

## Loi d'Iwan pour le comportement cyclique de matériaux granulaires

---

### Résumé :

Le modèle de comportement d'Iwan [1], [2] est un modèle élastoplastique multimécanisme classique pour la description du comportement déviatorique cyclique de matériaux et particulièrement de géomatériaux. L'écroissage est cinématique linéaire pour chaque mécanisme et la règle d'écoulement considérée est associée. Par construction, le modèle vérifie automatiquement les règles de Masing.

Le modèle permet une description aisée du comportement via des paramètres directement obtenus des courbes de variation du module de cisaillement sécant. L'utilisateur doit simplement fournir les paramètres d'une fonction hyperbolique décrivant la variation du module sécant en fonction de la déformation de cisaillement.

Il est implémenté dans l'environnement MFront, ce qui facilite l'implémentation et la maintenabilité du modèle.

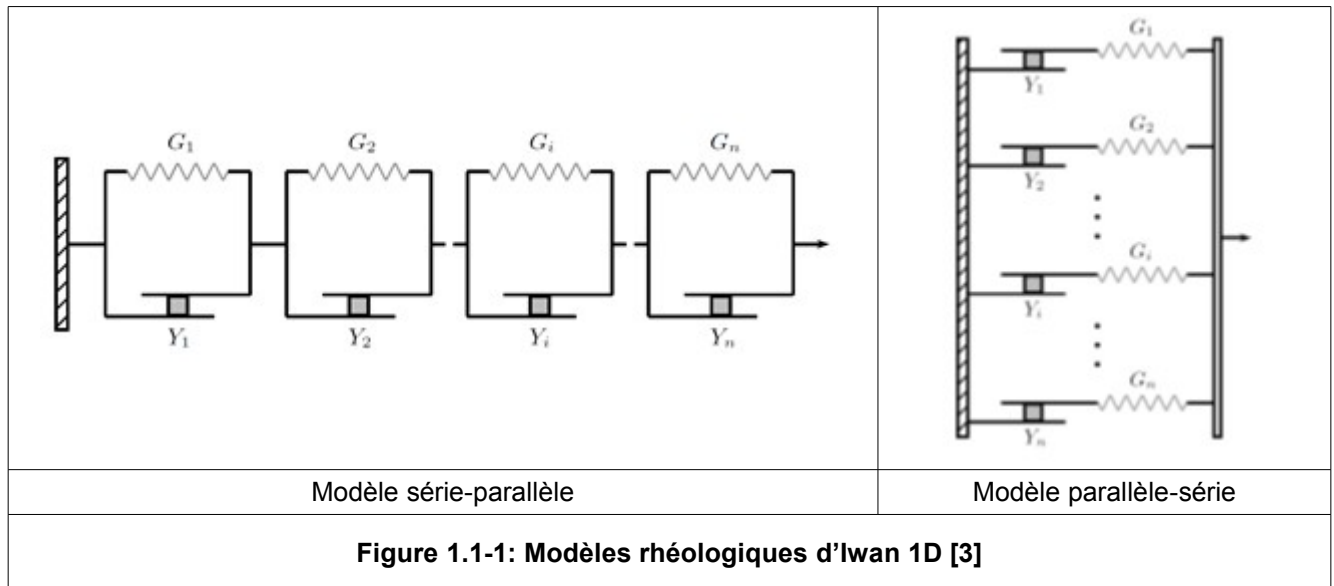
## Table des Matières

1 Formulation théorique.....	3
1.1 Vision 1D du comportement du modèle d'Iwan.....	3
1.2 Formulation 3D du modèle d'Iwan.....	3
1.2.1 Description de la surface de charge.....	4
1.2.2 Description de la loi d'écoulement.....	5
1.2.3 Calcul des paramètres d'écrouissage.....	5
2 Intégration numérique de la loi de comportement.....	6
2.1 Étape de Prédiction.....	7
2.2 Étape de correction par algorithme de Newton.....	7
2.3 Étape de mise à jour.....	7
3 Implantation dans Code_Aster.....	8
3.1 Variables internes.....	8
4 Fonctionnalités et vérification.....	9
5 Bibliographie.....	10
Historique des versions du document.....	10

## 1 Formulation théorique

### 1.1 Vision 1D du comportement du modèle d'Iwan

Une description purement 1D du modèle d'Iwan consiste en un arrangement en parallèle ou en série d'éléments de Jenkin, chaque élément étant composé d'un ressort et d'un patin frottant parfaitement plastique (critère de Coulomb) en série (Figure 1). L'arrangement des éléments et les paramètres du modèle déterminent la forme de la réponse en cisaillement cyclique.



### 1.2 Formulation 3D du modèle d'Iwan

Lors de la description 3D du comportement, chaque élément est associé à une surface de charge, définie à partir de la contrainte déviatorique associée à chaque mécanisme. On passe donc d'une description 1D du comportement en cisaillement à une description 3D du comportement déviatorique à partir des invariants de contrainte et de déformation, définis de la manière suivante :

$$\text{Pression moyenne : } p = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} \quad (1)$$

$$\text{Tenseur déviateur de contraintes : } \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I} \quad (2)$$

$$\text{Déviateur de contraintes : } q = \|\mathbf{S}\|_{VM}^{3D} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} \quad (3)$$

$$\text{Déformation volumique : } \varepsilon_v = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

$$\text{Déformation déviatorique : } q_n = \|\mathbf{S} - \mathbf{X}_n\|_{VM}^{3D} = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S} - \mathbf{X}_n) : (\mathbf{S} - \mathbf{X}_n)} \quad (5)$$

Pour un arrangement de type série-parallèle, lorsque la contrainte appliquée dépasse la contrainte limite  $Y_n$  du mécanisme  $n$ , il y a écrouissage de ce mécanisme et la contrainte associée reste égale à la contrainte

limite, i.e. seul un écrouissage cinématique est associé à chaque mécanisme du modèle. Le modèle permet une grande flexibilité dans la description du comportement, notamment par la possibilité d'utilisation directe des données d'essai en laboratoire. L'erreur associée à la description du comportement cyclique dépend directement du nombre de surfaces de charge et de leur disposition. Cependant, plus grand est le nombre de mécanismes, plus le système à résoudre est numériquement cher, malgré le passage d'un système tensoriel à un système scalaire (section Error: Reference source not found ).

Le modèle est basé sur la théorie de l'élastoplasticité multimécanisme. Dans une description série-parallèle, il assume une décomposition additive et indépendante des déformations sur les mécanismes d'écrouissage :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (6)$$

Pour chaque mécanisme, le modèle considère une décomposition additive du tenseur de déformations totales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en une partie élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  et une partie plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad (7)$$

La relation contrainte-déformation est écrite directement à partir du tenseur d'élasticité d'ordre 4,  $\mathbf{C}$ . L'élasticité est donc linéaire et le modèle ne permet pas de prendre en compte l'effet du confinement dans les constantes élastiques.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (8)$$

Le modèle décrivant seulement le comportement déviatorique, la réponse volumique est supposée élastique linéaire :

$$\varepsilon_v = \frac{p}{3K} \quad (9)$$

où  $K$  est le module de compression.

Dans ce qui suit, les différents ingrédients nécessaires pour décrire la loi de comportement dans un cadre élasto-plastique sont décrits, à savoir :

- Surface de charge  $f$  : définie la zone dans l'espace de contraintes à l'intérieur de laquelle le comportement est linéaire élastique (  $f < 0$  ou  $f = 0$  et  $df < 0$  ) et sur laquelle le comportement est plastique (  $f = 0$  et  $df > 0$  ).
- Loi d'écoulement : règle définissant l'incrément de déformation plastique, de manière générique  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \boldsymbol{\Psi}$ , où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique et  $\boldsymbol{\Psi}$  la loi d'écoulement.

## 1.2.1 Description de la surface de charge

La surface de charge de chaque mécanisme s'écrit de la façon suivante :

$$f_n = q_n - Y_n \quad (10)$$

Avec  $Y_n$  une constante limite à partir de laquelle le mécanisme  $n$  écroui. Cette valeur est choisie à partir d'un essai de cisaillement pur, en associant à chaque mécanisme d'écrouissage  $n$  un couple de valeurs  $(\gamma_n, \tau_n)$  avec  $\gamma = 2\varepsilon_{ij}$ ,  $i \neq j$ .  $Y_n$  est donc directement obtenu à partir de  $\tau_n$  par la relation suivante :

$$Y_n = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_n \quad (11)$$

La valeur de  $q_n$  est la contrainte déviatorique associée au mécanisme  $n$ , définie de la manière suivante :

$$q_n = \|(\mathbf{S} - \mathbf{X}_n)\|_{VM}^{3D} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{X}_n) : (\mathbf{S} - \mathbf{X}_n)} \quad (12)$$

Le tenseur  $\mathbf{X}_n$  représente l'écroissage cinématique du mécanisme  $n$ . Il est obtenu à partir de l'expression définie par Prager :

$$\mathbf{X}_n = C_n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \quad (13)$$

Avec  $C_n$  un paramètre du modèle déterminé à partir d'un essai de cisaillement monotone. Du fait que  $C_n$  soit constant, on considère l'écroissage comme étant linéaire.

## 1.2.2 Description de la loi d'écoulement

Les incréments de déformation plastique de chaque mécanisme  $n$  sont obtenus à partir du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}_n$  et de la loi d'écoulement  $\boldsymbol{\Psi}_n$  :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p = \dot{\lambda}_n \boldsymbol{\Psi}_n \quad (14)$$

Le modèle supposant un écoulement associé, la loi d'écoulement est obtenue directement à partir de la surface de charge :

$$\boldsymbol{\Psi}_n = \frac{\partial f_n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{X}_n)}{q_n} \quad (15)$$

Le multiplicateur plastique associé à chaque mécanisme est obtenu à partir de l'équation de consistance, i.e.  $\dot{f}_n = 0$  :

$$\dot{\lambda}_n = \frac{\frac{\partial f_n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : C_n : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f_n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : C_n : \boldsymbol{\Psi}_n - C_n \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{X}_n} : \boldsymbol{\Psi}_n} \quad (16)$$

Avec :

$$\frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{X}_n} = \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{X}_n)}{q_n} \quad (17)$$

Le calcul du multiplicateur plastique est explicité dans la section Error: Reference source not found.

## 1.2.3 Calcul des paramètres d'écroissage $C_n$

La détermination des paramètres d'écroissage cinématique  $C_n$  est faite à partir d'un chemin de contraintes en cisaillement pur ( $\Delta p = 0$ ). Supposons la réponse connue pour ce chemin de contraintes à partir d'un état initial à contrainte déviatorique nulle et déformation plastique nulle. Dans ce cas :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \left( \frac{1}{2G} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right) \dot{\boldsymbol{\tau}} \quad (18)$$

A partir de  $N$  couples  $(\boldsymbol{\gamma}_n, \boldsymbol{\tau}_n)$ , on peut estimer la valeur de  $C_n$  de manière récursive avec l'expression suivante :

$$\frac{1}{C_n} = \frac{\boldsymbol{\gamma}_{k+1} - \boldsymbol{\gamma}_k}{\boldsymbol{\tau}_{k+1} - \boldsymbol{\tau}_k} - \frac{1}{2G} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{C_m} \quad (19)$$

Le calcul des paramètres d'écroissage cinématique  $C_n$  est fait dans le bloc @InitLocalVars de Mfront.

## 2 Intégration numérique de la loi de comportement

Le choix dans MFront est porté sur l'intégration des systèmes d'équations différentiels écrits de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}, t) \quad (20)$$

Où  $\mathbf{G}$  est une fonction a priori non linéaire et supposée a minima continûment dérivable. Une intégration implicite de type  $\theta$ -méthode est choisie pour l'intégration numérique du système non-linéaire. Dans ce cas le système s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{Y}|_{t+\Delta t} = \mathbf{Y}|_t + \Delta t \mathbf{G}((1-\theta)\mathbf{Y}|_t + \theta\mathbf{Y}|_{t+\Delta t}, t + \theta \Delta t) \quad (21)$$

Ou de manière équivalente :

$$\mathbf{F}(\Delta \mathbf{Y}) = \Delta \mathbf{Y} - \Delta t \mathbf{G}((1-\theta)\mathbf{Y}|_t + \theta\mathbf{Y}|_{t+\Delta t}, t + \theta \Delta t) = 0 \quad (22)$$

La méthode de Newton-Raphson est choisie pour le calcul du zéro de la fonction  $\mathbf{F}(\Delta \mathbf{Y})$ . Soit :

$$\mathbf{F}(\Delta \mathbf{Y}) = \mathbf{F}(\Delta \mathbf{Y}^-) + \left( \frac{d\mathbf{F}}{d\Delta \mathbf{Y}} \right)_{\Delta \mathbf{Y} = \Delta \mathbf{Y}^-} (\Delta \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}^-) \quad (23)$$

Où  $\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{F}}{d\Delta \mathbf{Y}}$  est la matrice jacobienne de la fonction  $\mathbf{F}$ . L'approximation  $\Delta \mathbf{Y}^+$  est obtenue en considérant

$\mathbf{F}(\Delta \mathbf{Y}^+) = 0$ , soit :

$$\Delta \mathbf{Y}^+ = \Delta \mathbf{Y}^- - \left( \mathbf{J}^{-1}(\Delta \mathbf{Y}^-) \right) \mathbf{F}(\Delta \mathbf{Y}^-) \quad (24)$$

La difficulté de la méthode de Newton-Raphson repose sur le calcul de la matrice jacobienne. Dans MFront, une approximation numérique de la matrice jacobienne par différentiation numérique est disponible, à partir de l'algorithme NewtonRaphson\_NumericalJacobian. Cet algorithme est choisi pour le calcul de la matrice jacobienne dans l'implémentation numérique du modèle. Un schéma purement implicite est choisi pour l'intégration des équations ( $\theta=1$ ), afin de donner des résultats physiquement satisfaisants.

Suivant la démarche présentée dans le document [4], pour un écroissage cinématique linéaire il est possible de réduire le système tensoriel à un système scalaire, grâce à la colinéarité entre l'incrément de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_n^p$  et la différence  $\mathbf{S} - \mathbf{X}_n$  en absence de déformation plastique,  $\mathbf{S}_n^e$ . Cela peut s'écrire de la manière suivante pour un écroissage cinématique multiple :

$$\mathbf{S}_n^e = \mathbf{S}^- + \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{X}_n^- = \mathbf{S}^- + 2\mu \dot{\epsilon}_n^e - \mathbf{X}_n^- \quad (25)$$

Donc :

$$\mathbf{S} - \mathbf{X}_n = \mathbf{S}_n^e - \dot{\mathbf{X}}_n = \mathbf{S}_n^e - C_n \dot{\epsilon}_n^p \quad (26)$$

L'incrément de déformation plastique du mécanisme  $n$  s'écrit donc :

$$\dot{\epsilon}_n^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}_n}{q_n} (\mathbf{S}_n^e - C_n \dot{\epsilon}_n^p) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}_n}{q_n} \mathbf{S}_n^e \quad (27)$$

Avec  $q_n^e$  la norme de  $\mathbf{S}_n^e$ . En remplaçant  $\dot{\epsilon}_n^p$  dans l'expression (26), on obtient :

$$\mathbf{S} - \mathbf{X}_n = \mathbf{S}_n^e \left( 1 - \frac{\frac{3}{2} C_n \dot{\lambda}_n}{q_n^e} \right) \quad (28)$$

En injectant l'expression de  $\mathbf{S} - \mathbf{X}_n$  dans la condition  $f=0$ , on obtient :

$$\left( q_n^e - \frac{3}{2} C_n \dot{\lambda}_n \right) - Y_n = 0 \quad (29)$$

Dans la mesure où  $Y_n > 0$  et  $q_n^e > 0$ , cette équation admet la solution suivante pour le multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda}_n = \frac{q_n^e - Y_n}{\frac{3}{2} C_n} \quad (30)$$

Donc, forcément :

$$0 < \dot{\lambda}_n < \frac{q_n^e}{\frac{3}{2} C_n} \quad (31)$$

Le système à résoudre est donc directement basé sur le multiplicateur plastique et non sur le tenseur d'érouissage, qui est une variable auxiliaire (@AuxiliaryStateVariable) dans la routine Mfront.

## 2.1 Étape de Prédiction

Une étape de prédiction explicite est faite en considérant que l'incrément de déformation imposé est entièrement élastique, à l'aide du bloc @Predictor sur MFront. Donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (32)$$

Cette approche permet d'avoir un meilleur prédicteur pour les étapes de correction, et ainsi éviter des oscillations parasites dans la résolution numérique.

Le multiplicateur plastique est ensuite obtenu en résolvant l'équation (30). Cette prédiction permet d'initialiser l'algorithme de Newton en fournissant une première approximation des incréments des variables internes.

## 2.2 Étape de correction par algorithme de Newton

Le vecteur d'inconnues étant donné par  $\mathbf{Y} = (\boldsymbol{\varepsilon}^e, \dot{\lambda}_n)$ , les itérations de l'algorithme de Newton consistent à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f_{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{n=1}^N \dot{\lambda}_n \boldsymbol{\Psi}_n = 0 \\ f_{\dot{\lambda}_n} = \dot{\lambda}_n - \frac{q_n^e - Y_n}{\frac{3}{2} C_n} \end{cases} \quad (33)$$

L'écriture des équations en forme scalaire permet de réduire la taille du système d'équations à résoudre et de cette manière d'améliorer la performance du modèle.

## 2.3 Étape de mise à jour

Une fois la convergence de la résolution locale achevée, le vecteur des inconnues est mis à jour classiquement de la manière suivante :

$$\mathbf{Y}^+ = \mathbf{Y}_{j+1} = \mathbf{Y}_j + \delta \mathbf{Y}_{j+1} \quad (34)$$

On profite également pour mettre à jour les variables auxiliaires  $X_n$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  dans le bloc @UpdateAuxiliaryStateVars.

## 3 Implantation dans Code\_Aster

Le nombre de surfaces d'écroissage cinématique du modèle est fixé à 11. Les premières 10 surfaces permettent de couvrir la gamme de déformations de cisaillement entre  $10^{-5}$  et  $10^{-2}$ . On considère un comportement linéaire élastique pour des déformations plus petites que  $10^{-5}$  et une déformation de cisaillement maximale de  $10^{-2}$ . Les valeurs d'interpolation utilisées sont les suivantes :

$\gamma_1=1.00000000e-05$
$\gamma_2=2.15443469e-05$
$\gamma_3=4.64158883e-05$
$\gamma_4=1.00000000e-04$
$\gamma_5=2.15443469e-04$
$\gamma_6=4.64158883e-04$
$\gamma_7=1.00000000e-03$
$\gamma_8=2.15443469e-03$
$\gamma_9=4.64158883e-03$
$\gamma_{10}=1.00000000e-02$

Au-delà d'une déformation de cisaillement de  $10^{-2}$ , les résultats du modèle seront approximatifs car la dernière surface, positionnée à une déformation de cisaillement de  $10^{-1}$ , permet simplement de faire en sorte que le modèle fournisse une réponse entre  $10^{-2}$  et  $10^{-1}$ .

### 3.1 Variables internes

Les variables internes ( `StateVariable` et `AuxiliaryStateVariable` dans le langage Mfront) suivantes sont disponibles lors d'un calcul avec la loi de comportement de Iwan :

Eel (1-6)	Tenseur de déformations élastiques
Pp (7-17)	Vecteur de multiplicateurs plastiques scalaires $\lambda_n$
X (18-83)	Vecteur de tenseurs d'écroissage cinématique $X_n$
Eplast (84-89)	Tenseur de déformations plastiques $\epsilon^p$
Fn (90-100)	Vecteur de valeurs de la surface de charge
T0 (101)	Instant de calcul



## 4 Fonctionnalités et vérification

La loi de IWAN (comportement IWAN pour le mot-clé COMPORTEMENT) est utilisable dans Code\_Aster avec les modélisations suivantes :

- version classique : 3D, D\_PLAN,

Voici la liste des cas de validation disponibles :

SSNV205 b	[V6.04.205]	essai de cisaillement cyclique contrôlé en déformation.
SSNV207 b	[V6.04.207]	cisaillement cyclique contrôlé en déformation avec micro-décharge.

## 5 Bibliographie

- 1) IWAN W. D., A distributed element model for hysteresis and its steady state dynamic response, *Journal of Applied Mechanics*, 88 (14), pp. 893-900, 1966.
- 2) IWAN W. D., On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems, *Journal of Applied Mechanics*, 89 (13), pp. 612-617, 1967.
- 3) GONDOMZADEH A. : Interaction dynamique sol-structure : influence de non-linéarités de comportement du sol, 2011.
- 4) «Relation de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire et isotrope non linéaire. Modélisations 3D et contraintes planes ». Documentation de référence de *Code\_Aster* [R5.03.16].

## Historique des versions du document

Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
13.3	V. ALVES FERNANDES EDF/R&D/AMA	Texte initial