
Condensation dynamique de modèle par sous-structuration statique

Résumé :

Ce document décrit un mode d'utilisation de *Code_Aster* pour permettre le calcul transitoire par l'opérateur `DYNA_NON_LINE` sur un modèle réduit strictement à des domaines non linéaires, les domaines linéaires étant pris en compte une fois pour toutes par condensation dynamique au moyen de macro-éléments statiques.

La méthode de condensation s'exerce sur tous les degrés de liberté d'interface communs aux structures condensées et aux structures calculées par analyse non linéaire. Une méthode générale complète requiert le calcul de tous les modes statiques d'interface contraints, associés chacun à une réponse à un déplacement unitaire imposé pour chaque degré de liberté d'interface. Une méthode alternative permet d'utiliser une base réduite de modes d'interface en nombre inférieur mais représentatifs des déplacements de tous les degrés de liberté d'interface.

1 Introduction

L'objectif de la condensation dynamique de modèle par sous-structuration statique est de réduire le nombre total de degrés de liberté d'un modèle constitué de plusieurs sous-domaines en condensant la résolution des sous-domaines de comportement linéaire sur les degrés de liberté de leurs interfaces avec des sous-domaines de comportement non linéaire.

L'idée est alors de représenter chacun de ces sous-domaines par un macro-élément de type statique pour pouvoir l'utiliser dans un modèle mixte comprenant également des éléments finis pour les parties non condensées de comportement non linéaire afin de procéder à des analyses non linéaires au moyen des opérateurs de calcul non linéaires `STAT_NON_LINE` [U4.51.03] ou `DYNA_NON_LINE` [U4.53.01].

Dans la condensation de chaque sous-domaine, on veut également intégrer la partie dynamique de son comportement obtenue par analyse modale et pour cela, on va donc utiliser des macro-éléments dynamiques comme les macro-éléments statiques nécessaires en sous-structuration statique.

Le principe de cette conversion et leur application est décrit dans les documents [bib1, bib2].

2 Problème classique et principe de la méthode

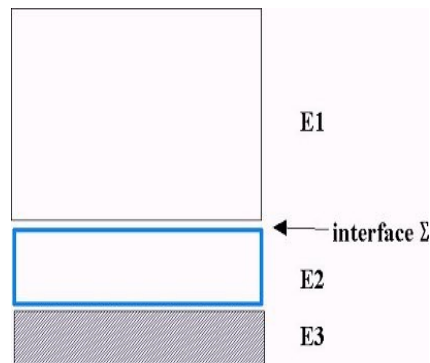


Figure 2.1 : Sous-domaines du problème classique de condensation

Sur la figure 2.1 ci-dessus sont schématisés les sous-domaines éventuels que l'on peut rencontrer dans le cadre d'un problème classique de condensation par sous-structuration statique :

- les sous-domaines de type E1 : sous-domaines de structure de comportement linéaire constant condensés et modélisés par macro-élément dynamique,
- les sous-domaines de type E2 : sous-domaines de structure de comportement potentiellement non linéaire non condensés et modélisés par des éléments finis,
- les sous-domaines de type E3 : sous-domaine de sol représentés par un macro-élément issu de la conversion d'une matrice complexe impédance de sol.

Le principe de base de la condensation par macro-élément consiste à partitionner pour chaque sous-domaine de type E1 les degrés de liberté j de leurs interfaces notées Σ avec les sous-domaines de type E2 ainsi que leurs autres degrés de liberté i dits «internes».

Les matrices de rigidité K et de masse M se décomposent ainsi sur ces degrés de liberté :

$$K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} \\ M_{ji} & M_{jj} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i \text{ ddl internes} \\ j \text{ ddl d'interfaces} \end{array}$$

Le principe de sous-structuration statique revient pour la matrice K par exemple à la condenser uniquement sur les degrés de liberté j des interfaces Σ en corrigeant le terme initial K_{jj} d'un terme complémentaire dit «complément de Schur» selon le principe de la condensation dite de Guyan [bib3] :

$$\bar{K}_{jj} = K_{jj} - K_{ji} (K_{ii})^{-1} K_{ij} = \Phi^T K \Phi$$

Le calcul du nouveau terme \bar{K}_{jj} revient à une projection de la matrice K sur une base de modes statiques Φ de type «contraint» obtenus par réponse statique à des déplacements unitaires imposés en chaque degré de liberté j des interfaces Σ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{ij} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ii}^{-1} K_{ij} \\ I \end{bmatrix}$$

La condensation sur les degrés de liberté j des interfaces Σ de la matrice de masse M et des charges des sous-domaines de type E1 se fera de manière analogue par le produit matriciel de la matrice et des vecteurs de chargement sur la base de modes statiques Φ .

On constate alors que les termes $\Phi^T K \Phi$ et $\Phi^T M \Phi$ peuvent être directement obtenus pour chaque sous-domaine de type E1 au moyen de l'opérateur de calcul d'un macro-élément dynamique MACR_ELEM_DYNA [U4.65.01] et que les termes de charges projetés sont obtenus $\Phi^T F$ au moyen de l'opérateur PROJ_VECT_BASE [U4.63.13].

3 Méthodes de condensation par base complète ou réduite

Selon le mode de calcul des modes de représentation des mouvements des interfaces, deux méthodes sont actuellement utilisées :

3.1 La méthode de calcul par base complète

Le mouvement U d'un point quelconque d'un sous-domaine de type E1 s'exprime à partir de la décomposition sur les modes statiques Ψ et sur un complément apporté par la partie dynamique du mouvement exprimée par des modes propres Φ :

$$U = \Psi q_{\Sigma} + \Phi q$$

Avec la méthode par base complète, sur l'interface Σ , les modes propres Φ ont une contribution nulle et les modes statiques Ψ ont une valeur unitaire et donc le déplacement U d'un point de l'interface s'exprime :

$$U = X_{\Sigma} = q_{\Sigma}$$

Dans ce cas, les degrés de liberté physiques X_{Σ} de l'interface Σ se confondent avec les coordonnées généralisées q_{Σ} associées aux modes statiques Ψ .

Les coordonnées généralisées q associées aux modes propres Φ étant nulles sur l'interface, leur résolution sera découplée de celle des coordonnées généralisées q_{Σ} . Dans l'assemblage des matrices du problème condensé, les termes de projection sur les modes propres $\Phi^T K \Phi$ et $\Phi^T M \Phi$ seront juxtaposés. Pour pouvoir «mélanger» des degrés de liberté physiques avec des coordonnées généralisées, on utilise l'artifice transparent pour l'utilisateur de faire passer ces dernières pour des degrés de liberté physiques supplémentaires pris parmi les degrés de liberté internes à un domaine de type E1.

Cet alias est actif dans le modèle où les domaines de type E1 sont condensés par des macro-éléments, mais pour avoir le véritable déplacement des degrés de liberté internes à ces domaines, il s'obtient en post-traitement après résolution du problème global assemblé au moyen de l'opérateur REST_COND_TRAN [U4.63.33] en appliquant la relation initiale :

$$U = \Psi q_{\Sigma} + \Phi q$$

Il est important de retenir un nombre de modes propres Φ multiple exact du nombre de composantes maximum du domaine condensé (3 pour les massifs, 6 pour les plaques) afin de faire correspondre exactement les coordonnées généralisées à des composantes de nœuds supplémentaires d'interface.

Au niveau de l'assemblage d'un sous-domaine de type E1, le stockage initial représenté sur la figure 3.1-a comprend des termes à la fois sur des degrés de liberté internes et sur les degrés de liberté d'interface avec un profil de remplissage non complet.

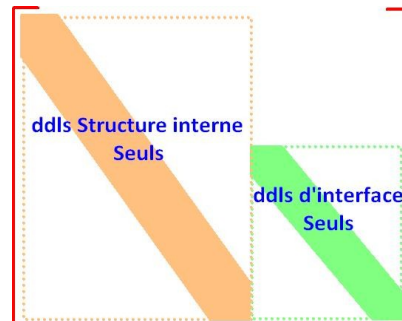


Figure 3.1-a : Assemblage initial des sous-domaines E1 avant condensation

Après condensation par la méthode complète, la plupart des degrés de liberté internes disparaissent, mais une toute petite partie est consacrée pour représenter les coordonnées généralisées associées aux modes propres et les termes du macro-élément statique s'ajoutent aux degrés de liberté d'interface avec un profil de remplissage complet cette fois-ci. Le stockage résultant est représenté sur la figure 3.1-b ci-dessous.

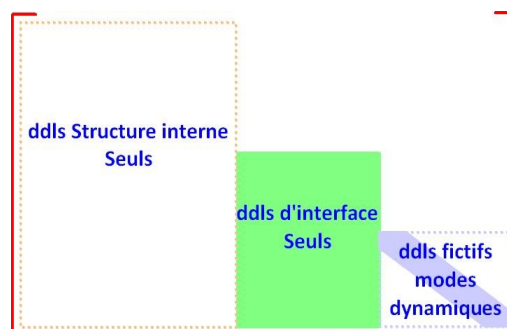


Figure 3.1-b : Assemblage des sous-domaines E1 avec méthode complète

L'assemblage des termes du macro-élément statique s'effectue par simple sommation sur les degrés de liberté d'interface et ne nécessite pas en général de liaison supplémentaire sur l'interface quand on prend en compte tous les modes statiques contraints de l'interface. Il n'en est pas ainsi dans le cas particulier de la condensation sur un seul nœud d'interface où là il faut ajouter une relation de liaison, solide sur les degrés de liberté d'interface.

Dans le cas d'un sous-domaines de type E3, le post-traitement par `REST_COND_TRAN` est inutile car le déplacement n'a pas de composante sur des modes dynamiques et le déplacement à l'interface est définitivement obtenu dès la résolution du problème global.

3.2 La méthode de calcul par réduction modale

Avec la méthode par réduction modale, le mouvement U d'un point quelconque d'un sous-domaine de type E1 s'exprime toujours à partir de la décomposition sur les modes statiques Ψ et sur un complément apporté par la partie dynamique du mouvement exprimée par des modes propres Φ :

$$U = \Psi q_{\Sigma} + \Phi q$$

Mais cette fois-ci, sur l'interface Σ , les modes propres Φ ont une contribution non nulle car les modes statiques Ψ ont une valeur non unitaire et sont en nombre généralement très inférieur au nombre de degrés de liberté physiques X_{Σ} de l'interface Σ qui, dans ce cas, ne se confondent pas

avec les coordonnées généralisées q_Σ associées aux modes statiques Ψ . Il faut donc distinguer dans l'assemblage et la résolution les termes associés aux degrés de liberté physiques et ceux associés aux coordonnées généralisées. De la même façon que pour les coordonnées généralisées q associées aux modes propres Φ , on utilise l'artifice transparent pour l'utilisateur de faire passer les coordonnées généralisées q_Σ associées aux modes statiques Ψ pour des degrés de liberté physiques supplémentaires pris aussi parmi des degrés de liberté internes à un domaine de type E1. Mais cette fois-ci, la résolution des degrés de liberté physiques X_Σ de l'interface Σ ne sera pas découplée de celle des coordonnées généralisées q_Σ . Dans l'assemblage des matrices du problème condensé, les termes de projection sur les modes propres $\Psi^T K \Psi$ et $\Psi^T M \Psi$ seront juxtaposés. Mais il faudra alors ajouter une liaison et donc des degrés de liberté de Lagrange entre les degrés de liberté physiques X_Σ de l'interface Σ et les coordonnées généralisées q_Σ . Cette liaison est exprimée par la relation :

$$X_\Sigma = \Psi q_\Sigma$$

Cette relation s'exprime par le mot clé répétable `LIAISON_INTERF` de l'opérateur `AFFE_CHAR_MECA` [U4.44.01], qui permet de relier chaque sous-domaine de type E1 à un sous-domaine de type E2 (cf. figure 2.1) en générant un cas particulier de `LIAISON_DDL` avec les coefficients de la relation linéaire précédente.

Ensuite, pour avoir le véritable déplacement des degrés de liberté internes aux domaines de type E1, on procède de la même façon en post-traitement après résolution du problème global assemblé au moyen de l'opérateur `REST_COND_TRAN` [U4.63.33] en appliquant la relation initiale :

$$U = \Psi q_\Sigma + \Phi q$$

Là aussi, il est important de retenir un nombre de modes propres Φ et un nombre de modes statiques Ψ multiples exacts du nombre de composantes maximum du domaine condensé (3 pour les massifs, 6 pour les plaques) afin de faire correspondre exactement les coordonnées généralisées à des composantes de nœuds supplémentaires d'interface.

Après condensation par la méthode de réduction modale, la plupart des degrés de liberté internes disparaissent, mais une toute petite partie est consacrée pour représenter les coordonnées généralisées associées aux modes propres, une autre petite partie est consacrée aux coordonnées généralisées associées aux modes propres d'interface. Cette fois-ci, les termes du macro-élément statique ne s'ajoutent pas aux degrés de liberté d'interface qui conservent alors un profil de remplissage non complet. Mais on obtient alors un bloc quadrangulaire de degrés de liberté de Lagrange entre les degrés de liberté physiques X_Σ de l'interface Σ et les coordonnées généralisées q_Σ .

Le stockage résultant est représenté sur la figure 3.2 ci-dessous.

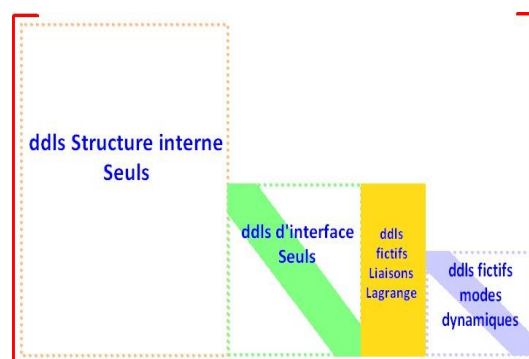


Figure 3.2 : Stockage des sous-domaines E1 avec méthode de réduction modale

On remarquera qu'il n'y a pas de choix de calcul imposé pour la base de réduction de modes d'interface Ψ . Un choix possible sera celui utilisé en interaction sol-structure [bib4] en considérant

une base de modes propres du sous-domaine de type E1 sur tapis de ressorts représentatifs de la rigidité des domaines adjacents de type E2 ou E3.

3.3 Validation de l'utilisation des méthodes de condensation dynamique

Une bonne approche de la validation du modèle de condensation dynamique consiste en la comparaison de l'analyse modale sur les premiers modes entre le modèle initial non condensé contenant tous les sous-domaines et le modèle global final contenant les sous-domaines condensés sous forme de macro-éléments statiques ainsi que le modèle de structure strictement non linéaire.

3.4 Intérêts respectifs d'utilisation des méthodes de condensation dynamique

La méthode de condensation dynamique permet en général, par rapport au modèle non condensé, de réduire la taille des systèmes matriciels, du nombre total de degrés de liberté et d'obtenir des gains en terme de mémoire et performances pour la factorisation et la résolution.

Pour la méthode complète, du fait du stockage plein des termes des modes d'interface, cette méthode présente de l'intérêt dans les opérations de factorisation surtout si le nombre de degrés de liberté d'interface ne dépasse guère $1/10$ du nombre total de degrés de liberté avant condensation.

Par contre, cette méthode nécessite le calcul des modes d'interface pour tous les degrés de liberté et peut être rédhibitoire en mémoire pour ce calcul si le nombre total de degrés de liberté avant condensation est supérieur à 100000 et si le nombre de modes d'interface est de l'ordre de 10000.

La méthode de condensation avec réduction modale présente alors un intérêt on réduit le nombre de modes d'interface à moins de $1/10$ du nombre de degrés de liberté d'interface, soit moins de 1000.

Tout en sachant qu'en terme de performances:

-on ajoute des équations liées aux degrés de liberté de Lagrange relatifs aux relations entre les degrés de liberté et les modes réduits d'interface, ce qui risque de pénaliser la résolution,

-on obtient un gain sur la factorisation du système car sa taille va diminuer ainsi que sur la restitution sur base physique de chaque sous-domaine dans le rapport du nombre de degrés de liberté sur le nombre de modes réduits d'interface.

La méthode complète semble performante et suffisante pour un nombre total de degrés de liberté avant condensation compris entre environ 5000 et 50000. La méthode avec réduction modale devient intéressante au-delà de 50000 degrés de liberté avant condensation.

4 Synthèse du calcul avec condensation dynamique

Le calcul avec condensation dynamique nécessite de passer par les étapes suivantes d'enchaînement des commandes de *Code_Aster* :

- Instructions classiques initiales : définition du maillage et groupes de mailles, définition des matériaux, affectation des matériaux aux éléments.

Et pour chaque domaine de sous-structuration:

- Définition du modèle et affectation des éléments finis au modèle, affectation des matériaux aux éléments, affectation des caractéristiques élémentaires,
- Calcul des modes propres sur base bloquée par la commande `MODE_ITER_SIMULT` [U4.52.03],
- Définition de l'interface dynamique de type `CRAIGB` produisant le maillage de l'interface par la commande `DEFI_INTERF_DYNA` [U4.64.01],
- Calcul des modes statiques de l'interface dynamique précédemment définie avec `MODE_STATIQUE` [U4.52.14] dans le cas d'une base complète ou par un autre opérateur, `MODE_ITER_SIMULT` par exemple dans le cas d'une base réduite,
- Définition d'une base modale complète par la commande `DEFI_BASE_MODAL` [U4.64.02] avec option `RITZ` en intégrant les modes statiques de l'interface dynamique précédemment définie pour compléter la base des modes propres,
- Calcul des vecteurs assemblés de chargement et projection de ceux-ci sur la base complète,

- Assemblage du macro-élément dynamique par la commande `MACR_ELEM_DYNA` [U4.65.01], à partir de la base modale précédemment définie en y intégrant les vecteurs de charge projetée ou en convertissant une impédance de sol.

Ensuite, pour l'ensemble des domaines :

- Définition et assemblage au maillage initial par `DEFI_MAIILLAGE` [U4.23.01] et `ASSE_MAIILLAGE` [U4.23.03] de super-maillages correspondant chacune à un macro-élément de domaine pour créer un nouveau maillage global,
- Définition d'un modèle global affecté au nouveau maillage global intégrant le domaine non condensé d'éléments finis ainsi que les affectations des super-maillages par le mot clé `AFFE_SOUS_STRUC` de l'opérateur `AFFE_MODELE` [U4.41.01],
- Définition des charges spécifiques du modèle par les mots clés `LIAISON_SOLIDE` ou `LIAISON_INTERF` de l'opérateur `AFFE_CHAR_MECA` [U4.44.01],
- Appel à l'opérateur de calcul non linéaire `STAT_NON_LINE` [U4.51.03] ou `DYNA_NON_LINE` [U4.53.01] sur le modèle global en intégrant les charges spécifiques précédentes par le mot clé `EXCIT` ainsi que les vecteurs projetés sur les sous-domaines par le mot clé `SOUS_STRUC`.

Puis pour chaque domaine de sous-structuration hors ceux d'une impédance de sol :

Restitution sur le modèle sur lequel a été bâti le macro-élément du domaine en base physique par l'opérateur `REST_COND_TRAN` [U4.63.33].

Les fichiers de commandes `miss06b.comm` et `sdnv107b.comm` illustrent ce type de calcul.

5 Bibliographie

- [1] O. NICOLAS : Spécification du développement de la traduction `MACR_ELEM_STAT` / `MACR_ELEM_DYNA`. Compte rendu EDF/AMA-05.149.
- [2] G. DEVESA : Application de méthodes de condensation modale dans les opérateurs de calcul dynamique non linéaire utilisés pour l'étude du benchmark EUROPLEXUS – *Code_Aster* en explicite. Compte rendu EDF/AMA-07-165.
- [3] Document Aster [U2.07.02] : Notice d'utilisation de la sous-structuration statique.
- [4] Document Aster [U2.06.07] : Interaction sol-structure en analyse sismique avec l'interface *Code_Aster* - ProMISS3D.