_{e}+\mathbf{K}^{\mathbf{stab}}$$

$$\mathbf{K}^{\mathbf{stab}}=\int_{\Omega_e}\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}{}^{T}\cdot\mathbf{C}\cdot\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}\,d\,\Omega$$

Les nombreux cas qui ont été étudiés ont montré qu'il suffit de calculer les termes diagonaux de la matrice de stabilisation $\mathbf{K}^{\mathbf{stab}}{}_{ii}$, $i=1,2,3$, qui sont donnés par :

$$\mathbf{K}_{11}^{\mathbf{stab}}=H_{11}(\overline{\lambda}+2\mu)[\$\gamma_{3}\$\gamma_{3}^{T}+\frac{1}{3}\$\gamma_{4}\$\gamma_{4}^{T}]$$

$$\mathbf{K}_{22}^{\mathbf{stab}}=H_{22}(\overline{\lambda}+2\mu)[\$\gamma_{3}\$\gamma_{3}^{T}+\frac{1}{3}\$\gamma_{4}\$\gamma_{4}^{T}]$$

$$\mathbf{K}_{33}^{\mathbf{stab}}=\mu\frac{H_{33}}{3}E\$\gamma_{4}\$\gamma_{4}^{T}$$

Les coefficients H_{ii} sont eux-mêmes donnés par l'équation suivante, dans laquelle il n'y a pas de sommation sur les indices répétés :

$$H_{ii}=\frac{1}{3}\frac{\left(\mathbf{X}_{j}^{T}\cdot\mathbf{X}_{j}\right)\left(\mathbf{X}_{k}^{T}\cdot\mathbf{X}_{k}\right)}{\left(\mathbf{X}_{i}^{T}\cdot\mathbf{X}_{i}\right)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Stratégie pour les calculs non-linéaires

6.1 Non-linéarités géométriques

On traite ici le cas des grands déplacements, mais avec des rotations faibles (voir plus loin) et des petites déformations. On adopte pour cela une formulation lagrangienne mise à jour.

En non linéaire nous cherchons à écrire l'équilibre entre forces internes et force externes à la fin de l'incrément de charge (repéré par l'indice 2) :

$$F_2^{\text{int}} = F_2^{extr}$$

L'expression des forces internes s'écrit :

$$F_2^{\text{int}} = \int_{\Omega_2} \mathbf{B}_2^T \sigma_2 \, dV$$

Dans l'équation précédente l'opérateur $\mathbf{B}_2$ est l'opérateur permettant de passer du déplacement à la déformation linéaire calculé sur la géométrie à la fin du pas, la contrainte σ_2 est la contrainte de Cauchy à la fin du pas et l'intégration est faite sur le volume Ω_2 déformé à la fin du pas.

L'élément est programmé en petites rotations. En effet l'incrément de déformation est calculé en utilisant uniquement la déformation linéaire :

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla_1(\Delta\underline{\mathbf{u}})}} + \underline{\underline{\nabla_1^T(\Delta\underline{\mathbf{u}})}}\right)$$

L'opérateur gradient est calculé sur la géométrie de début de pas. Cette écriture de la déformation est limitée aux petites rotations (<5 degrés).

On peut sans difficulté étendre la formulation aux grandes rotations en incluant dans la déformation les termes de second ordre :

$$\Delta\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla_1(\Delta\,\mathbf{u})}} + \underline{\underline{\nabla_1^T(\Delta\,\mathbf{u})}} + \underline{\underline{\nabla_1^T(\Delta\,\mathbf{u})}}\cdot\underline{\underline{\nabla_1(\Delta\,\mathbf{u})}}\right)$$

En élasticité, la loi de comportement s'écrit :

$$\Delta\underline{\underline{\pi}} = \mathbf{C}'\Delta\underline{\underline{E}}$$

où $\mathbf{C}$ est la matrice de Hooke. Remarquons que pour le SHB8 cette matrice est une matrice orthotrope transverse qui s'écrit dans les axes du lamina :

$$[\mathrm{C}'] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La formule permettant de calculer la contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma_2}}$ à partir de la contrainte de Piola Kirchhoff II $\underline{\underline{\pi_2}}$ est :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\pi_2}} = \underline{\underline{\sigma_1}} + \Delta\underline{\underline{\pi}} \\ \underline{\underline{\sigma_2}} = \dfrac{1}{\det\left(\underline{\underline{F}}\right)} \underline{\underline{F^T}}\,\underline{\underline{\pi_2}}\,\underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\nabla_1 \Delta \mathbf{u}}} \end{cases}$$

La combinaison des quatre dernières équations avec l'expression des forces internes donne la formulation de l'élément en grandes déformations en Lagrangien mis à jour.

Remarquons que cette formulation Lagrangienne mise à jour est totalement équivalente à la formulation Lagrangienne totale pour laquelle les forces internes s'écrivent :

$$F_2^{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u})\right)_0^T \pi_2 \, dV$$

Dans ce cas toutes les intégrations sont faites sur la géométrie initiale Ω_0 la contrainte π_2 utilisée est la contrainte de Piola Kirchhoff II. Cette dernière méthode est probablement préférable lorsque le maillage se déforme significativement et permet donc de traiter les problèmes en grandes déformations mais nécessite le développement de l'opérateur $\mathbf{B}^{NL}\left(\mathbf{u}\right)$.

L'incrément de déformation en Lagrangien total est exprimé sur la géométrie initiale de la structure.

$$\Delta\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla_0(\Delta\mathbf{u})}} + \underline{\underline{\nabla_0^T(\Delta\mathbf{u})}} + \underline{\underline{\nabla_0^T(\Delta\mathbf{u})}} \cdot \underline{\underline{\nabla_0(\Delta\mathbf{u})}}\right)$$

La combinaison des deux équations précédentes donne la formulation de l'élément en grandes déformations en comportement linéaire matériau.

6.2 Petits déplacements

Dans le cas des petits déplacements on confond géométrie en début et fin de pas, contrainte de Cauchy et de Piola Kirchhoff II, de plus on utilise l'expression linéaire des déformations.

6.3 Forces de stabilisation

Les forces de stabilisation permettent d'éviter les modes de sablier et sont ajoutées dans le calcul des résidus pour équilibrer la contribution de la matrice de raideur de stabilisation au premier membre. Les forces de stabilisation $\mathbf{F}^{\text{stab}}$, à ajouter aux forces internes F_2^{int}, s'écrivent :

$$\mathbf{F}^{\text{stab}} = \mathbf{K}^{\text{stab}}\mathbf{U}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour des raisons d'efficacité, on choisit de ne pas assembler à nouveau $\mathbf{K}^{\mathbf{stab}}$ pour calculer $\mathbf{F}^{\mathbf{stab}}$ en fin de pas, mais plutôt de construire $\mathbf{F}^{\mathbf{stab}}$ à partir de $\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{stab}}$ qu'on a calculée précédemment. On doit pour cela se placer dans le référentiel corotationnel de milieu de pas proposé dans [bib3]. Pour cette raison, on n'obtient pas une expression exacte de $\mathbf{F}^{\mathbf{stab}}$, et quelques itérations supplémentaires sont généralement nécessaires pour converger. Ces quelques itérations sont toutefois insignifiantes par rapport au coût de calcul économisé en n'assemblant pas $\mathbf{K}^{\mathbf{stab}}$.

6.4 Plasticité

Une première version de l'élément traitait uniquement le comportement élastoplastique de Von Mises, à écrouissage isotrope. En chacun des 5 points d'intégration, les formules et la programmation usuelle de la plasticité 3D était utilisées, avec la matrice de comportement linéaire C' orthotrope. Ceci conduisait à modifier l'algorithme usuel d'écoulement élastoplastique tridimensionnel en remplaçant la matrice de Hooke usuelle C par la matrice de comportement orthotrope transverse C'. Le problème non linéaire était résolu par une méthode de Newton.

Pour permette plus de généralité, et donner accès à l'ensemble des lois de comportement, une autre stratégie est désormais utilisée, similaire à celle utilisée pour les COQUE_3D [R3.07.04]. Il s'agit de découpler le comportement suivant la surface moyenne, du comportement transverse, suivant la normale à l'élément. La méthode consiste à supposer que l'élément est en état de contrainte plane dans le repère local de chaque point d'intégration de Gauss et que les déformations hors plan sont élastiques. Cela entraîne alors immédiatement que les déformations totales hors plan sont égales aux déformations élastiques. Après intégration du comportement en contraintes planes, les contraintes hors plan sont calculées de façon élastique. Appelons $\underline{\underline{C}}^{CPT}$ la matrice tangente en contraintes planes. La matrice de comportement tangente pour le comportement choisi s'écrit :

$$\underline{\underline{C}}^{T}=\begin{bmatrix} C^{CPT}_{xxxx} & C^{CPT}_{xxyy} & 0 & C^{CPT}_{xxxy} & 0 & 0 \\ C^{CPT}_{xyyx} & C^{CPT}_{yyyy} & 0 & C^{CPT}_{yyxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ C^{CPT}_{xyxx} & C^{CPT}_{xyyy} & 0 & C^{CPT}_{xyxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Cette méthode permet ainsi de connecter les éléments SHB à toutes les lois de comportement disponibles en contraintes planes dans le Code Aster (de façon analytique ou via la méthode due à De Borst).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Implantation de l'élément SHB8 dans le *Code_Aster*

7.1 Description

Cet élément s'appuie sur les mailles 3D volumiques HEXA8.

7.2 Utilisation

Cet élément s'utilise de la façon suivante :

7.2.1 Maillage

Il faut vérifier la bonne orientation des faces des éléments désignés (compatibilité avec la direction privilégiée) en utilisant ORIE_SHB de l'opérateur MODI_MAILLAGE.

7.2.2 Modélisation

Le nom de la modélisation SHB est utilisée pour affecter élément fini SHB8 aux mailles HEXA8 désignées.

7.2.3 Matériau

L'élément suppose que les coefficients E, module d'Young et NU, coefficient de Poisson sont donnés (aussi bien en linéaire qu'en non linéaire) pour le calcul de la matrice de rigidité élastique ou tangente (termes transverses). Il faut donc renseigner le mot-clé ELAS dans DEFI_MATERIAU.

Tous les comportements non linéaires (compatibles avec une modélisation en contraintes planes) sont utilisables.

A noter que la dilatation thermique n'est pas prise en compte dans la version 12 de Code_Aster pour les éléments SHB.

7.2.4 Conditions aux limites et chargement

Les chargements volumiques habituels sont utilisables : forces de volume, pesanteur.
Les efforts de pression (et les autres efforts surfaciques) sont appliqués sur des éléments de faces, comme en 3D (sous le mot-clé PRES_REP). On aura pris soin au préalable de définir des mailles de peau QUAD4 et d'orienter convenablement les normales sortantes à ces mailles de peau à l'aide de la commande MODI_MAILLAGE mot-clé ORIE_PEAU_3D.

Aucun développement n'a été nécessaire pour les forces de pression réparties et pour les forces de pressions suiveuses. En effet, ces chargements s'appuient sur des mailles de peau identiques à celles des éléments 3D volumiques.

7.2.5 Calcul en élasticité linéaire

Les options de post-traitement disponibles sont SIEF_ELNO et SIEQ_ELNO.

7.2.6 Calcul en flambement linéaire

L'option RIGI_MECA_GE étant activée dans le catalogue de l'élément, il est possible d'effectuer un calcul de flambement classique après assemblage des matrices de rigidité élastique et géométrique.

7.2.7 Calcul non linéaire géométrique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut effectuer des calculs non linéaires en petites déformations (DEFORMATION='PETIT') ou des grands déplacements et des petites rotations (DEFORMATION='GROT_GDEP') dans STAT_NON_LINE ou DYNA_NON_LINE.
La stratégie utilisée étant basée sur l'utilisation d'une matrice de rigidité tangente au cours des itérations (réactualisation en début de pas uniquement), on veillera à ne pas utiliser une autre option que celle qui est activée par défaut, à savoir REAC_ITER = 0 sous NEWTON.

7.2.8 Calcul non linéaire matériau

Tous les comportements non linéaires de milieux continus sont utilisables (mot clé RELATION = sous COMPORTEMENT). Dans le cas où le comportement n'est pas intégré de façon analytique en contraintes planes, la méthode de De Borst [R5.03.03] est automatiquement utilisée.

La stratégie utilisée étant basée sur l'utilisation d'une matrice de rigidité tangente au cours des itérations (réactualisation en début de pas uniquement), on veillera à ne pas utiliser une autre option que celle qui est activée par défaut, à savoir REAC_ITER = 0 sous NEWTON.

7.3 Particularités de l'implantation

Les forces de stabilisation de l'élément nécessitent le stockage d'un vecteur de taille 12 pour chaque point de Gauss. Nous avons choisi de stocker ces termes comme composantes supplémentaires du champ de contraintes.

7.4 Validation

Les tests validant cet élément sont les suivants :

1) SDLS109 : Fréquences propres d'un anneau cylindrique épais
2) SSLS101 : Plaque circulaire posée sous pression
3) SSLS105 : hémisphère doublement pincée [V3.03.105] test classique pour vérifier la convergence de l'élément,
4) SSLS108: poutre vrillée en flexion, test permettant de vérifier l'absence de blocage [V3.03.108],
5) SSLS123 : sphère sous pression externe [V3.03.123] pour valider les chargements de pression et le comportement orthotrope particulier à cet élément,
6) SSLS124 : plaque mince en flexion avec divers élancements, pour délimiter le domaine d'usage de l'élément [V3.03.124]. Les résultats sont corrects (moins de 1% avec la solution analytique) pour des rapports d'élancement (épaisseur/largeur) allant de 1 à 5 10^{-3},
7) SSLS125 : flambage (modes d'Euler) d'un cylindre libre sous pression externe [V3.03.125] ce test permet de valider la nature de rigidité géométrique,
8) SSLS129 : Modélisation d une coque doublement sinusoïdale
9) SSNS101 : claquage d'un toit cylindrique [V6.03.101]. Ce test permet de valider le calcul non linéaire géométrique et l'élastoplasticité,
10) SSNS102 : flambage d'une coque avec raidisseurs en grands déplacements et pression suiveuse [V6.03.102].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Bibliographie

[1] LEGAY A. and COMBESCURE A. : “Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8”, International Journal for Numerical Methods and Engineering, Vol. 57, 1299-1322, 2003

[2] ABED-MERAIM F. and COMBESCURE A. : “ SHB8 a new adaptative assumed strain continuum mechanics shell element for impact analysis ”, Computers and Structures, Vol. 80, 791-803, 2002

[3] BELYTSCHKO T. and BINDEMAN L.P. : “Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral elements”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 105, 225-260, 1993

[4] FLANAGAN D.P. and BELYTSCHKO T. : “A uniform strain hexahedron and equilateral with orthogonal hourglass control”, International Journal for Numerical Methods and Engineering, Vol. 17, 679-706, 1981

[5] RIKS E. : “An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, 524-551, 1979

9 Description des versions

Indice document	Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
A	7.2	S.BAGUET,A.COMBESCURE INSA Lyon J.M. PROIX EDF R&D AMA	Version initiale
B	9.4	Trinh Vuong Dieu, X Desroches EDF R&D AMA	Modification de Bstat §5.3, et de l’intégration des comportements non linéaires §6.4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)