# Pression suiveuse pour les éléments de coques volumiques

**Résumé :**

Nous présentons dans ce document, le modèle utilisé pour calculer le chargement de type pression suiveuse agissant sur la surface moyenne des éléments finis de coques volumiques correspondant à la modélisation COQUE_3D. La discrétisation du chargement conduit à un vecteur nodal des forces externes et à une contribution non symétrique dans la matrice tangente de rigidité. Ces objets éléments finis sont évalués à chaque itération de l'algorithme de Newton de STAT_NON_LINE.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des matières

# Table des Matières

1 Introduction....3
2 Cinématique....3
2.1 Paramétrisation de la transformée de la surface moyenne....4
3 Formulation variationnelle....6
3.1 Travail virtuel....6
3.2 Opérateur tangent....7
4 Discrétisation....8
5 Bibliographie....13
6 Description des versions du document....13



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Introduction

Notre analyse part de la formulation faible de l'équilibre sous un chargement de type pression suiveuse activé par le mot-clé TYPE_CHARGE :'SUIV' dans la commande STAT_NON_LINE [U4.32.01]. La différence par rapport à une analyse linéaire géométrique classique est que la pression agit sur la géométrie déformée et non plus sur la géométrie initiale. Cette nouvelle géométrie est obtenue à partir de la transformée de la surface moyenne initiale soumise à de grands déplacements et de grandes rotations [R3.07.05]. Les notations sont inspirées de [R3.07.05].

Cette transformée peut être paramétrisée exactement comme la surface initiale en utilisant les coordonnées réduites de l'élément isoparamétrique associé : les repères co-variants ou contra-variants se construisent en chaque point de la surface déformée. L'écriture du travail virtuel de la pression avec cette paramétrisation se fait dans la configuration déformée en utilisant les éléments iso-paramétriques associés. Il en résulte une indépendance du domaine d'intégration avec les déplacements que l'on utilise pour exprimer la variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression par rapport aux dits déplacements. Cela présente un avantage important par rapport à la méthode appliquée pour la pression qui suit les facettes des éléments 3D [R3.03.04]. En effet, cette dernière méthode, basée sur une formulation Lagrangienne actualisée, conduit à des termes non linéaires difficiles à linéariser, provenant de la transformation jacobienne par rapport à la configuration de référence.

Les objets éléments finis obtenus par linéarisation par rapport aux déplacements incrémentaux du travail virtuel des efforts extérieurs de pression sont à réactualiser à chaque itération de l'algorithme de Newton de STAT_NON_LINE. Nous soulignons le fait que la contribution de la pression suiveuse à la matrice tangente de rigidité est non symétrique, et nous rappelons que la partie géométrique de la matrice tangente est déjà non symétrique [bib2].

# 2 Cinématique

Pour les éléments de coque volumique $\Omega$ on définit une surface de référence $\omega$, ou surface moyenne, gauche ( de coordonnées curvilignes $\xi_1\xi_2$ par exemple) et une épaisseur $h(\xi_1\xi_2)$ mesurée selon la normale à la surface moyenne. La position des points de la coque est donnée par les coordonnées curvilignes $(\xi_1,\xi_2)$ de la surface moyenne $\omega$ et l'élévation $\xi_3$ par rapport à cette surface.

On rappelle la grande transformation subie par la coque :

$\omega^\varphi$ (ensemble des points $P^\varphi$ à $\xi_3=0$ ) est la transformée de la surface moyenne initiale $\omega$ (ensemble des points $P à \xi_3=0$ ).

La position du point $P^\varphi$ sur la configuration déformée peut être établie en fonction de la position du point initial $P$ comme suit :

$$x_P^\varphi(\xi_1,\xi_2)=x_P(\xi_1,\xi_2)+u_P(\xi_1,\xi_2) .$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

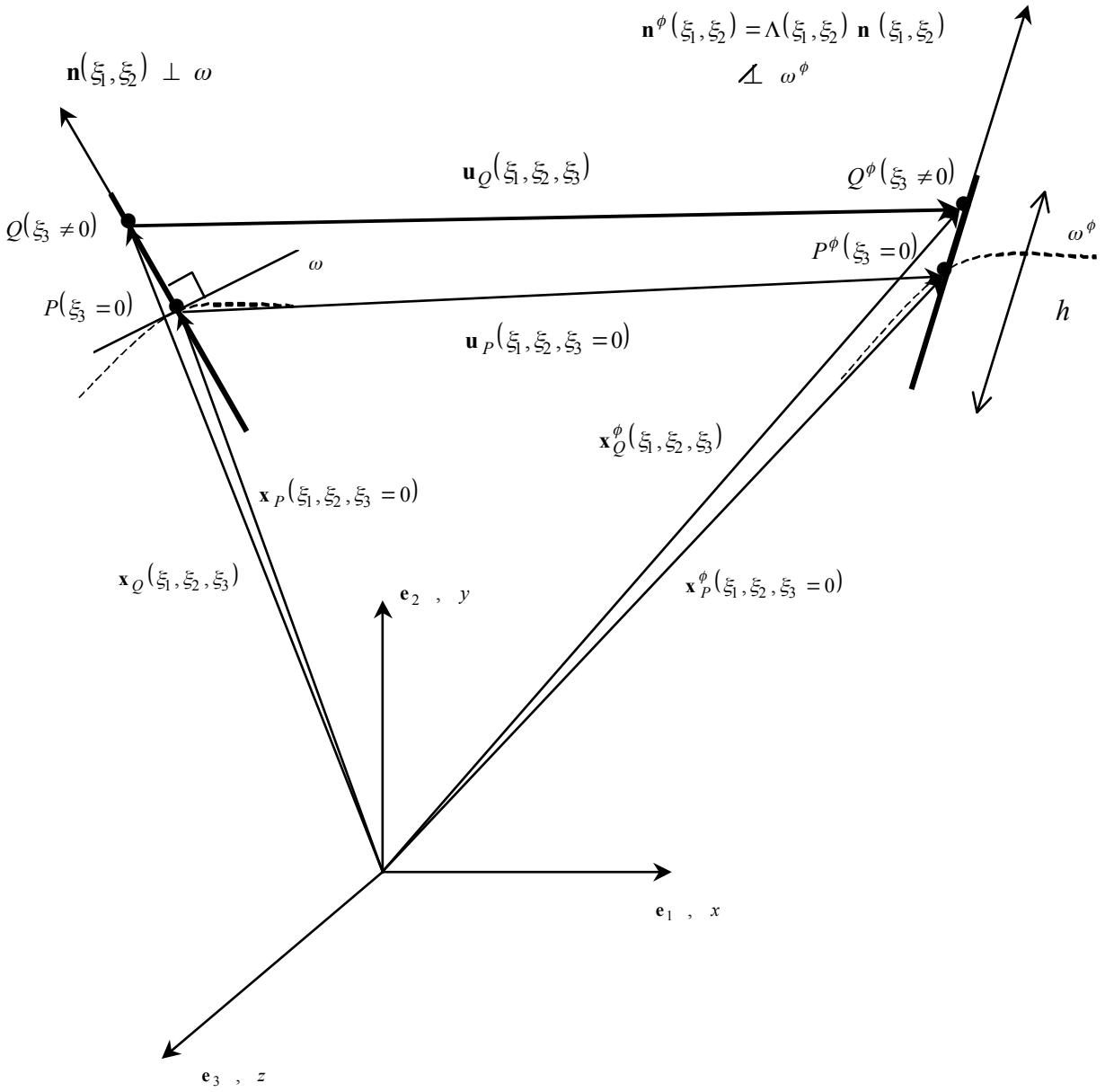



**Figure 2-a : Coque volumique.**
**Grandes transformations d'une fibre initialement normale à la surface moyenne**

## 2.1 Paramétrisation de la transformée de la surface moyenne

La transformée $w^j$ peut être paramétrisée d'une façon similaire à la paramétrisation de la surface initiale. Ainsi on peut définir l'élément infinitésimal de vecteur tangent à $w^j$ :

$$\mathbf{dx}_{\boldsymbol{P}}^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\frac{\partial x_P^{\varphi}}{\partial \xi_1}d\xi_1+\frac{\partial x_P^{\varphi}}{\partial x_1}d\xi_2$$

$$\mathbf{dx}_{\boldsymbol{P}}^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)=d\xi_1 a_1^{\varphi}\left(x_1,x_2\right)+d\xi_2 a_2^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où $\left[a_1^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right);a_2^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)\right]$ représente une base naturelle non orthogonale $\left(a_1^{\varphi}.a_2^{\varphi}\neq 0\right)$ et non normée $\left(\|a_1^{\varphi}\|\neq 1\,;\|a_1^{\varphi}\|\neq 1\right)$ tangente à la surface $\omega^{\varphi}$ . Les deux vecteurs de base peuvent être liés aux déplacements via la formule suivante :

$$a_1^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\frac{\partial x_P^{\varphi}}{\partial \xi_1}=\frac{\partial\left(x_p+u_p\right)}{\partial \xi_1}$$
$$a_2^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\frac{\partial x_P^{\varphi}}{\partial \xi_2}=\frac{\partial\left(x_p+u_p\right)}{\partial \xi_2}$$

ce qui permet de les relier aux vecteurs de la base naturelle liée à la surface initiale $\omega$ par les relations :

$$a_1^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)=a_1\left(\xi_1,\xi_2\right)+\frac{\partial u_p}{\partial \xi_1}$$
$$a_2^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)=a_2\left(\xi_1,\xi_2\right)+\frac{\partial u_p}{\partial \xi_2}$$

Il est important de noter que ces vecteurs sont distincts des vecteurs obtenus par la grande rotation $\Lambda$ des vecteurs $a_1\left(\xi_1,\xi_2\right);a_2\left(\xi_1,\xi_2\right)$ :

$$a_1^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)\neq\Lambda\left(\xi_1,\xi_2\right)a_1\left(\xi_1,\xi_2\right)$$
$$a_2^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)\neq\Lambda\left(\xi_1,\xi_2\right)a_2\left(\xi_1,\xi_2\right)$$

En effet, du fait de la déformation due au cisaillement transverse, les vecteurs tournés ne sont plus tangents à $\omega^{\varphi}$ . L'illustration de cela est donnée par la [Figure 3.1-a].

Avec cette paramétrisation, le vecteur infinitésimal élément de surface qui est perpendiculaire à $\omega^{\varphi}$ peut s'écrire :

$$d\,\omega^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)=a_1^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)\times a_2^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right)d\xi_1 d\xi_2$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Formulation variationnelle

## 3.1 Travail virtuel

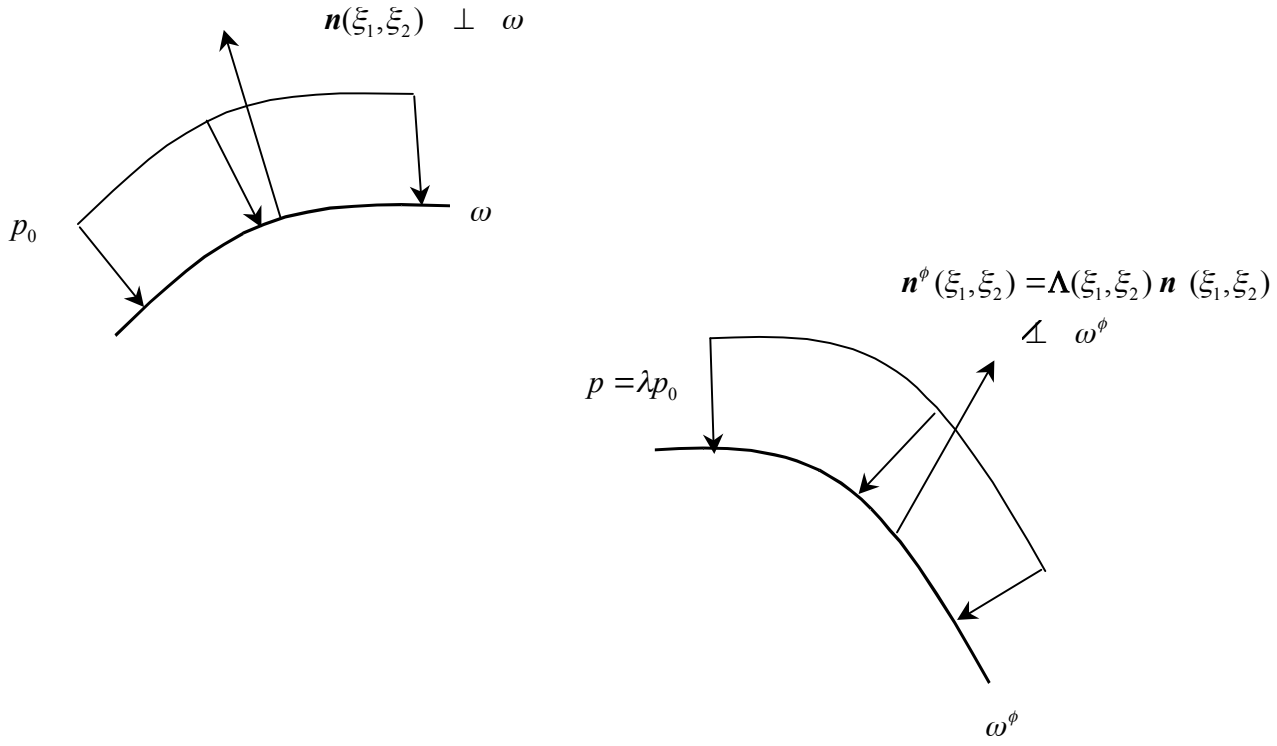



**Figure 3.1-a : Coque volumique.**
**Pression suiveuse sur la surface moyenne initiale et sa transformée**

Le travail virtuel d'une pression **suiveuse** $p$ (c'est-à-dire agissant sur la surface moyenne transformée et se déplaçant avec) peut être exprimé sous la forme :

$$\delta \pi_{\substack{pression \\ suiveuse}} = -\int_{\omega^{\varphi}} \delta u_p . p \, d\omega^{\varphi}$$

Si l'on utilise l'élément de surface isoparamétrique correspondant à notre modélisation de coque volumique, la surface $d\omega^{\varphi}$ s'exprime directement en fonction des coordonnées isoparamétriques $d\xi_1 d\xi_2$ et on obtient la forme simple suivante de l'équation ci-dessus :

$$\delta \pi_{\substack{pression \\ suiveuse}} = -\int_{[-1,+1]\times[-1,+1]} \delta u_p . p\left(\xi_1,\xi_2\right) a_1^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right) \times a_2^{\varphi}\left(\xi_1,\xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.2 Opérateur tangent

Comme le travail virtuel de la pression suiveuse dépend de la configuration courante, sa variation linéaire $\Delta$ n'est pas nulle et doit être prise en compte. L'opérateur tangent associé à ce travail virtuel s'écrit à l'itération $(i+1)$ sous la forme :

$$L\left[\Delta\,\delta\,\pi^{(i+1)}_{\substack{pression\\suiveuse}}\right]=\delta\,\pi^{(i)}_{\substack{pression\\suiveuse}}+\Delta\,\delta\,\pi^{(i)}_{\substack{pression\\suiveuse}}$$

où $\Delta\,\delta\,\pi^{(i)}_{\substack{pression\\suiveuse}}$ est l'incrément entre deux itérations du travail virtuel de la pression suiveuse. Si la pression est donnée sous la forme :

$$p=\lambda\,p_0$$

$\lambda$ étant le niveau de charge qui est fixe durant les itérations (pilotage en charge $\Delta\lambda=0$ ), on peut écrire :

$$\Delta\,\delta\,\pi_{\substack{pression\\suiveuse}}=-\int_{[-1,+1]\times[-1,+1]}\delta\,u_p\,.\,p\left(a_1^{\varphi}\times\Delta\,a_2^{\varphi}-a_2^{\varphi}\times\Delta\,a_1^{\varphi}\right)d\,\xi_1\,d\,\xi_2$$

Les variations incrémentales des vecteurs de la base locale tangente à la transformée de la surface moyenne sont données par :

$$\Delta\,\boldsymbol{a}_1^{\varphi}=\frac{\partial}{\partial\,\xi_1}\Delta\,\boldsymbol{u}_P$$
$$\Delta\,\boldsymbol{a}_2^{\varphi}=\frac{\partial}{\partial\,\xi_2}\Delta\,\boldsymbol{u}_P$$

puisque la surface moyenne initiale ne " bouge " pas pendant les itérations ce qui entraîne $\Delta\,\boldsymbol{x}_P=0$ .

Ces calculs permettent finalement d'établir l'expression de l'incrément du travail virtuel de pression suiveuse sous la forme :

$$\Delta\,\delta\,\pi_{\substack{pression\\suiveuse}}=-\int_{[-1,+1]\times[-1,+1]}\delta\,u_P\cdot P\left(\left[a_1^{\varphi}\times\right]\frac{\partial}{\partial\,\xi_2}\Delta\,u_P-\left[a_2^{\varphi}\times\right]\frac{\partial}{\partial\,\xi_2}\Delta\,u_P\right)d\,\xi_1\,d\,\xi_2$$

où $\left[\boldsymbol{a}_1^{\varphi}\times\right] et \left[\boldsymbol{a}_2^{\varphi}\times\right]$ sont respectivement les matrices antisymétriques des vecteurs tangents $\boldsymbol{a}_1^{\varphi}\,et\,\boldsymbol{a}_2^{\varphi}$ respectivement.

**Remarque :**

*Dans la référence [bib2], une intégration par partie est entreprise sur l'expression ci-dessus. Il est montré que la matrice tangente peut être décomposée en une partie symétrique issue d'une intégration sur le domaine et d'une partie anti-symétrique issue de l'intégration sur le contour. Il est aussi montré que l'assemblage des parties antisymétriques des matrices tangentes élémentaires conduit à une matrice nulle quand la pression est continue d'un élément fini à un autre, du fait de l'existence d'un potentiel associé au travail de la pression dans ce cas là.*



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Discrétisation

Aux points $P$ de la surface moyenne, l'interpolation du déplacement virtuel s'écrit :

$$\delta \boldsymbol{u}\left(\xi_{1,}\xi_{2}\right)=\sum_{I=1}^{NB1} N_{I}^{(1)}\left(\xi_{1,}\xi_{2}\right)\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\\ \delta w\end{pmatrix}_{I}$$

et l'interpolation du déplacement incrémental entre deux itérations s'écrit :

$$\delta \boldsymbol{u}\left(\xi_{1,}\xi_{2}\right)=\sum_{I=1}^{NB1} N_{I}^{(1)}\left(\xi_{1,}\xi_{2}\right)\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\\ \Delta w\end{pmatrix}_{I}$$

Nous réécrivons les deux équations précédentes sous la forme matricielle :

$$\delta \boldsymbol{u}\left(\xi_{1},\xi_{2}\right)=\left[\boldsymbol{N}\right]\left\{\delta \boldsymbol{u}\right\}^{e}$$
$$\Delta \boldsymbol{u}\left(\xi_{1},\xi_{2}\right)=\left[\boldsymbol{N}\right]\left\{\Delta \boldsymbol{u}\right\}^{e}$$

où $\left[N\right]$ est la matrice des fonctions de forme de translation à la surface moyenne, dont l'expression est :

$$\left[N\right]=\left[\ldots\left[N_{I}^{(1)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right]_{I=1,NB1}\ldots\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{NB2}\right]$$

Les fonctions de forme $N_{I}^{(1)}$ et $N_{I}^{(2)}$ (utilisées par la suite sont données en annexe de [R3.07.04]. Les nœuds $I=1,NB1$ sont les nœuds sommets et les milieux des côtés (pour le quadrangle et le triangle). Le nœud $NB2$ est au barycentre de l'élément.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le vecteur $\left\{\delta \boldsymbol{u}\right\}^e$ est le vecteur nodal des déplacements virtuels donné par :

$$\left\{\delta \boldsymbol{u}\right\}^e = \begin{matrix} . \\ . \\ . \\ \begin{pmatrix} \delta w \\ \delta \theta_x \\ \delta \theta_y \\ \delta \theta_z \end{pmatrix}_I \\ . \\ . \\ . \\ I = 1, NB1 \\ \begin{pmatrix} \delta \theta_x \\ \delta \theta_x \\ \delta \theta_x \end{pmatrix}_{NB2} \end{matrix}$$

Le vecteur $\left\{\Delta \boldsymbol{u}\right\}^e$ est le vecteur nodal des déplacements incrémental entre deux itérations.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left\{\Delta \boldsymbol{u}\right\}^e = \begin{matrix} . \\ . \\ . \\ \left(\begin{matrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{matrix}\right)_I \\ . \\ . \\ . \\ \left(\begin{matrix} \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_x \end{matrix}\right)_{NB2} \end{matrix}$$

$$I = 1, NBI$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette discrétisation nous permet aussi d'établir l'expression des dérivées du déplacement incrémental de la surface moyenne par rapport aux coordonnées isoparamétriques surfaciques sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\Delta \boldsymbol{u}\left(\xi_{1,}\xi_2\right)=\left[\frac{\partial}{\partial \xi_2}\boldsymbol{N}\right]\left(\Delta \boldsymbol{u}\right)^e$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_2}\Delta \boldsymbol{u}\left(\xi_{1,}\xi_2\right)=\left[\frac{\partial}{\partial \xi_2}\boldsymbol{N}\right]\left(\Delta \boldsymbol{u}\right)^e$$

où $\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\boldsymbol{N}\right]\text{et}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_2}\boldsymbol{N}\right]$ sont les matrices dérivées des fonctions de formes de translation à la surface moyenne, dont les expressions sont :

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\boldsymbol{N}\right]=\left[\ldots\left[\frac{\partial N_I^{(1)}}{\partial \xi_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right]_{I=1,NB1}\ldots\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{NB2}\right]$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_2}\boldsymbol{N}\right]=\left[\ldots\left[\frac{\partial N_I^{(1)}}{\partial \xi_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right]_{I=1,NB1}\ldots\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{NB2}\right]$$

Ainsi on peut exprimer le travail virtuel de la pression suiveuse sous la forme matricielle suivante :

$$\delta\pi_{\substack{pression\\suiveuse}}=\left\{\delta \boldsymbol{u}^e\right\}.\left\{\boldsymbol{f}^e_{\substack{\boldsymbol{pression}\\\boldsymbol{suiveuse}}}\right\}$$

avec $\left\{\boldsymbol{f}^e_{\substack{\boldsymbol{pression}\\\boldsymbol{suiveuse}}}\right\}$ le vecteur nodal des forces externes qui peut être exprimé de la manière suivante :

$$\left\{\boldsymbol{f}^e_{\substack{\boldsymbol{pression}\\\boldsymbol{suiveuse}}}\right\}=\int_{[-1,+1]\times[-1,+1]}\left[\boldsymbol{N}\right]^T\left(\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{\varphi}}\times\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{\varphi}}\right)d\xi_1\,d\xi_2$$

Il est important de noter qu'avec notre paramétrisation de la transformée de la surface moyenne, le jacobien $\det\left(\left[\boldsymbol{J}\left(\xi_3=0\right)\right]\right)$ de cette surface n'est pas impliqué dans le calcul des objets éléments finis.

On notera aussi que la pression est discrétisée avec une interpolation isoparamétrique des valeurs aux NB2 nœuds :

$$p\left(\xi_1,\xi_2\right)=\sum_{I=1}^{NB2}N_I^{(2)}\left(\xi_1,\xi_2\right)p_I$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut aussi exprimer l'incrément entre deux itérations du travail virtuel de la pression suiveuse sous la forme matricielle :

$$\Delta \delta \pi_{\substack{pression \\ suiveuse}} = -\{\delta \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{e}}\}\{\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{T}\ \substack{pression \\ suiveuse}}\}\{\Delta \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{e}}\}$$

où $\{\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{T}\ \substack{pression \\ suiveuse}}\}$ est la contribution dans la matrice tangente de rigidité des forces externes qui peut être exprimée sous la forme :

$$\{\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{T}\ \substack{pression \\ suiveuse}}\} = \int_{[-1,+1]\times[-1,+1]} [\boldsymbol{N}]\, p \left[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{\Phi}}\times\right] \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \boldsymbol{N}\right] d\xi_1 d\xi_2 - \int_{[-1,+1]\times[-1,+1]} [\boldsymbol{N}]\, p \left[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{\Phi}}\times\right] \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \boldsymbol{N}\right] d\xi_1 d\xi_2$$

**Remarque :**

*On constate que les formulations éléments finis issues de cette approche ne font pas intervenir les degrés de liberté de rotations. Le traitement est donc aussi valable pour les facettes des éléments finis de l'élasticité tridimensionnelle.*



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Bibliographie

1. M. AL MIKDAD : “Statique et Dynamique des Poutres en Grandes Rotations et Résolution des Problèmes d’Instabilité Non Linéaire”, thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, (1998)

2. E.G. CARNOY, N. GUENNOUN & G. SANDER : “Static Buckling Analysis of Shells Submitted to Follower Pressure by the Finite Element Method”, Computers and Structures, Vol. 19, N° 1-2, 41-49, (1984)

3. Ph. JETTEUR : “Cinématique Non Linéaire des Coques”, rapport SAMTECH, contrat PP/GC-134/96, (1998)

4. K. SCHWEIZERHOF & E. RAMM : “Displacement Dependent Pressure Loads in Non Linear Finite Element Analyses”, Computers and Structures, Vol. 18, N° 6, 1099-1114, (1984)

5. J.C. SIMO, R.L. TAYLOR & P. WRIGGERS : “A Note on Finite-Element Implementation of Pressure Boundary Loading”, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 7, 513-525 (1995)

6. I. VAUTIER : “Mise en œuvre de STAT_NON_LINE”, manuel de Descriptif Informatique *Code_Aster* [D9.05.01]

7. P. MASSIN, M. AL MIKDAD : “*Code_Aster* : Eléments de coques volumiques en Non Linéaire Géométrique”, manuel de Référence du *Code_Aster* [R3.07.05]

8. E. LORENTZ : “ Efforts extérieurs de pression en grands déplacements ”, manuel de Référence du *Code_Aster* [R3.03.04]

9. P. MASSIN et A. LAULUSA : “Modélisation Numérique des Coques Volumiques”, manuel de Référence du *Code_Aster* [R3.07.04]

# 6 Description des versions du document

| Version Aster | Auteur(s) Organisme(s) | Description des modifications |
|---|---|---|
| 01/05/00 | P.MASSIN EDF:R&D/MMN<br>*AL MIKDAD ( SAMTECH)* | Texte initial |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)