

## SDLS01 - Plaque carrée mince, libre ou encadrée au bord

---

### Résumé :

Le domaine d'application de ce cas test concerne la dynamique des structures, et plus particulièrement le calcul modal et le calcul de réponse harmonique.

Pour le calcul modal, il s'agit de calculer les modes propres de flexion d'une plaque carrée mince dans deux configurations :

- Plaque encadrée sur un bord,
- Plaque libre.

La plaque est maillée en éléments triangulaires auxquels sont affectés des éléments `DKT`.

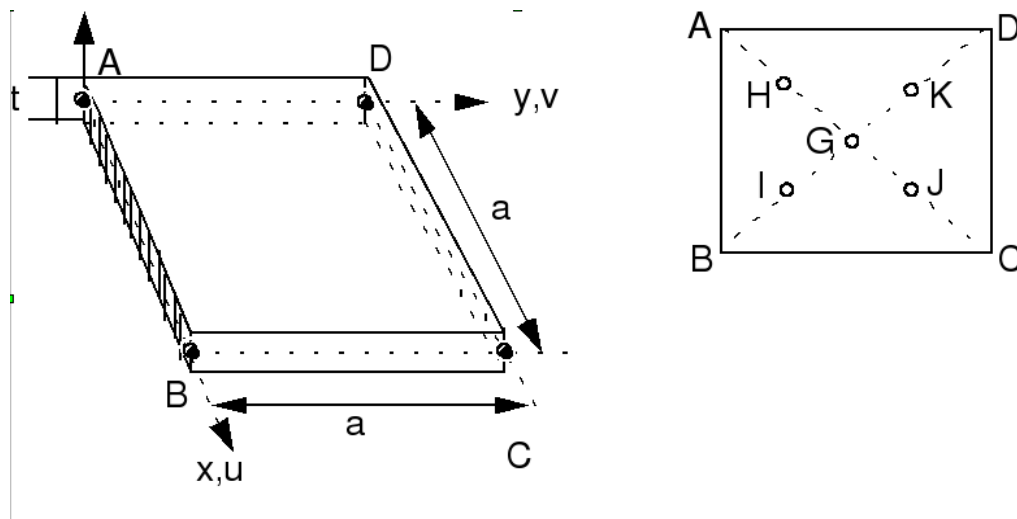
Quatre modélisations différentes sont testées :

- Calcul modal – Arêtes de la plaque orientées selon les axes du repère,
- Calcul modal – Orientation quelconque de la plaque et réponse harmonique pour la plaque encadrée,
- Calcul modal par sous-structuration dynamique classique et cyclique,
- Calcul modal suite à une condensation de Guyan.

Les résultats de référence des calculs modaux sont issus de calculs analytiques. Ils valident d'une part les outils de création des matrices de masse et de rigidité, ainsi que les opérateurs de sous-structuration dynamique classique et cyclique implémentés dans `Code_Aster`. D'autre part, ce cas test valide le calcul modal suite à une condensation de Guyan (condensation de la matrice de masse).

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Côté  $a=1\text{m}$   
Epaisseur  $t=0.01\text{m}$

Coordonnées des points (en  $m$ ) :

	A	B	C	D	G	H	I	J	K
$x$	0.	1.	1.	0.	0.5	0.25	0.75	0.75	0.25
$y$	0.	0.	1.	1.	0.5	0.25	0.25	0.75	0.75
$z$	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

### 1.2 Propriétés de matériaux

$$E=2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad \nu=0.3 \quad \rho=7800 \text{ kg/m}^3$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Cas 1 : coté  $AB$  encastré  
pour tout point  $P$  tel que  $y_P=0$  :

$$u=v=w=0.$$

$$\theta_x=\theta_y=\theta_z=0.$$

Cas 2 : plaque libre

### 1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse modale

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLS01/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante :

La formulation de M.V. BARTON, pour une plaque de coté  $a$  , conduit à :

$$f_i = \frac{1}{2\pi a^2} \lambda_i^2 \sqrt{\frac{Et^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad i=1,2,\dots$$

avec, pour un coefficient de Poisson  $\nu=0.3$  :

1° : Plaque encastrée sur un côté

2° : Plaque libre

$i$	$\lambda_i^2$
1	3.492
2	8.525
3	21.43
4	27.33
5	31.11
6	54.44

$i$	$\lambda_i^2$
1 à 6	0.
7	13.49
8	19.79
9	24.43
10	35.02
11	35.02

(6 modes de corps solide à fréquence nulle).

Cette solution de référence s'applique aux plaques minces telles que :  $t/a < 0.1$

Les coefficients  $\lambda_i$  sont établis par développement limité sur les déformées modales d'un réseau de poutres croisées (poutre encastrée-libre et poutre libre-libre).

### 2.2 Résultats de référence

Cas 1 : 6 premiers modes propres

Cas 2 : 11 premiers modes propres

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution semi-analytique.

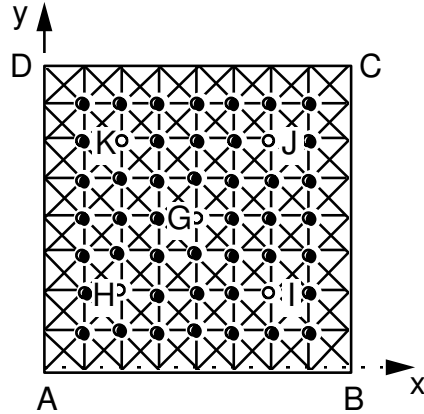
### 2.4 Références bibliographiques

[1] M. V. BARTON Vibrations of rectangular and skew cantilever plates. – Journal of Applied Mechanics, vol 18, p. 129–134 (1951)

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DKT



Noms des Points :  $A = N1$      $B = N78$      $C = N145$      $D = N80$   
 $G = N65$      $H = N17$      $I = N73$      $J = N121$      $K = N71$

Conditions limites :

Cas 1 en tous les nœuds du côté  $AB$  :

```
DDL_IMPO= _F( GROUP_NO= AB DX =0., DY =0., DZ =0.,  
DRX =0., DRY =0., DRZ =0.)
```

Cas 2 aucune

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 TRIA3

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Mode propre	Fréquence ( Hz )			Tolérance
	Référence	Aster	% différence	
1° : Plaque encadrée sur un côté				
1	8.7266	8.6718	-0.63	
2	21.3042	21.2904	-0.06	
3	53.5542	53.0992	-0.85	1. 10 <sup>-2</sup>
4	68.2984	67.9269	-0.54	
5	77.7448	77.4294	-0.40	
6	136.0471	135.7635	-0.21	
Aster				
<i>epot = ecin</i>				
1	1.4796 10 <sup>4</sup>			
2	1.7331 10 <sup>4</sup>			
3	4.3802 10 <sup>4</sup>			

4	3.7367 10 <sup>4</sup>			
5	5.4956 10 <sup>4</sup>			
6	1.3483 10 <sup>5</sup>			
2° : Plaque libre				
7	33.7119	33.6839	-0.08	
8	49.4558	48.9362	-1.05	
9	61.0513	60.5849	-0.76	1.1 10 <sup>-2</sup>
10	87.5160	87.0993	-0.48	
11	87.5160	87.0993	-0.48	

Aster  
*epot = ecin*

7	2.2396 10 <sup>4</sup>
8	4.7270 10 <sup>4</sup>
9	7.2453 10 <sup>4</sup>
10	1.4974 10 <sup>5</sup>
11	1.4974 10 <sup>5</sup>

On calcule l'énergie cinétique `ECIN_ELEM` de l'élément `DKT` (raccordé au point `A` dont l'un des cotés est sur `AD`) du problème 1 (« plaque encastrée sur un coté »):

Option	Composante	Référence (NON_REGRESSION)	Aster	% différence
<code>ECIN_ELEM</code>	TOTALE	0.011448	0.0114476	3.5 10 <sup>-4</sup>
<code>ECIN_ELEM</code>	FLEXION	2968.79	2968.7918	6.1 10 <sup>-5</sup>

## 3.4 Remarques

```
CALC_MODES      OPTION= 'BANDE'
  Cas 1 : FREQ = (8., 140.)
  Cas 2 : FREQ = (32., 90.)
```

### Contenu du fichier résultats :

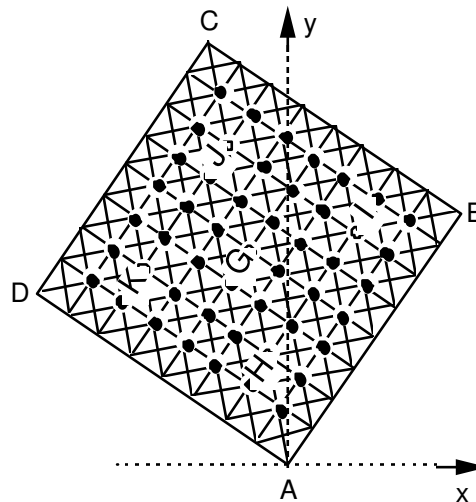
- 1° : 6 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux énergie de déformation et énergie cinétique des 6 modes.
- 2° : 5 fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux (  $f > 0$  ) énergie de déformation et cinétique des 5 modes.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Modélisation `DKT` avec maillage identique à la modélisation A.

Rotation de la plaque telle que le côté  $AB$  est sur la droite  $3y = 4x$



Noms des Points nœuds :	$A = N1$	$B = N78$	$C = N145$	$D = N80$			
	$G = N65$	$H = N17$	$I = N73$	$J = N121$	$K = N71$		

**Conditions limites :**

Cas 1 en tous les nœuds du côté  $AB$  :

```
DDL_IMPO= (GROUP_NO= AB DX =0., DY =0., DZ =0., DRX =0.,DRY =0.,DRZ =0.)
```

Cas 2 : aucune

Réponse harmonique :

Force nodale point  $C$  (  $N145$  ) :  $F_z = -98100$

Matériau : `AMOR_ALPHA` : 0.1 `AMOR_BETA` : 0.1

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 `TRIA3`

## 4.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs des fréquences propres sont identiques à celles de la modélisation A.

Réponse harmonique :

FREQ : 50 Hz NOEUD : NI45 MAILLE : M255

Référence	Aster 3.03.15	Aster 3.05.16	% différence
DEPL 'DZ'	2.90290E-02	2.90290E-02	0.0
	5.20606E-02	5.20606E-02	
DEPL 'DRX'	2.52920E-02	2.52920E-02	0.0
	9.44717E-02	9.44717E-02	
VITE 'DZ'	-1.63553E+01	-1.63553E+01	0.0
	9.11973E+00	9.11973E+00	
VITE 'DRX'	-2.96792E+01	-2.96792E+01	0.0
	7.94573E+00	7.94573E+00	
ACCE 'DZ'	-2.86505E+03	-2.86505E+03	0.0
	-5.13817E+03	-5.13817E+03	
ACCE 'DRX'	-2.49622E+03	-2.49622E+03	0.0
	-9.32398E+03	-9.32398E+03	
'EFGE_ELNO' 'MXX'	1.14053E+01	1.14053E+01	0.0
	1.45539E+03	1.45539E+03	
'EFGE_ELNO' 'MYX'	1.10224E+01	1.10224E+01	0.0
	-1.31441E+03	-1.31441E+03	
'EFGE_ELNO' 'MYZ'	1.03148E+01	1.03148E+01	0.0
	3.55382E+02	3.55382E+02	
'EFGE_ELNO' 'QX'	3.66163E+02	3.66163E+02	0.0
	-3.77331E+03	-3.77331E+03	
'EFGE_ELNO' 'QY'	-3.14676E+02	-3.14676E+02	0.0
	2.06813E+03	2.06813E+03	
'SIGM_ELNO' 'SIXZ'	5.49245E+04	5.49245E+04	0.0
	-5.65997E+05	-5.65997E+05	
'SIGM_ELNO' 'SIYZ'	-4.72014E+04	-4.72014E+04	0.0
	3.10219E+05	3.10219E+05	

## 4.4 Remarques

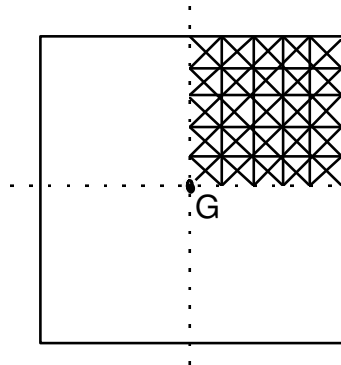
CALC\_MODES OPTION= 'BANDE'  
Cas 1 : FREQ = (8., 140.)  
Cas 2 : FREQ = (32., 90.)

### Contenu du fichier résultats :

- 1° : 6 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux.
- 2° : 11 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux.
- 3° : déplacement *DZ* *DRX* au nœud *NI45*  
efforts généralisés et contraintes maille *M255*

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation



Dans les 2 cas, la plaque est découpée en 4 parties de dimensions égales. Chaque sous-structure considérée est maillée en triangles auxquels sont affectés des éléments de plaque `DKT`.

#### Cas 1 : Plaque encadrée sur un bord

La structure est étudiée à l'aide de la méthode de sous-structuration classique avec interfaces de type `CRAIG_BAMPTON`. La base modale utilisée pour chaque sous-structure est composée de 25 modes propres et des modes contraints associés aux interfaces.

#### Cas 2 : Plaque libre

La structure est étudiée à l'aide de la méthode de sous-structuration cyclique avec interfaces de type `CRAIG_BAMPTON HARMONIQUE` et prise en compte de la spécificité du noeud de l'axe (point  $G$ ). La base modale utilisée pour le secteur de base est composée de 25 modes propres et des modes harmoniques associés aux interfaces.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 121

Nombre de mailles et types : 200 `TRIA3`

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

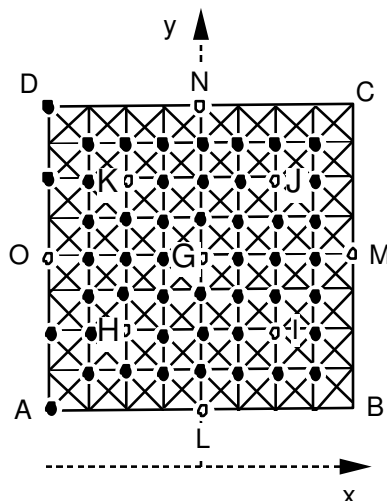
Ordre du mode propre $i$	Fréquence ( $Hz$ )		% différence	Tolérance
	Référence	Aster		
1° : Plaque encadrée sur un côté				
1	8.7266	8.6419	-0.97	
2	21.3042	21.2253	-0.37	
3	53.5542	52.9693	-1.09	$1.25 \cdot 10^{-2}$
4	68.2984	67.5444	-1.10	
5	77.7448	77.3966	-0.45	
6	136.0471	134.5785	-1.08	
2° : Plaque libre				
7	33.7119	33.6808	-0.09	
8	49.4558	48.9785	-0.96	
9	61.0513	60.6739	-0.62	$1 \cdot 10^{-2}$
10	87.5160	87.0662	-0.51	
11	87.5160	87.0662	-0.51	



## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

DKT + sous-structuration de GUYAN



**Conditions limites :** Plaque libre

Condensation des matrices de masse et rigidité sur les nœuds :

$$(A, B, C, D, G, H, I, J, K, L, M, N, O) .$$

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 TRIA3

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Ordre du mode propre i	Fréquence ( Hz )		% différence	Tolérance
	Référence	Aster		
2° : Plaque libre				
7	33.7119	33.8758	-0.48	
8	49.4558	49.5240	-0.14	1.1 10 <sup>-2</sup>
9	61.0513	61.6240	-0.94	

### 6.4 Remarques

On cherche à calculer les 3 premières fréquences propres non nulles du problème de la plaque libre sur ses bords.

Si on condense les matrices sur les seuls nœuds :

$$(A, B, C, D, G, H, I, J, K)$$

La précision des fréquences n'est alors que de 2% .

Pour obtenir les résultats voulus avec la précision attendue ( 1% ), il faut ajouter les points  $(L, M, N, O)$  .

## 7 Synthèse des résultats

---

- Modélisations A et B :

Précision sur les fréquences propres  $\leq 1\%$  jusqu'au sixième mode de flexion.

- Modélisation C :

En sous-structuration, la qualité des résultats pourrait être améliorée par l'utilisation d'un maillage de sous-structure plus fin.

- Modélisation D :

Pour obtenir une précision de  $1\%$  sur les fréquences propres, il est nécessaire de condenser aussi sur les 4 nœuds milieux des bords  $L$  ,  $M$  ,  $N$  et  $O$  .