# Relations cinématiques linéaires de type RBE3

**Résumé :**
Ce document décrit la manière dont les relations cinématiques linéaires de type RBE3 sont calculées.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des Matières

1 Introduction....3
1.1 Principe général....3
1.2 Notations....3
2 Définitions....4
3 Expression des relations cinématiques....4
3.1 Obtention des relations cinématiques....4
3.2 Dimension des matrices....6
4 Restriction des relations à certaines composantes....6
4.1 Composantes sur les nœuds esclaves....6
4.2 Composantes sur le nœud maître....6



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Introduction

## 1.1 Principe général

Une relation cinématique linéaire de type RBE3 implique un nœud dit maître et plusieurs nœud dits esclaves. La relation a pour effet de distribuer le torseur d'efforts vu par le nœud maître sur les nœuds esclaves. Les hypothèses de construction des contraintes linéaires imposent, pour chaque nœud esclave :

- une répartition des torseurs pondérée par la distance entre le nœud maître et le nœud esclave courant,
- une pondération relative complémentaire à l'aide de coefficients renseignés par l'utilisateur.

En ne renseignant qu'un seul coefficient (non nul) pour l'ensemble des nœuds, tous les nœuds esclaves sont considérés avec le même poids, et seule la pondération avec la distance sera active.

La distribution se fait de manière à ce que les torseurs sur les nœuds impliqués soient à l'équilibre.

## 1.2 Notations

$X_M$ Coordonnées du nœud maître

$X_i$ Coordonnées du $i$ -ème nœud esclave ( $1 \leq i \leq n$ )

$\xi_i = X_i - X_M = \begin{bmatrix} \xi_{ix} \\ \xi_{iy} \\ \xi_{iz} \end{bmatrix}$ Coordonnées relatives du $i$ -ème nœud esclave

$\omega_i$ Coefficient de pondération du $i$ -ème nœud esclave

$F_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}$ Efforts appliqués au nœud $i$

$M_i = \begin{bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}$ Moments appliqués au nœud $i$

$u_i = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{bmatrix}$ Déplacements du nœud $i$

$\theta_i = \begin{bmatrix} \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix}$ Rotations du nœud

$d_i = \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$ Degrés de liberté du mouvement, potentiellement portés par le nœud $i$

$T_i = \begin{bmatrix} F_i \\ M_i \end{bmatrix}$ Torseur d'effort au nœud $i$

On notera $M^T$ la transposée de la matrice $M$ .

Par ailleurs, on considère que les nœuds portent par défaut les composantes de déplacements et de rotation, soit six degrés de liberté par nœud.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Définitions

La construction des relations cinématiques nécessitent l'introduction des matrices qui permettent d'expliciter les formules de changement de point de réduction pour les différents torseurs. On rappelle que le torseur d'efforts d'un nœud esclave $i$ transporté sur le nœud maître $M$ s'écrit :

$$T_M=\begin{bmatrix} F_M \\ M_M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_i \\ M_i+\xi_i \wedge F_i \end{bmatrix} \tag{1}$$

On introduit ainsi la matrice $S_i$ :

$$S_i=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_{iz} & -\xi_{iy} \\ 0 & 1 & 0 & -\xi_{iz} & 0 & \xi_{ix} \\ 0 & 0 & 1 & \xi_{iy} & -\xi_{ix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

De sorte qu'on puisse écrire :

$$T_M=S_i^T T_i \tag{3}$$

Le calcul des relations nécessite une mise à l'échelle des composantes de rotation, afin que les relations créées ne soient pas modifiées lors d'un changement d'échelle du problème. Pour cela, on définit la longueur caractéristique suivante :

$$L_c=\frac{\sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|}{n} \tag{4}$$

et les matrices (diagonales), associées au coefficient de pondération pour le $i$ -ème nœud esclave :

$$W_i=\omega_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_c^2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

# 3 Expression des relations cinématiques

## 3.1 Obtention des relations cinématiques

Le raisonnement est mené sur la transmission des efforts entre le nœud maître et les nœuds esclaves. Dans un premier temps, on considère que toutes les composantes du nœud maître et toutes les composantes des nœuds esclaves sont impliquées dans la relation (la section §4 aborde la restriction des relations à certaines composantes).

Soit $T_M$ le torseur d'effort du nœud maître que l'on cherche à répartir en $T_i$ torseurs d'efforts sur les $n$ nœuds esclaves. La répartition se fait en utilisant les hypothèses suivantes :

- les torseurs $T_i$ sont issus d'une même combinaison linéaire $XT_M$ du torseur au nœud maître, où $X$ est la matrice associée à la combinaison linéaire,
- cette combinaison linéaire $XT_M$ est distribuée sur les nœuds esclaves en pondérant le transport par la distance entre le nœud maître et le nœud esclave d'une part, et un coefficient de pondération fixé par l'utilisateur d'autre part.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Chaque torseur $T_i$ s'écrit alors :

$$T_i = W_i S_i X T_M \tag{6}$$

La matrice $X$ des coefficients linéaires est déterminée en assurant que le torseur appliqué au nœud maître est identique à l'ensemble des torseurs $T_i$ appliqués aux $n$ nœuds esclaves. $X$ doit donc vérifier :

$$T_M = \sum_{i=1}^{n} S_i^T T_i = \sum_{i=1}^{n} S_i^T W_i S_i X T_M \tag{7}$$

En reformulant le problème de façon matricielle, il vient que $X$ est solution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} S_1^T & \cdots & S_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & W_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} [X] = [I_d] \tag{8}$$

Où $I_d$ est la matrice identité, soit :

$$X = (S^T W S)^{-1} \tag{9}$$

En notant $S$ est l'assemblage des $S_i$ et $W$ est l'assemblage des $W_i$.

On note que la matrice $S^T W S$ doit être inversible. Ceci est assuré par un choix pertinent des degrés de liberté maître et esclave par l'utilisateur. Par exemple, si on cherche à transmettre un torseur complet d'un modèle tridimensionnel à un modèle poutre, il faudra s'assurer que les nœuds esclaves associés au modèle tridimensionnel ne soient pas alignés. Si c'est le cas, les nœuds d'un modèle tridimensionnel ne portant pas les degrés de liberté de rotation, on crée un mécanisme tel que la rotation autour de l'axe formé par l'alignement de nœuds esclaves n'est pas bloquée.
On note maintenant $B_i = W_i S_i X$ . De la relation $T_i = B_i T_M$ , on utilise l'égalité des travaux virtuels pour générer une contrainte sur les degrés de liberté à partir de la relation sur les torseurs. Le travail du torseur $T_M$ sur les degrés de liberté du nœud maître $d_M$ doit être égal à celui des différents torseurs $T_i$ sur chacun des degrés de libertés $d_i$ des nœuds esclaves, soit :

$$T_M^T d_M = \sum_{i=1}^{n} T_i^T d_i = T_M^T \left( \sum_{i=1}^{n} B_i^T d_i \right) \tag{10}$$

La relation cinématique appliquée entre le nœud maître et les nœuds esclave s'écrit donc :

$$d_M = \sum_{i=1}^{n} B_i^T d_i \tag{11}$$

**Interprétation de la cinématique :**
En reprenant l'expression (11), on note qu'on a « renversé » le problème initial, puisque si le problème initial consistait à distribuer le torseur d'effort au nœud maître sur les nœuds esclaves, dans la cinématique, cela revient à exprimer les degrés de libertés $d_M$ du nœud maître comme combinaison linéaire des degrés de liberté $d_i$ des nœuds esclaves.
En analysant de plus près la cinématique associée à la matrice $S$ , on constate que chacune des colonnes correspond à un mode de corps rigide (mouvement d'ensemble) de l'ensemble des nœuds esclaves. Les trois premières colonnes sont les mouvements de translation (déplacement unitaire dans une direction, nul dans les deux autres), et les trois dernières colonnes sont les mouvements de rotation autour du nœud maître.
Considérons le cas simple d'une pondération uniforme $w_i = 1 \quad \forall i$ , avec un facteur de correction $L_c$ supposé unitaire. Dans ces conditions, $W$ est une matrice identité, la relation (11) devient:



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$d_M=\left(S^T S\right)^{-1} S^T \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

La relation (12) est la solution aux moindres carré d'un problème de minimisation qui s'écrit :

$$d_M = \underset{d_m}{ArgMin} \left\| S d_m - \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (13)$$

En d'autres termes, la relation (13) cherche à déterminer la meilleure combinaison linéaire possible $d_M$ des modes de corps rigides passant par tous les degrés de liberté esclaves $d_i$. Lorsque la pondération est uniforme, la contrainte linéaire construire par la relation (11) consiste donc à imposer le mouvement de corps rigide moyen de l'ensemble des nœuds esclaves au nœud maître. L'ajout d'une pondération $w_i$ sur un nœud conduit à amplifier ou diminuer l'influence relative de ce nœud dans le mouvement du nœud maître.

L'intérêt principal de la liaison type « RBE3 » est d'éviter de sur-contraindre le modèle. Contrairement au cas de la liaison solide, les nœuds esclaves d'une relation type RBE3 peuvent continuer d'avoir des mouvements relatifs.

## 3.2 Dimension des matrices

On note $NDDLES$ le nombre total des degrés de liberté esclaves. Les matrices que l'on manipule ont les dimensions suivantes :

- Matrice $W$ (assemblage des $W_i$) : $NDDLES$ lignes, $NDDLES$ colonnes ;
- Matrice $S$ (assemblage des $S_i$) : $NDDLES$ lignes, six colonnes ;
- Matrice $S^T W S$ : six lignes, six colonnes ;
- Matrice $X$ : six lignes, six colonnes ;
- Matrice $B$ : $NDDLES$ lignes, six colonnes.

# 4 Restriction des relations à certaines composantes

## 4.1 Composantes sur les nœuds esclaves

Pour restreindre les composantes sur les nœuds esclaves aux composantes voulues, seules les lignes des matrices $S_i$ correspondant aux composantes voulues sont conservées (ces matrices deviennent dès lors des matrices rectangulaires et non plus carrées).
Les matrices $W_i$ restent carrées car on supprime les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté esclaves non impliqués dans la relation linéaire.

## 4.2 Composantes sur le nœud maître

Pour restreindre les composantes sur le nœud maître aux composantes voulues, seules les lignes des matrices $B_i$ correspondant aux composantes voulues sont conservées.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)