Liaison coque-poutre

Résumé :

On décrit ici la liaison coque-poutre, qui permet de raccorder deux parties de maillage, l'une constituée d'éléments de poutres (ou d'un élément discret) , et l'autre maillée en éléments de coques (pour représenter des phénomènes hors cinématique de poutre). Ce développement fonctionne donc sous des hypothèses traduisant que c'est la même cinématique de poutre qui est transmise entre les deux maillages, de part et d'autre de la liaison. Il se traduit par 6 relations linéaires reliant les déplacements de l'ensemble des nœuds du bord de la coque avec les 6 degrés de liberté du nœud extrémité de la poutre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Hypothèses et applications....3
1.1 Hypothèses et limitations....3
1.2 Applications visées :....3
1.2.1 Modélisation des tuyauteries....3
1.2.2 Raccordement plaque poutre....3
1.2.3 Poutre à profil symétrique....4
1.2.4 Application d'un chargement ou de conditions aux limites de type " poutre "....4
1.2.5 Application non envisagée :....4
2 Application de la méthode du raccord 3D-poutre. Equations de liaison....4
3 Intégrales à calculer. Cinématique de coque....6
3.1 Calcul du déplacement moyen sur la section S....7
3.2 Calcul de la rotation moyenne de la section S....7
3.3 Calcul du tenseur d'inertie....7
3.4 Implantation de la méthode....7
4 Utilisation....9
4.1 Modélisation....9
4.2 Exemples et tests....9
4.2.1 Test SSLX101....9
4.2.2 Flexion d'une plaque....10
5 Description des versions du document....10

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Hypothèses et applications

1.1 Hypothèses et limitations

On décrit ici la liaison coque-poutre, qui sert à raccorder deux maillages, l'un comportant des éléments de coques (ou de plaques), l'autre comportant des éléments de poutres. Cette fonctionnalité permet de modéliser une structure élancée en deux parties : une partie maillée avec des éléments classiques de poutres, représentant une cinématique et un comportement de poutres, et l'autre partie maillée en éléments de coques, pour faire apparaître d'autres phénomènes (ovalisation, gonflement, plasticité localisée).

Les hypothèses suivantes sont toutefois faites :

- la surface de la section transverse de l'extrémité du maillage de coques est identique à la surface de la section droite de l'élément de poutre qui lui correspond,
- les centres de gravité sont identiques,
- les sections sont planes et coplanaires,
- la normale à la section de coques est confondue avec l'axe de la poutre.

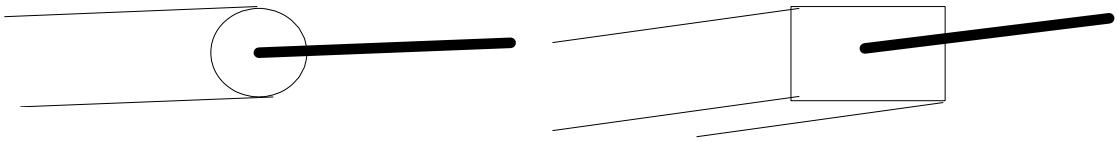
Limitations :

- on ne tient pas compte dans la liaison de l'ovalisation des sections droites,
- on ne tient pas compte du gauchissement.

1.2 Applications visées :

1.2.1 Modélisation des tuyauteries

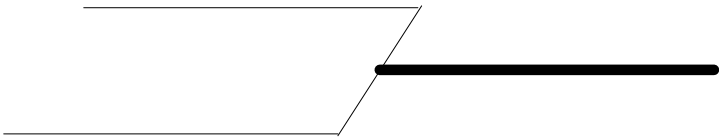
Une des applications majeures concerne les tuyauteries. Les parties coudées ou les piquages sont alors maillés en coques, ce qui permet de faire apparaître une ovalisation, un comportement élastoplastique local ou un gonflement en cas de pression interne. Ce raccord ne transmet pas l'ovalisation des tuyaux puisque celle-ci n'est pas modélisée dans les éléments de poutres. Pour ce faire, il faut utiliser la liaison coque-tuyau ou bien mailler une longueur suffisante de tuyauterie droite en éléments de coques pour que l'ovalisation au niveau du raccord soit négligeable.



Tuyauterie de section circulaire (ou rectangulaire...) maillée en coque puis en poutre.

1.2.2 Raccordement plaque poutre

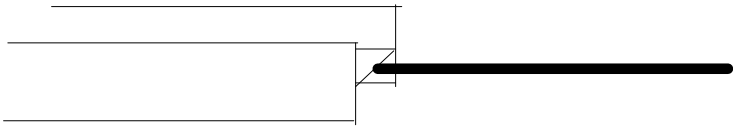
Raccordement plaque-poutre (section rectangulaire mince).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.2.3 Poutre à profil symétrique

Poutre à profil symétrique maillé en partie en coques.

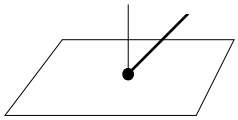


1.2.4 Application d'un chargement ou de conditions aux limites de type " poutre "

A l'extrémité d'une structure élancée maillée en coques, il est souvent utile d'imposer soit un chargement de type " poutre " c'est-à-dire un torseur d'efforts, soit des conditions aux limites (encastrement) compatibles avec la cinématique de poutre. On peut alors relier la section transverse d'extrémité du maillage coques à un élément discret sur lequel on appliquera ce torseur ou cet encastrement.

1.2.5 Application non envisagée :

Cette fonctionnalité ne permet pas de modéliser les ''piquages transverses ou orthogonaux'' d'une poutre sur une plaque ou une coque :



2 Application de la méthode du raccord 3D-poutre. Equations de liaison

La démarche est identique à celle de la liaison poutre-3D [R3.03.03] : le raccord se traduit par 6 relations linéaires reliant les déplacements de l'ensemble des nœuds coque de la section de raccordement (6 degrés de liberté par nœud, comparativement à 3 degrés de liberté par nœud en 3D) aux 6 degrés de liberté du nœud de poutre. La section de raccordement de coque est composée d'éléments de bord de coques (segments). Sur la section traverse de raccordement, on décompose le champ de déplacement " coque " en une partie " poutre " et une partie " complémentaire ". Ceci nous amène à définir les conditions de raccord cinématique entre poutre et coque comme l'égalité du déplacement (torseur distributeur ou torseur cinématique) de poutre et de la partie poutre du champ de déplacement coque

Comme en [R3.03.03], on introduit l'espace $\mathbf{T}$ des champs associés à un torseur cinématique (défini par deux vecteurs) :

$$\mathbf{T}=\left\{v\in V\,/\,\exists\left(T,\Omega\right)\ \text{tel que}\ v\left(M\right)=\mathbf{T}+\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{GM}\right\} \qquad \text{éq 2-1}$$

Ici, $\mathbf{G}$ représente le centre de gravité de la section de raccordement (devant être identique à celui de la poutre). Pour les champs de déplacement de $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}$ est la translation de la section (ou du point $\mathbf{G}$), $\mathbf{\Omega}$ la rotation infinitésimale et les champs $\mathbf{v}$ sont les déplacements de l'espace des déplacements admissibles *V* conservant la section S plane et non déformée (On utilise là encore les Hypothèses de NAVIER-BERNOULLI).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le sous-espace vectoriel $\mathbf{T}$ étant de dimension finie (égale à 6) possède un supplémentaire orthogonal pour le produit scalaire défini sur V :

$$\mathbf{T}^{\perp}=\left\{\mathbf{v}\in V / \int_s \mathbf{v}(M).\mathbf{w}(M)\,dS=0 \quad \forall\, \mathbf{w}\in T\right\} \qquad \text{éq 2-2}$$

Soit, de façon plus explicite :

$$\mathbf{T}^{\perp}=\left\{\mathbf{v}\in V / \int_s \mathbf{v}(M)\,dS=0 \text{ et } \int_s \mathbf{GM}\wedge\mathbf{v}\,dS=0\right\} \qquad \text{éq 2-3}$$

Tout champ de V se décompose de façon unique en somme d'un élément de $\mathbf{T}$ et d'un élément de $\mathbf{T}^{\perp}$.

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}^p+\mathbf{u}^s \quad \mathbf{u}^p\in\mathbf{T} \quad , \quad \mathbf{u}^s\in\mathbf{T}^{\perp} \qquad \text{éq 2-4}$$

On a de plus la propriété suivante :

Pour tout couple de champ coque $(\mathbf{w},\mathbf{v})$ définis sur S ,

$$\begin{matrix}\mathbf{w}=\mathbf{w}^p+\mathbf{w}^s\\ \mathbf{v}=\mathbf{v}^p+\mathbf{v}^s\end{matrix} \Rightarrow \int_s \mathbf{v}.\mathbf{w}\,dS=\int_s \mathbf{v}^p.\mathbf{w}^p\,dS+\int_s \mathbf{v}^s.\mathbf{w}^s\,dS \qquad \text{éq 2-5}$$

Définition :

On appelle composante de déplacement de poutre d'un champ de coque $\mathbf{u}$ *défini sur la section la composante* $\mathbf{u}^p$ de $\mathbf{u}$ *sur le sous-espace* $\mathbf{T}$.

On obtient immédiatement la caractérisation :

$$\mathbf{T}_\mathbf{u}=\frac{1}{|S|}\int_S \mathbf{u}\,dS, \qquad \mathbf{\Omega}_\mathbf{u}=\mathbf{I}^{-1}\left(\int_s \mathbf{GM}\wedge\mathbf{u}\,dS\right) \qquad \text{éq 2-7}$$

où $|S|$ représente l'aire de la section S et $\mathbf{I}$ le tenseur d'inertie géométrique de la surface S, exprimé en $\mathbf{G}$.

En d'autres termes, on peut aussi dire que le calcul de la partie poutre d'un champ coque $\mathbf{u}$ s'opère en utilisant la propriété de projection orthogonale puisque $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}^{\perp}$ sont orthogonaux par définition.

Si on note $\mathbf{u}^p=\mathbf{T}_\mathbf{u}+\mathbf{\Omega}_\mathbf{u}\wedge\mathbf{GM}$, alors :

$$\left(\mathbf{T}_\mathbf{u},\mathbf{\Omega}_\mathbf{u}\right)=\underset{(\mathbf{T},\mathbf{\Omega})}{\text{Argmin}}\int_S\left(\mathbf{u}-\mathbf{T}-\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{GM}\right)^2 \qquad \text{éq 2-6}$$

La composante poutre de $\mathbf{u}$ peut donc être interprétée comme le champ de déplacement de poutre le plus proche de $\mathbf{u}$ au sens des moindres carrés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La condition de raccord cinématique cherchée entre le champ coque sur S et les éléments du torseur de déplacement de la poutre en $\mathbf{G}$ est donnée par :

$$|S|\mathbf{T}-\int_S \mathbf{u}\,dS=0 \qquad \mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega})-\int_S \mathbf{GM}\wedge\mathbf{u}\,dS=0 \qquad \text{éq 2-8}$$

L'équation [éq 2-8] montre que la situation est identique au cas 3D-poutre. Les relations linéaires auront la même forme. La seule différence vient des intégrales sur S (qui représente ici une courbe correspondant à la section de la coque, modélisée par des éléments de bord de coque). De plus, le champ de déplacement de coque fait intervenir des degrés de liberté de rotation.

Pour traduire l'équation [éq 2-8] en relations linéaires, il faut calculer les deux intégrales :

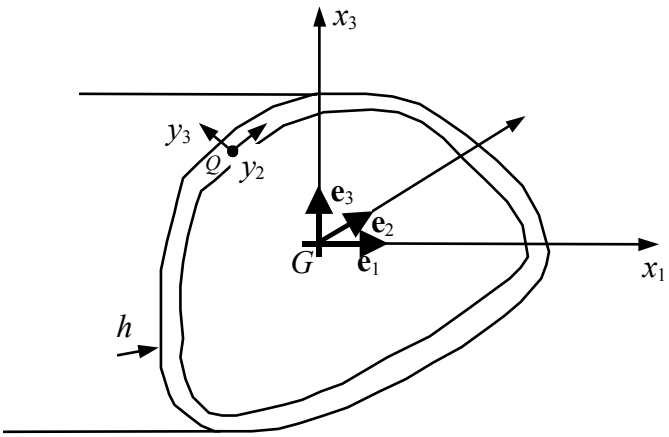
- déplacement moyen : $\int_S \mathbf{u}\,dS$
- rotation moyenne : $\int_S \mathbf{GM}\wedge\mathbf{u}\,dS$

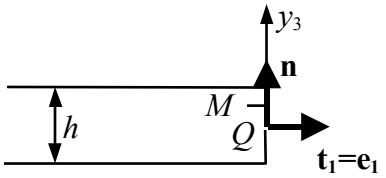
3 Intégrales à calculer. Cinématique de coque.

Pour chaque nœud, le programme calcule les coefficients des 6 relations linéaires [éq 2-8] qui relient :

- les 6 degrés de liberté du nœud de poutre P (géométriquement confondu avec le centre de gravité $\mathbf{G}$ de la section transverse du maillage coques)
- avec les degrés de liberté de **tous** les nœuds de la liste des mailles du bord de coque.

Ces relations linéaires sont dualisées, comme toutes les relations linéaires issues, par exemple, du mot clé `LIAISON_DDL` de `AFFE_CHAR_MECA`. Elles sont construites comme pour la liaison 3D-poutre à partir de l'assemblage de termes élémentaires.





Bord de la section transverse (de coque) de raccordement

$S = l \times I$

l : ligne des points Q sur le feuillet moyen

$I = \left]-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right[$ intervalle décrivant l'épaisseur.

Cinématique de coque ou de plaque linéaire dans l'épaisseur :

$$\mathbf{u}(M)=\mathbf{u}(Q)+(\boldsymbol{\theta}(Q)\wedge\mathbf{n}).y_3$$

- $\mathbf{u}$ est le vecteur déplacement de la surface moyenne en Q ,
- $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la surface moyenne de la coque en Q ,
- $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur rotation en Q de la normale selon les directions $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$ du plan tangent
- y_3 est la coordonnée dans l'épaisseur ($y_3 \in \left]-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right[$).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1 Calcul du déplacement moyen sur la section S

Il s'agit de calculer l'intégrale $\int_S \mathbf{u}\,dS$, où $\mathbf{u}$ est le déplacement de coque (comportant 6 ddl par nœud), S est le bord de coque de la section transverse de raccordement.

Le déplacement moyen sur la section S s'écrit :

$$\int_s \mathbf{u}(M)\,ds = h\int_l \mathbf{u}(Q)\,ds + \int_l (\boldsymbol{\theta}(Q)\wedge\mathbf{n})\left(\int_{-h/2}^{h/2} y_3\,dy_3\right)ds$$

soit $\int_s \mathbf{u}(M)\,ds = h\int_l \mathbf{u}(Q)\,ds$

On néglige dans cette expression les variations de métrique dans l'épaisseur de la coque.

3.2 Calcul de la rotation moyenne de la section S

$$\begin{aligned}&\int_s \mathbf{GM}\wedge\mathbf{u}(M)\,ds = \int_l\int_{-h/2}^{h/2}(\mathbf{GQ}+y_3\,\mathbf{n}(Q))\wedge(\mathbf{u}(Q)+\boldsymbol{\theta}(Q)\wedge\mathbf{n}(Q).y_3)\,ds dy_3\\ &= h\int_l \mathbf{GQ}\wedge\mathbf{u}(Q)\,ds + \int_l \mathbf{GQ}\wedge(\boldsymbol{\theta}(Q)\wedge\mathbf{n}(Q))\,ds\int_{-h/2}^{h/2} y_3\,dy_3\\ &+\int_l \mathbf{n}(Q)\wedge\mathbf{u}(Q)\left(\int_{-h/2}^{h/2} y_3 dy_3\right)ds + \int_l \mathbf{n}(Q)\wedge(\boldsymbol{\theta}(Q)\wedge\mathbf{n}(Q))\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y_3^2 dy_3.ds\end{aligned}$$

soit $\int_s \mathbf{GM}\wedge\mathbf{u}(M)\,ds = h\int_l \mathbf{GQ}\wedge\mathbf{u}(Q)\,ds + \frac{h^3}{12}\int_l \mathbf{n}(Q)\wedge(\boldsymbol{\theta}(Q)\wedge\mathbf{n}(Q))\,ds$.

3.3 Calcul du tenseur d'inertie

Le tenseur d'inertie est défini par [R3.03.03] :

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega}) = \int_s \mathbf{GM}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{GM})\,ds$$

en posant : $\mathbf{GM} = \mathbf{GQ} + \mathbf{n}(Q).y_3$.

On obtient : $\mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega}) = h\int_l \mathbf{GQ}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{GQ})\,ds + \frac{h^3}{12}\int_l \mathbf{n}(Q)\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{n}(Q))\,ds$

3.4 Implantation de la méthode

Le calcul des coefficients des relations linéaires se fait en deux temps :

- calcul de quantités élémentaires sur les éléments de la liste des mailles de bords de coques (maille du type SEG2 ou SEG3) :
  - on calcule les 9 termes :
  - $\int_{elt} ds\,;\int_{elt} x\,ds\,;\int_{elt} y\,ds\,;\int_{elt} x^2\,ds\,;\int_{elt} y^2\,ds\,;\int_{elt} z^2\,ds\,;\int_{elt} xy\,ds\,;\int_{elt} xz\,ds\,;\int_{elt} yz\,ds$

    ainsi que des termes issus de $\mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega})$: $\frac{h^3}{12}\int_l \mathbf{n}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{n})\,ds$

    ce qui permet de calculer : $\frac{h^3}{12}\int_l (n_y^2+n_z^2)\,ds$, $\frac{h^3}{12}\int_l n_x n_y\,ds$, etc…
  - sommation de ces quantités sur (S) d'où le calcul de :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $A=|S|$
- position de $\mathbf{G}$
- tenseur d'inertie $\mathbf{I}$

- connaissant $\mathbf{G}$, calcul élémentaire sur les éléments de la liste des mailles de bords de coques de :

$\int_{elt} N_i\,ds ; \int_{elt} xN_i\,ds ; \int_{elt} yN_i\,ds ; \int_{elt} zN_i\,ds$ où $\mathbf{GM}=\{x, y, z\}$
$N_i=$fonctions de forme de l'élément

(Il faut simplement remarquer que dans le cas présent, les intégrales sur les éléments de bord sont à multiplier par l'épaisseur de la coque : $\int_{elt} N_i\,ds = h\int_{l} N_i\,dl$ où l représente l'abscisse curviligne de la fibre moyenne de l'élément de bord de coque).

De plus, on ajoute les termes supplémentaire provenant de : $\frac{h^3}{12}\int_l \mathbf{n}(Q)\wedge\left(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{n}(Q)\right)ds$

En notant $\mathbf{n}=\begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix}$ et $\boldsymbol{\theta}=\begin{vmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{vmatrix}$ dans le repère global on obtient :

$$\mathbf{n}(Q)\wedge\left(\boldsymbol{\theta}\wedge\mathbf{n}(Q)\right)=\begin{vmatrix} \left(n_y^2+n_z^2\right)\theta_x - n_x n_y \theta_y - n_x n_z \theta_z \\ -n_x n_y \theta_x + \left(n_x^2+n_z^2\right)\theta_y - n_y n_z \theta_z = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\theta} \\ -n_x n_z \theta_x - n_y n_z \theta_y + \left(n_x^2+n_y^2\right)\theta_z \end{vmatrix}$$

alors :

$$\frac{h^3}{12}\int_l \mathbf{n}(Q)\wedge\left(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{n}(Q)\right)ds = \frac{h^3}{12}\sum_{el}\left(\int_{el}\mathbf{A}(s)N_j(s)\,ds\right)\theta_j$$

- "assemblage" des termes calculés ci-dessus pour obtenir en chacun des nœuds des mailles de bord, les coefficients des termes des relations linéaires.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Utilisation

4.1 Modélisation

Pour chaque raccord, l'utilisateur doit définir sous le mot clé facteur LIAISON_ELEM de AFFE_CHAR_MECA :

S : la trace de la section droite de la poutre sur la coque : il le fait par les mots clés MAILLE_1 et/ou GROUP_MA_1 c'est-à-dire qu'il donne la liste des mailles linéiques (affectées d'éléments "bord" de modélisation coque) qui représentent géométriquement cette section.

P : un nœud (mot clé NOEUD_1 ou GROUP_NO_1) portant les 6 degrés de liberté classiques de poutre : DX, DY, DZ, DRX, DRY, DRZ

$\mathbf{V}$: le vecteur définissant l'axe de la poutre, orienté de la coque vers la poutre, et défini par ses coordonnées à l'aide du mot-clé AXE_POUTRE : (v1, v2, v3)

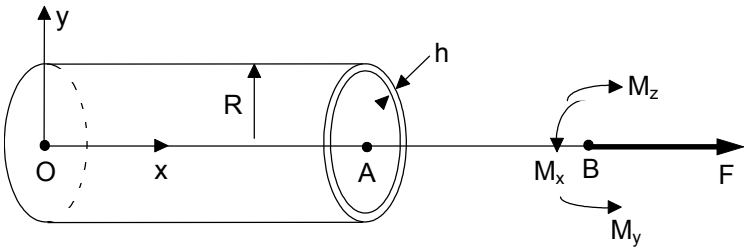
Remarque :

- *le nœud P peut être un nœud d'élément de poutre ou d'élément discret,*
- *la liste des mailles de bord de coque, définie par MAILLE ou GROUP_MA doit représenter **exactement** la section droite de la poutre. C'est une contrainte importante pour le maillage.*

4.2 Exemples et tests

4.2.1 Test SSLX101

Il s'agit d'une poutre droite soumise a des efforts unitaires en B (traction, moments de flexion et de torsion). On prend une section de tube mince d'épaisseur $h \ll R$.



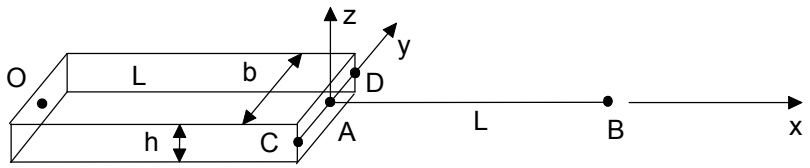
L'encastrement en O est réalisé à l'aide d'une liaison entre le bord de la coque et un élément ponctuel situé en O. Cet élément est encastré (translations et rotations nulles).

Ceci permet d'obtenir dans la coque un état de contraintes très proche d'une solution "poutre" : il n'y a aucune perturbation du champ de contraintes. La solution diffère de la solution analytique (solution RDM) de 3%, ceci étant uniquement dû à la finesse du maillage en éléments de coques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2.2 Flexion d'une plaque

Considérons une plaque mince suffisamment longue, de longueur $2L$, de largeur b, d'épaisseur h, modélisée par un élément de coque OA et un élément de poutre sur AB :



- La 1ère condition de liaison s'écrit :

$$b\,h\,\mathbf{U}(A)=h\int_{CD}\mathbf{U}(y)\,dy$$

le déplacement du point A (appartenant à la poutre) est la moyenne des déplacements du bord CD de la plaque.

- La 2ème condition de raccord s'écrit :

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega})=h\int_{CD}\mathbf{AQ}\wedge\mathbf{U}(Q)\,ds+\frac{h^3}{12}\int_{CD}\boldsymbol{\theta}(Q)\,ds$$

Dans le cas d'une flexion autour de y, le seul terme non nul est : $\frac{h^3}{12}\int_{-\frac{b}{2}}^{b/2}\boldsymbol{\theta}(y)\,dy$

En effet, $h\int_{CD}\mathbf{AQ}\wedge\mathbf{U}(Q)\,ds=h\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}U_z\,y\,dy\right).\mathbf{x}=0$

Pour une flexion autour de y, la liaison s'écrit donc :

$$I_y\theta_y(A)=\frac{b\,h^3}{12}\theta_y \text{ car } \theta_y \text{ est constant sur CD.}$$

Cette application est mise en œuvre dans le test SSLX100B : mélange 3D_coque_poutre.

5 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	J.M.PROIX-R&D/AMA	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)