Éléments finis de joint mécaniques et éléments finis de joint couplés hydromécanique

Résumé :

Cette documentation porte sur la description des éléments finis de joint mécanique linéaire et quadratique. Les modélisations en mécanique pure (xxx_JOINT) supportent les deux types de maillages, tandis que les modélisations couplés hydromécaniques (xxx_JOINT_HYME) ne sont implémentées que pour des maillages quadratique. On procède à l'élimination de degrés de liberté fictifs de pression pour les modélisations quadratiques en mécanique pure. Ces modélisations permettent de simuler l'évolution d'une fissure le long d'un chemin prédéterminé. Le second type d'élément prend également en compte l'interaction de la mécanique avec un écoulement de fluide à l'intérieur de la fissure.

On présente successivement les points suivants :

1) géométrie des éléments
2) repère local au joint et matrice de passage du repère global au repère local
3) saut de déplacement dans le joint
4) gradient de pression de fluide
5) vecteur nodal des efforts intérieurs ainsi que la matrice tangente élémentaire

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Géométrie des éléments

1.1 Géométrie du joint linéaire 2D

L'élément de joint en 2D est un quadrangle à quatre nœuds (QUAD4) avec deux petits côtés et deux grands côtés [12] et [34] (voir figure 1) qui représentent les deux segments Γ^+ et Γ^- d'une interface (ou lèvres d'une fissure) entre deux sous domaines bidimensionnels. Pour distinguer les côtés Γ^+ et Γ^-, la numérotation locale des nœuds doit se faire obligatoirement comme sur la figure ci dessous :

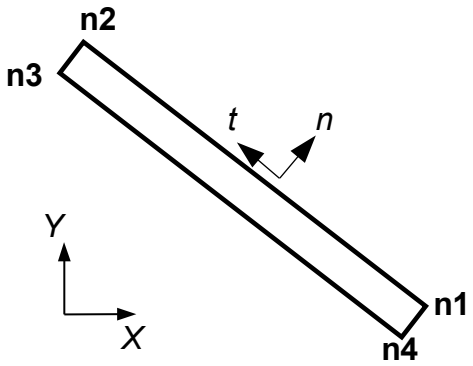


Figure 1 : Élément de joint 2D avec la bonne numérotation locale.

Par convention la face Γ^- est donnée par les nœuds 3 et 4 et la face Γ^+ par les nœuds 1 et 2. La normale n est dirigée de la face Γ^- vers la face Γ^+.

1.2 Géométrie du joint quadratique 2D

Ces éléments sont quadrangle à 8 nœuds (QUAD8), les nœuds 1, 2, 3, 4, 5, 7 portent des degrés de liberté mécaniques de déplacement. Les nœuds 6 et 8 portent des degrés de liberté de pression afin représenter l'écoulement de fluide pour la modélisation couplée hydromécanique. Ils sont éliminés pour les modélisations mécaniques pures.

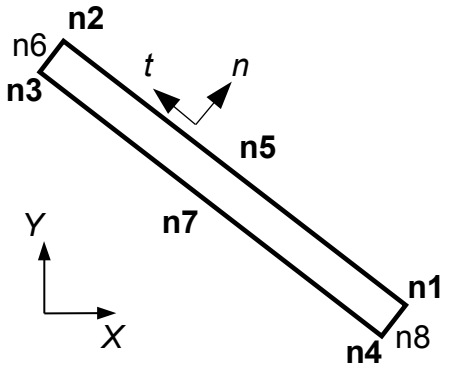


Figure 2 : Élément de joint HYME 2D avec la bonne numérotation locale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par convention la face Γ^- est donnée par les nœuds 3, 4, 7 et la face Γ^+ par les nœuds 1, 2, 5. La normale n est dirigée de la face Γ^- vers la face Γ^+.

1.3 Géométrie du joint linéaire 3D

Les éléments de joint en 3D permettent de représenter une surface S entre deux sous domaines volumiques Ω^+ et Ω^-. Ils sont compatibles avec le maillage des sous domaines. Si le volume est maillé avec des HEXA8, les joints à utiliser sont également des HEXA8 (hexaèdres à huit nœuds). Si le volume est maillé avec des PENTA6 ou des TETRA4, les joints à utiliser sont des PENTA6 (pentaèdres à six nœuds).
Pour distinguer les surfaces supérieures S^+ (liée à Ω^+) et inférieure S^- (liée à Ω^-), il est nécessaire d'imposer une numérotation locale des nœuds bien spécifique (voir figure 3).

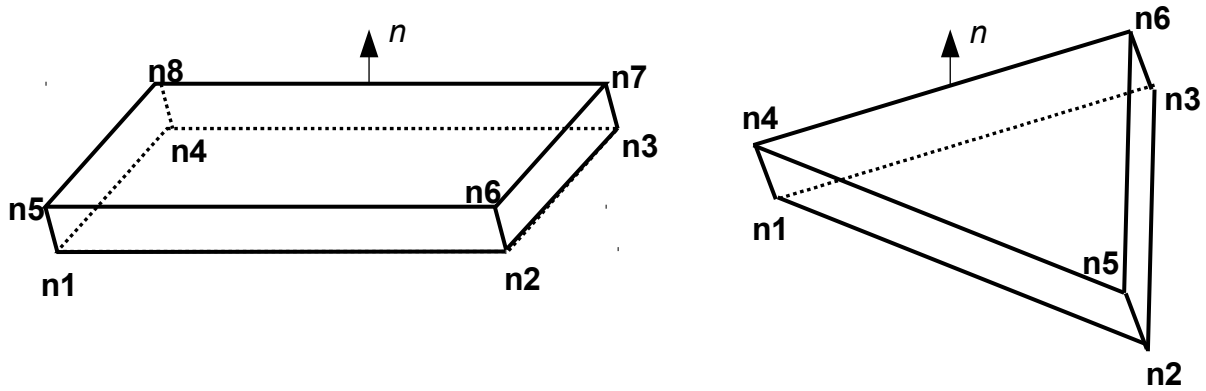


Figure 3 : Schéma des éléments de joint 3D HEXA8 et PENTA6 avec la bonne numérotation locale.

Par convention la face Γ^- est donnée par les nœuds 1,2, 3, 4 pour l'HEXA8 (ou 1, 2, 3 pour le PENTA6) et la face Γ^+ par les nœuds 5, 6 ,7, 8 pour l'HEXA8 (ou 4, 5, 6 pour le PENTA6). La normale n est dirigée de la face Γ^- vers la face Γ^+.

1.4 Géométrie du joint quadratique 3D

Ces éléments de joint sont utilisables pour les modélisations couplés HYME ou pour les modélisations en mécanique pure par l'élimination de DDL de pression. En 3D ils permettent de représenter une surface S entre deux sous domaines volumiques *en mécanique pure* Ω^+ et Ω^-. Ils sont compatibles avec le maillage des sous domaines. Si le volume est maillé avec des HEXA20, les joints à utiliser sont également des HEXA20 (hexaèdres à vingt nœuds). Si le volume est maillé avec des PENTA15 ou des TETRA4, les joints à utiliser sont des PENTA15 (pentaèdres à 15 nœuds).

Pour distinguer les surfaces supérieures S^+ (liée à Ω^+) et inférieure S^- (liée à Ω^-) il est nécessaire d'imposer une numérotation locale des nœuds bien spécifique (voir figure 4).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

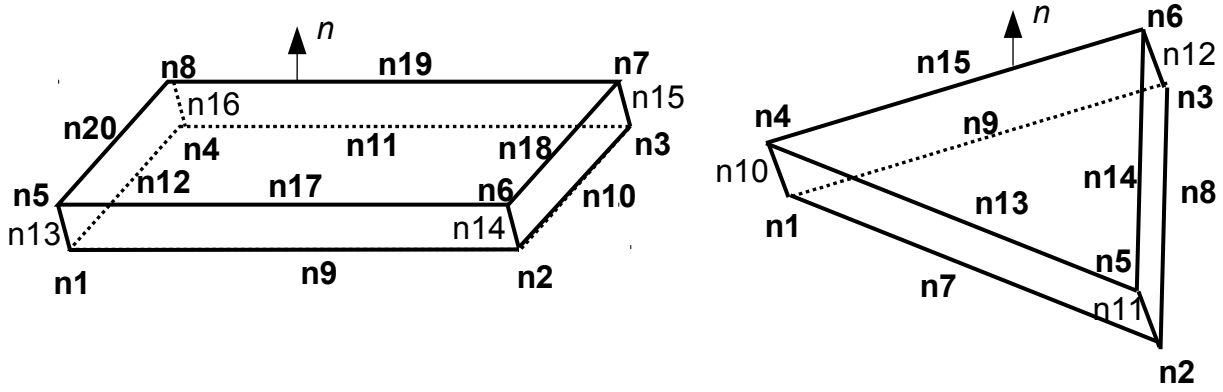


Figure 4 : Schéma des éléments de joint couplés HYME en 3D HEXA20 et PENTA15 avec la bonne numérotation locale.

Pour l'HEXA20, les nœuds milieu 13, 14, 15, 16 portent des degrés de liberté de pression pour l'écoulement de fluide, et tous les autres portent des degrés de liberté mécaniques de déplacement.
Pour le PENTA15, les nœuds milieu 10, 11, 12 portent des degrés de liberté de pression pour l'écoulement de fluide, et tous les autres portent des degrés de liberté mécaniques de déplacement.

Par convention la face Γ^- est donnée par les nœuds 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12 pour l'HEXA20 (ou 1, 2, 3, 7, 8, 9 pour le PENTA15) et la face Γ^+ par les nœuds 5, 6 ,7, 8, 17, 18, 19, 20 pour l'HEXA20 (ou 4, 5, 6, 13, 14, 15 pour le PENTA15). La normale n est dirigée de la face Γ^- vers la face Γ^+.

1.5 Construction automatique de mailles de joint

La commande MODI_MAILLAGE utilisée avec le mot clé ORIE_FISSURE permet d'imposer la bonne numérotation locale des mailles de joint en 2D ou 3D (voir doc. [U4.23.04]).

Par ailleurs des techniques sont disponibles pour créer automatiquement des éléments de joint dans un maillage qui en est dépourvu (voir [U2.05.07]).

2 Repère local et matrice de passage

Il est nécessaire de construire un repère local à l'élément pour définir le saut de déplacement δ (donnée d'entrée des lois de comportement : voir [R7.02.11] et [R7.01.25]). Par ailleurs, on définit la matrice passage $\boldsymbol{R}$ du repère global au repère local. Cette partie est valable pour les modélisations de joint en mécanique pure et pour les modélisations couplées hydromécanique.

2.1 Cas 2D

Soit $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ le repère global. La direction donnée par les grands côtés [12] et [34] de l'élément de joint 2D permet de définir un repère local $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$ à l'élément de joint (voir figure 1) :

$$\boldsymbol{t} = \frac{\vec{12}}{\|\vec{12}\|}, \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \wedge (\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y})$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La matrice de passage du repère global au repère local s'exprime :

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} n_x & n_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix}$$

2.2 Cas 3D

On note $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ le repère global. Pour la construction du repère local à l'élément de joint, on utilise la base covariante de l'élément surfacique correspondant. Si on note $\boldsymbol{s}(\xi^1,\xi^2)$ la position paramétrée d'un point de l'élément surfacique :

$$\boldsymbol{s}(\xi^1,\xi^2)=\sum_{n=1}^{Nb} N_n(\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{s^n}$$

où N_n et s^n désignent respectivement la fonction de forme et la position géométrique du nœud n, et Nb le nombre de nœuds de l'élément surfacique. On définit la base locale covariante $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2})$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{a_1}=\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \xi_1}=\sum_{n=1}^{Nb}\frac{\partial N_n}{\partial \xi^1}\boldsymbol{s^n} \quad \boldsymbol{a_2}=\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \xi_2}=\sum_{n=1}^{Nb}\frac{\partial N_n}{\partial \xi^2}\boldsymbol{s^n}$$

Ces deux vecteurs sont en fait des vecteurs tangent à l'élément en un point donné. La base orthonormée directe locale $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{t},\boldsymbol{\tau})$ est alors construite de la manière suivante :

$$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{a_1}}{\|\boldsymbol{a_1}\|} \quad \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{a_2}}{\|\boldsymbol{a_2}\|} \quad \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{t}$$

La matrice de passage du repère global au repère local est donnée par :

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ t_x & t_y & t_z \\ \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{bmatrix}$$

3 Saut de déplacement

Les joints ont vocation à représenter deux faces en regard, ils ne font intervenir que les fonctions d'interpolation et les points d'intégration des éléments *surfaciques* (en 3D) ou *linéique* (en 2D) correspondant :

En 2D : pour le joint `QUAD4` (ou le joint `HYME QUAD8`), l'élément linéique est le `SEG2`
En 3D : pour le joint `PENTA6` (ou le joint `HYME PENTA15`) l'élément surfacique est le `TRIA3`
pour le joint `HEXA8` (ou le joint `HYME HEXA20`) l'élément surfacique est le `QUAD4`.

On appelle N_n la fonction de forme du nœud n de l'élément surfacique[1]. U^{+n} et U^{-n} désignent respectivement les déplacements nodaux des segments Γ^+ et Γ^- en 2D ou des faces S^+ et S^- en 3D.
Dans le repère local, le saut de déplacement δ est discrétisé à partir des fonctions de forme N_n. Au point de gauss g, il s'exprime comme la différence des déplacements des faces (ou segments) + et - :

1 Par la suite, on utilise le terme générique : « surfacique » pour le 2D comme pour le 3D.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\delta_g = \sum_{n=1}^{Nb} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}^{+n} - \boldsymbol{U}^{-n}) N_n^g$$

où Nb est le nombre de nœuds de l'élément surfacique et où $\boldsymbol{R}$ matrice de passage en 2D, en 3D, qui permet d'exprimer les déplacements nodaux dans le repère local. On peut synthétiser l'expression précédente dans une matrice $\boldsymbol{M}_g^U$ qui agit sur le vecteur des déplacements nodaux de l'élément : $\boldsymbol{U}$, pour construire le saut de déplacement dans le repère local :

$$\delta_g = \boldsymbol{M}_g^U \boldsymbol{U}$$

La matrice $\boldsymbol{M}_g^U$ est de dimension $ndim \times Nddl_U$, avec $Nddl_U$ nombre de degrés de liberté *mécanique* :

$Nddl_U = 8$ pour le joint 2D,
$Nddl_U = 24$ pour le joint 3D HEXA
$Nddl_U = 18$ pour le joint 3D PENTA
$Nddl_U = 12$ pour le joint HYME 2D
$Nddl_U = 48$ pour le joint HYME 3D HEXA
$Nddl_U = 36$ pour le joint HYME 3D PENTA

4 Gradient de la pression de fluide

Les éléments de joint HYME ont, en plus des degrés de liberté mécaniques $\boldsymbol{U}$, des degrés de liberté de pression de fluide nodaux (un par nœud) notés $\boldsymbol{P}$.
Pour le QUAD8, les nœuds nœuds suivants 6,7,8 portent ces degrés de liberté de pression. L'élément quadratique de référence utilisé pour l'approximation de la pressions est le SEG3.
Pour l'HEXA20, les nœuds 13,14,15,16,17,18,19,20 portent ces degrés de liberté de pression. L'élément surfacique de référence utilisé pour l'approximation de la pressions est le QUAD8.
Pour le PENTA15, les nœuds suivant 10,11,12,13,14,15 portent ces degrés de liberté de pression. L'élément surfacique de référence utilisé pour l'approximation de la pressions est le TRIA6.

La loi d'écoulement du fluide (loi cubique, voir [R7.01.25]) fait intervenir le gradient de pression dans la direction de l'écoulement estimé au point de gauss *g* de façon classique :

$$\nabla p_g = \sum_{n=1}^{Nb} \boldsymbol{P_n} \nabla N_n^g$$

où Nb est le nombre de nœuds de pression et N_n^g la valeur de la fonction de forme du nœud n au point de gauss g . Pour simplifier l'écriture on note :

$$\nabla p_g = \boldsymbol{M}_g^P \boldsymbol{P}$$

La matrice $\boldsymbol{M}_g^U$ est de dimension $(ndim-1) \times Nddl_P$: avec $Nddl_P$ nombre de degrés de liberté *fluide* :

$Nddl_P = 3$ pour le joint HYME 2D
$Nddl_P = 8$ pour le joint HYME 3D HEXA
$Nddl_P = 6$ pour le joint HYME 3D PENTA

5 Efforts intérieurs et matrice tangente

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.1 Cas mécanique pure

La formulation du problème mécanique (voir [R7.02.11] et [R7.01.25]) fait intervenir le travail des efforts le long de la discontinuité, qui n'est autre que l'énergie de surface liée à la fissuration de la structure :

$$W_s(\boldsymbol{\delta}) = \sum_g \omega_g \psi(\boldsymbol{\delta}_g)$$

avec ψ densité d'énergie de surface et ω_g poids du point de gauss g. Cela permet de définir le vecteur des efforts intérieurs :

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}}^U = \frac{\partial W_s(\boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{U}} = \sum_g \omega_g \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\delta}_g} \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_g}{\partial \boldsymbol{U}}$$

Dans l'expression précédente, le premier terme est donné par la loi de comportement cohésive (voir [R7.02.11]). Cela correspond au vecteur contrainte $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_g$ (ou force cohésive) au point de gauss g :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\delta}_g} = \vec{\boldsymbol{\sigma}}_g$$

Le second terme est issue de la définition du saut déplacement dans la partie 3 :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}_g}{\partial \boldsymbol{U}} = \boldsymbol{M}_g^U$$

Le vecteur nodal des forces intérieures s'exprime donc de la manière suivante :

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}}^U = \sum_g \omega_g \boldsymbol{M}_g^{Ut} \vec{\boldsymbol{\sigma}}_g$$

Dans le cadre d'un algorithme de Newton, pour résoudre le problème d'équilibre non linéaire, il est utile de disposer de la matrice tangente élémentaire, c'est-à-dire la dérivée des forces intérieures par rapport aux déplacements nodaux. Dans le cas de l'élément de joint, elle s'exprime simplement :

$$\boldsymbol{K}^{UU} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\text{int}}^U}{\partial \boldsymbol{U}} = \sum_g \omega_g \boldsymbol{M}_g^{Ut} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\sigma}}_g}{\partial \boldsymbol{\delta}_g} \boldsymbol{M}_g^U$$

Cette dernière s'appuie sur l'opérateur tangent : $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{\sigma}}_g}{\partial \boldsymbol{\delta}_g}$ spécifique à la loi de comportement cohésive adoptée (voir [R7.02.11]).

5.2 Cas couplé hydromécanique

Les joints HYME, en plus des efforts nodaux liés à la mécanique $\boldsymbol{F}_{\text{int}}^U$ sur lesquels on reporte[2] la pression de fluide au point de gauss sur la composante normale $\vec{\boldsymbol{p}}_g = (p_g, 0, 0)$ (exprimé dans le repère local à la fissure) :

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}}^U = \sum_g \omega_g \boldsymbol{M}_g^{Ut} (\vec{\boldsymbol{\sigma}}_g - \vec{\boldsymbol{p}}_g)$$

2 Pour prendre en compte le couplage HM

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

possèdent des efforts nodaux pour l'écoulement de fluide sur les nœuds qui portent des ddl de pression.

La formulation du problème hydraulique (voir [R7.01.25]) fait intervenir le travail des efforts du fluide le long du trajet de l'écoulement (à l'intérieur de la fissure) :

$$W_F(\nabla p)=\sum_g \omega_g H(\nabla p)$$

avec H densité d'énergie de surface et ω_g poids du point de gauss g. Cela permet de définir le vecteur des efforts intérieurs :

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}}^{\boldsymbol{P}}=\frac{\partial W_F(\nabla p)}{\partial \boldsymbol{P}}=\sum_g \omega_g \frac{\partial H}{\partial \nabla p_g}\frac{\partial \nabla p_g}{\partial \boldsymbol{P}}$$

Dans l'expression précédente, le premier terme est donné par la loi de comportement cubique du fluide (voir [R7.01.25]). Cela correspond au flux hydraulique $\vec{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{g}}$ au point de gauss g :

$$\frac{\partial H}{\partial \nabla p_g}=\vec{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{g}}$$

D'après la définition du gradient de pression dans 4. Le second terme est donné par :

$$\frac{\partial \nabla p_g}{\partial \boldsymbol{P}}=\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{P}}$$

Le vecteur nodal des forces intérieures s'exprime donc de la manière suivante :

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}}^{\boldsymbol{P}}=\sum_g \omega_g \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{Pt}}\vec{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{g}}$$

Dans le cadre d'un algorithme de Newton, pour résoudre le problème d'équilibre non linéaire, il est utile de disposer de la matrice tangente, c'est-à-dire la dérivée des forces intérieures par rapport aux degrés de liberté. La dérivée des effort intérieur sur les degrés de liberté de déplacement par rapport aux déplacement nodaux donne le terme identique à celui de la matrice obtenue en mécanique pure dans 5.1 :

$$\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{UU}}=\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\text{int}}^{\boldsymbol{U}}}{\partial \boldsymbol{U}}=\sum_g \omega_g \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{Ut}}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{g}}}{\partial \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{g}}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{U}}$$

Dans le cas du couplage hydraulique, les $\boldsymbol{F}_{\text{int}}^{\boldsymbol{U}}$ dépendent explicitement de la pression (voir expression ci-dessus) d'où :

$$\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{UP}}=\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\text{int}}^{\boldsymbol{U}}}{\partial \boldsymbol{P}}=\sum_g \omega_g \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{Ut}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}$$

avec $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{g}}=\frac{\partial \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{g}}}{\partial \boldsymbol{P}}=(-N_g^i,0,0)$ avec $i=1$ à Nb, Nb nombre de nœuds de pression (ou encore nombre de degrés de liberté de pression par élément) et N_n^g la valeur de la fonction de forme du nœud n au point de gauss g.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La dérivée des efforts intérieurs sur les degrés de liberté de pression par rapport aux déplacement nodaux donne :

$$\boldsymbol{K}^{PU}=\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\text{int}}^{P}}{\partial \boldsymbol{U}}=\sum_{g}\omega_{g}\boldsymbol{M}_{g}^{Pt}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{w}}_{g}}{\partial \boldsymbol{\delta}_{g}}\boldsymbol{M}_{g}^{U}$$

Enfin, la dérivée des efforts intérieurs sur les degrés de liberté de pression par rapport aux pressions nodales donne :

$$\boldsymbol{K}^{PP}=\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\text{int}}^{P}}{\partial \boldsymbol{P}}=\sum_{g}\omega_{g}\boldsymbol{M}_{g}^{Pt}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{w}}_{g}}{\partial \nabla p_{g}}\boldsymbol{M}_{g}^{P}$$

La matrice tangente élémentaire (non symétrique) s'exprime de la manière suivante :

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}^{UU} & \boldsymbol{K}^{UP}\\ \boldsymbol{K}^{PU} & \boldsymbol{K}^{PP}\end{bmatrix}$$

Cette dernière s'appuie sur les composantes de l'opérateur tangent : $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{g}}{\partial \boldsymbol{\delta}_{g}}$, $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{w}}_{g}}{\partial \boldsymbol{\delta}_{g}}$ et $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{w}}_{g}}{\partial \nabla p_{g}}$ spécifiques à la loi de comportement cohésive adoptée (voir [R7.01.25]).

6 Fonctionnalités et validation

Voir documentations [R7.02.11] et [R7.01.25].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Description des versions du document

Indice document	Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
B	7.2	J.Laverne, EDF-R&D/AMA	
C	8.4	J.Laverne, EDF-R&D/AMA	
D	9.1	J.Laverne, EDF-R&D/AMA	fiche 9807 intégration des éléments de joint 3D
E	10.4	J.Laverne, EDF-R&D/AMA	Fiche 14831 ajout des modélisations couplées *_HYME
F	11.4	K.Kazymyrenko, J.Laverne EDF-R&D/AMA	Fiche 18711 activation des modélisations quadratiques en mécanique pure
F	12.2	K.Kazymyrenko, J.Laverne EDF-R&D/AMA	Fiche 23070 modélisation P2P2 pour la partie hydromécanique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)