

## Calcul des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire

---

### Résumé :

On présente la méthode de calcul des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  en thermoélasticité linéaire. La formulation considère le taux de restitution d'énergie comme une forme bilinéaire symétrique du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et utilise les expressions explicites des champs de déplacements singuliers connues en élasticité linéaire plane.

Cette méthode est utilisable à l'aide de l'option `CALC_K_G` de la commande `CALC_G`, aussi bien pour une fissure maillée (éléments finis classiques) que pour une fissure non maillée (éléments finis enrichis : méthode X-FEM).

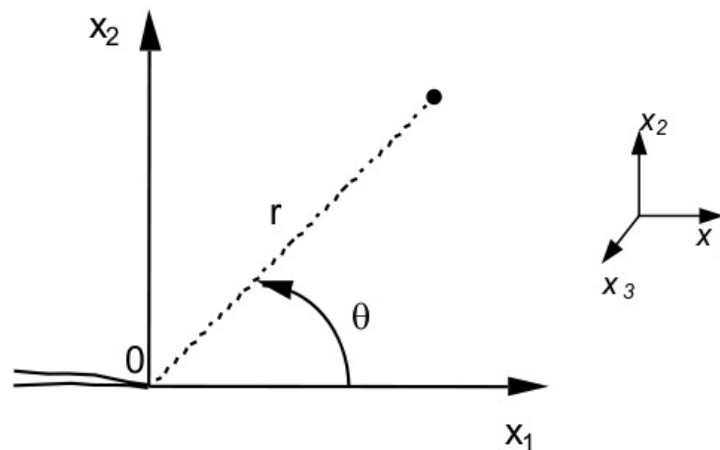
Cette méthode est aussi utilisable pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes associés aux modes propres de vibration d'une structure.

## Table des Matières

1 Expressions des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire .....	3
1.1 Présentation en thermoélasticité linéaire plane.....	3
1.2 Extension au cas 3D.....	4
1.3 Formule d'IRWIN et taux de restitution d'énergie G.....	5
1.4 Découplage des modes de rupture .....	6
2 Implantation de KI, KII et KIII en thermoélasticité linéaire dans Code_Aster.....	8
2.1 Types d'éléments et de chargements.....	8
2.2 Environnement nécessaire pour le calcul de KI, KII et KIII.....	8
2.3 Forme bilinéaire symétrique $g(\cdot, \cdot)$ .....	9
2.3.1 Terme classique élémentaire.....	9
2.3.2 Terme force volumique.....	10
2.3.3 Terme thermique.....	11
2.3.4 Terme force surfacique.....	11
2.3.5 Terme de dynamique modale.....	11
2.4 Champs de déplacements singuliers et leurs dérivées.....	12
2.5 Post-traitement des résultats de KI et KII.....	12
2.5.1 Pour les problèmes 2D.....	12
2.5.2 Pour les problèmes 3D .....	13
3 Bibliographie.....	13
4 Description des versions du document.....	14

# 1 Expressions des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire

## 1.1 Présentation en thermoélasticité linéaire plane



Soient les axes de coordonnées cartésiennes  $Ox_1$  dans le prolongement de la fissure et  $Ox_2$  perpendiculaire à la fissure. Le problème est plan. Nous exprimerons les composantes cartésiennes des déplacements et des contraintes en fonction des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .

En élasticité linéaire, le système des équations de l'équilibre, sans force volumique, et les conditions aux limites homogènes sur la fissure, les contraintes nulles à l'infini, admettent une solution non triviale de la forme  $u_i = \sqrt{r} g_i(\theta)$ . Les contraintes sont infinies au fond de la fissure comme  $r^{-1/2}$  [bib3].

Pour un problème quelconque en élasticité linéaire plane (déformations planes ou contraintes planes), le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  peut se décomposer en une partie singulière et une partie régulière. La partie singulière, appelée également singularité, est celle explicitée ci-dessus. Elle est associée aux facteurs d'intensité des contraintes  $K$ . En élasticité linéaire, les modes de rupture  $I$  (ouverture) et  $II$  (glissement plan) sont séparés :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II}$$

avec :

$$\begin{cases} u_{S1}^I = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (k - \cos\theta) \\ u_{S2}^I = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (k - \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{S1}'' = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (k + \cos\theta - 2) \\ u_{S2}'' = -\frac{1+\nu}{E} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (k + \cos\theta - 2) \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} k &= 3 - 4\nu && \text{en déformations planes } D\_PLAN \\ k &= (3 - \nu)/(1 + \nu) && \text{en contraintes planes } C\_PLAN \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E & \text{ module d'YOUNG} \\ \nu & \text{ coefficient de POISSON} \end{aligned}$$

La répartition des contraintes singulières au voisinage de la fissure est donnée par les formules :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^S = K_I \sigma_{11}^I + K_{II} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{12}^S = K_I \sigma_{12}^I + K_{II} \sigma_{12}^{II} \\ \sigma_{22}^S = K_I \sigma_{22}^I + K_{II} \sigma_{22}^{II} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^I = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{12}^I = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{22}^I = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{11}^{II} = -\frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{12}^{II} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{22}^{II} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$

**Remarque :** l'expression des champs de déplacement et de contraintes singulières établie en 2D – déformations planes peut s'étendre au cas 2D – axisymétrique [bib12]. Les fonctions singulières ne sont cependant valables qu'asymptotiquement, autrement dit la distance  $r$  au fond de fissure doit rester petite par rapport au rayon du fond de fissure.

## 1.2 Extension au cas 3D

Outre les modes plans d'ouverture et de glissement plan, un troisième mode de glissement antiplan (caractérisé par  $K_{III}$ ) peut être défini. Les champs singuliers associés au mode  $III$  sont identifiés en résolvant les équations de l'équilibre d'un milieu plan fissuré infini pour des déplacements uniquement selon l'axe  $x_3$  :

$$\begin{cases} u_{S1}^m = 0 \\ u_{S2}^m = 0 \\ u_{S3}^m = \frac{4(1+\nu)}{E} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_{31}^m = -\frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{32}^m = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Dans le cas tridimensionnel, on peut montrer que le comportement asymptotique des déplacements et des contraintes est la somme des solutions correspondants aux modes *I* et *II* (en déformations planes) et au mode *III* (antiplan), et de quatre autres solutions particulières, mais qui sont plus régulières que les précédentes [bib9]. Le terme principal des champs singuliers reste donc inchangé, et le champ de déplacement en 3D s'exprime alors de la façon suivante :

$$u(s) = u_R + K_I(s)u_S^I + K_{II}(s)u_S^{II} + K_{III}(s)u_S^{III}$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne le long du fond de fissure et  $u_S^I$ ,  $u_S^{II}$  et  $u_S^{III}$  sont les déplacements singuliers définis dans le paragraphe précédent (exprimés, pour chaque point du fond de fissure, dans un repère local adapté).

## 1.3 Formule d'IRWIN et taux de restitution d'énergie $G$

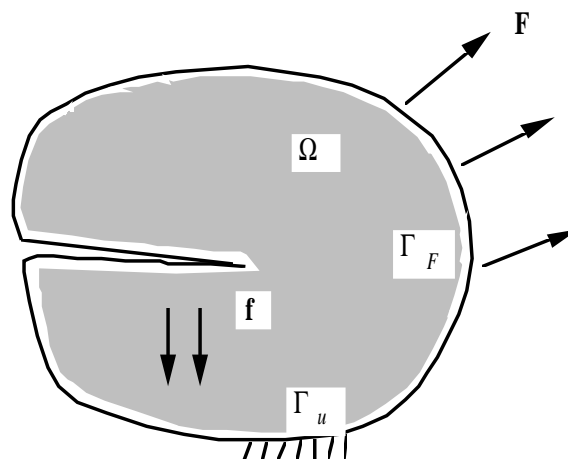
En élasticité linéaire, les facteurs d'intensité de contraintes sont reliés au taux de restitution d'énergie  $G$  par la formule d'IRWIN :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en déformations planes}$$

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en contraintes planes}$$

$$G(s) = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2(s) + K_{II}^2(s)) + \frac{K_{III}^2(s)}{2\mu}, \quad \text{avec } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \text{en 3D}$$

Le taux de restitution d'énergie  $G$  est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la propagation du fond de fissure. Dans *Code\_Aster*,  $G$  est calculé par la méthode  $\theta$  [bib5 et documentation R7.02.01] qui est une méthode Lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle.



Ainsi, on considère des transformations  $M \rightarrow M + \eta\theta(M)$  du domaine de référence  $\Omega_0$  en un domaine  $\Omega_\eta$  qui correspondent à des propagations de la fissure. A ces familles de configuration de référence ainsi définies  $\Omega_\eta$  correspondent des familles de configurations déformées dont la fissure s'est propagée. L'énergie potentielle définie sur  $\Omega_\eta$  est ramenée sur  $\Omega_0$ .

On considère les forces surfaciques  $F$  et volumiques  $f$  appliquées respectivement à  $\Gamma_F$  et  $\Omega_0$ . On note  $\Psi(\varepsilon(\mathbf{u}))$  la densité d'énergie libre,  $\mathbf{u}$  le champ de déplacement,  $T$  le champ de température et  $\theta$  le champ de vecteurs décrivant la direction du transport en  $\eta=0$ , alors l'expression générale du taux de restitution d'énergie  $G$  [bib5] est :

$$\begin{aligned}
 G = & \int_{\Omega} [\sigma(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - \Psi(\varepsilon(\mathbf{u})) \operatorname{div} \theta] d\Omega \quad \leftarrow \text{terme classique} \\
 & - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial T} (\nabla T \cdot \theta) d\Omega \quad \leftarrow \text{terme dû à la thermique} \\
 & + \int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{f} \cdot \theta) \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} \theta] d\Omega \quad \leftarrow \text{terme dû aux forces volumiques } \mathbf{f} \text{ sur } \Omega \\
 & + \int_{\Gamma_F} \left[ (\nabla \mathbf{F} \cdot \theta) \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} (\operatorname{div} \theta - \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}}) \right] d\Gamma \quad \leftarrow \text{terme dû aux forces surfaciques } \mathbf{F} \text{ sur } \Gamma_F \\
 & - \int_{\Gamma_u} [(\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \theta)] d\Gamma \quad \leftarrow \text{terme dû aux déplacements imposés sur } \Gamma_u
 \end{aligned}$$

En élasticité linéaire,  $G$  peut être considéré comme une forme bilinéaire symétrique du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ . La densité d'énergie élastique  $\Psi(\varepsilon(\mathbf{u}))$  s'écrit :

$$\Psi(\varepsilon(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{u}) : \Lambda : \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

en notant :

$\Lambda$  le tenseur d'élasticité

$B$  la forme bilinéaire symétrique définie par :  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varepsilon(\mathbf{u}) : \Lambda : \varepsilon(\mathbf{v})$

et la forme bilinéaire  $g(\cdot, \cdot)$  associée à  $G$  est définie par :

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial B}{\partial \nabla \mathbf{u}} \cdot (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \theta) + \frac{\partial B}{\partial \nabla \mathbf{v}} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \operatorname{div} \theta \right] d\Omega \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{f}_u \cdot \theta) \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{f}_v \cdot \theta) \mathbf{u} + (\mathbf{f}_u \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \theta] d\Omega
 \end{aligned}$$

en se limitant aux termes classique et dû aux forces volumiques  $f$ .

On a  $G = g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  si  $\mathbf{u}$  est solution du problème élastique.

## 1.4 Découplage des modes de rupture

Pour découpler les trois modes de rupture et calculer les trois facteurs d'intensité des contraintes associés, on utilise la forme bilinéaire symétrique  $g(\cdot, \cdot)$  et la décomposition du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  en parties régulière et singulière [bib7]. Pour simplifier la présentation, on se place dans un premier temps dans le cas plan, mais les propriétés se généralisent sans difficulté au cas 3D.

$$\begin{cases}
 g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) = g(\mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II}, \mathbf{u}_S^I) = g(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_S^I) + K_I g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) + K_{II} g(\mathbf{u}_S^{II}, \mathbf{u}_S^I) \\
 g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^{II}) = g(\mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II}, \mathbf{u}_S^{II}) = g(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_S^{II}) + K_I g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^{II}) + K_{II} g(\mathbf{u}_S^{II}, \mathbf{u}_S^{II})
 \end{cases}$$

On démontre en thermoélasticité linéaire plane que  $\mathbf{u}_S^I$  et  $\mathbf{u}_S^II$  sont orthogonaux pour le produit scalaire défini par la forme bilinéaire  $g(\cdot, \cdot)$  et que les termes faisant intervenir la partie régulière s'annulent :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^II) &= g(\mathbf{u}_S^II, \mathbf{u}_S^I) = 0 \\ g(\mathbf{u}^R, \mathbf{u}_S^I) &= g(\mathbf{u}^R, \mathbf{u}_S^II) = 0 \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) &= K_I g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) \\ g(\mathbf{u}^R, \mathbf{u}_S^II) &= K_{II} g(\mathbf{u}_S^II, \mathbf{u}_S^II) \end{aligned}$$

De plus, en écrivant le taux de restitution d'énergie sous la forme :

$$G = g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^II, \mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^II)$$

on retrouve la formule d'IRWIN en réutilisant les propriétés d'orthogonalité :

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = K_I^2 g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) + K_{II}^2 g(\mathbf{u}_S^II, \mathbf{u}_S^II)$$

avec :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) &= g(\mathbf{u}_S^II, \mathbf{u}_S^II) = \frac{1-\nu^2}{E} \text{ en C\_PLAN} \\ g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) &= g(\mathbf{u}_S^II, \mathbf{u}_S^II) = \frac{1}{E} \text{ en D\_PLAN} \end{aligned}$$

Finalement, de manière générale :

$$\begin{cases} K_I = E g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) \\ K_{II} = E g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^II) \end{cases} \text{ en C\_PLAN}$$

$$\begin{cases} K_I = \frac{E}{1-\nu^2} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) \\ K_{II} = \frac{E}{1-\nu^2} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^II) \end{cases} \text{ en D\_PLAN et en 3D}$$

et  $K_{III} = 2\mu \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^{III})$  en 3D

L'implantation du calcul des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire dans Code\_Aster est réalisée à partir de l'expression du taux de restitution d'énergie  $G$  en élasticité linéaire, écrite sous forme bilinéaire symétrique, en introduisant les expressions connues des déplacements singuliers, et en utilisant la méthode thêta.



## 2 Implantation de $K_I$ , $K_{II}$ et $K_{III}$ en thermoélasticité linéaire dans Code Aster

### 2.1 Types d'éléments et de chargements

Pour calculer les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  (et éventuellement  $K_{III}$ ) en élasticité linéaire, il faut utiliser l'option `CALC_K_G` de la commande `CALC_G`.

Cette option est valable aussi bien pour une fissure maillée (éléments finis classiques) que pour une fissure non maillée (éléments finis enrichis : méthode X-FEM). Elle est disponible en 2D (modélisations '`C_PLAN`' et '`D_PLAN`' pour une fissure maillée ou non ; modélisation '`AXIS`' pour une fissure maillée uniquement) et en 3D, pour des éléments finis linéaires ou quadratiques.

Tous les chargements thermomécaniques classiques sont pris en compte : chargements thermiques, chargements volumiques (pesanteur, rotation, ...), chargements surfaciques (y compris sur les lèvres de la fissure).

#### Remarque :

*On ne tient pas compte du terme dû aux déplacements imposés sur  $\Gamma_u$ , il ne faut donc pas imposer de conditions de DIRICHLET sur les lèvres de la fissure.*

### 2.2 Environnement nécessaire pour le calcul de $K_I$ , $K_{II}$ et $K_{III}$

La commande `CALC_G` permet de récupérer le modèle du problème, les caractéristiques du matériau, le champ de déplacement. Le champ  $\theta$  est récupéré ou calculé par la commande `CALC_G`.

#### Fissure maillée :

- En 2D, il est nécessaire de définir le mot-clé `FOND_FISS`, qui permet de récupérer un concept de type `fond_fiss` (produit par la commande `DEFI_FOND_FISS`) où sont définis le noeud de fond de fissure et la normale à la fissure.
- En 3D, il est nécessaire de définir le mot-clé `FISSURE`, qui permet de récupérer un concept de type `fiss_xfem` (produit par la commande `DEFI_FISS_XFEM`) où sont définis les noeuds de fond de fissure et les bases locales le long du fond de fissure.
- Lorsque que la fissure est disposée le long d'un axe de symétrie, on peut se contenter de ne représenter que la moitié du modèle, et préciser la symétrie du chargement par le mot-clé `SYME` (ou si `FOND_FISS` est indiquée la présence de symétrie est automatiquement détectée). Par défaut, on suppose qu'il n'y a pas de symétrie. Si on affecte la valeur '`OUI`' au mot clé `SYME`, cela signifie que seul le mode I de rupture agit (ouverture des lèvres de la fissure) et on affecte automatiquement la valeur nulle à  $K_{II}$  (et éventuellement  $K_{III}$ ).

#### Fissure non maillée (méthode X-FEM) :

- En 2D comme en 3D, la fissure doit être définie, pour le calcul mécanique et pour le post-traitement, à l'aide de la commande `DEFI_FISS_XFEM`. Le mot-clé `FISSURE` doit être renseigné dans `CALC_G`.
- Si la fissure n'est pas maillée, il n'est pas possible de prendre en compte les éventuelles symétries du modèle par rapport aux lèvres de la fissure.

Insistons sur la nécessité d'affecter à tous les éléments (y compris ceux des lèvres) les valeurs du modules d'YOUNG  $E$  et du coefficient de POISSON  $\nu$ , car elles sont utilisées dans le calcul des déplacements singuliers. Ces valeurs doivent être homogènes sur tout le support du champ  $\theta$ . Par ailleurs, si un chargement est affecté sur les mailles surfaciques (en 3D) ou linéiques (en 2D) des lèvres de la fissure, les mailles de celles-ci doivent être correctement orientées.

## 2.3 Forme bilinéaire symétrique $g(\cdot, \cdot)$

### 2.3.1 Terme classique élémentaire

$$TCLA = \sigma(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \nabla \theta) - \Psi(\varepsilon(\mathbf{u})) \operatorname{div} \theta$$

La densité d'énergie élastique  $\Psi(\varepsilon(\mathbf{u}))$  peut s'écrire en thermo-élasticité linéaire sous la forme suivante :

en D\_PLAN et en C\_PLAN :

$$2\Psi(\varepsilon(\mathbf{u})) = C_1(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + 2C_2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 4C_3\varepsilon_{xy}^2 - 2\Psi_{th}$$

en 3D :

$$2\Psi(\varepsilon(\mathbf{u})) = C_1(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + 2C_2(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}) + 4C_3(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) - 2\Psi_{th}$$

avec  $\Psi_{th}$  = Densité d'énergie due à la thermique :

$$\Psi_{th} = 3K\alpha(T - T_{réf}) \operatorname{tr} \varepsilon$$

où :

$$\begin{aligned} 3K &= \frac{E}{1-2\nu} \\ \alpha &= \text{dilatation thermique} \\ \varepsilon &= \text{tenseur de déformations} \\ T_{réf} &= \text{température de référence} \end{aligned}$$

et avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu \\ C_2 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \\ C_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \end{array} \right. \quad \text{en D\_PLAN et en 3D ;} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ C_2 = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \\ C_3 = \frac{E}{(1+\nu)} \end{array} \right. \quad \text{en C\_PLAN}$$

**Remarque :**

L'expression exacte de la densité d'énergie due à la thermique  $\Psi_{th}$  est en réalité :

$$\Psi_{th} = 3K\alpha(T - T_{réf}) \operatorname{tr} \varepsilon - \frac{9}{2}K\alpha^2(T - T_{réf})^2$$

On peut cependant montrer que si on prend en compte le terme  $-\frac{9}{2}K\alpha^2(T - T_{réf})^2$  dans le terme classique, et sa dérivée dans le terme thermique, alors les deux contributions s'annulent [bib10]. On ne les prend donc pas en compte.

En notant  $\Psi(\varepsilon(\mathbf{u})) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ , on a  $2\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = SI - SITH$  avec :

$$SI = C1 \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + C2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} (1 - \delta_{ij}) \right) + C3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (1 - \delta_{ij}) + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} (1 - \delta_{kl}) \right)$$

$$S1TH = 3K\alpha \left( (T_u - T_{réf}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + (T_v - T_{réf}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right)$$

où les indices  $i, j, k$  et  $l$  correspondent à une sommation sur les 2 coordonnées de l'espace (resp. 3 coordonnées) en 2D (resp. 3D) ;  $T_u$  est la température associée au champ de déplacement  $\mathbf{u}$  par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \Lambda (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{th})$$

où  $\varepsilon_{ij}^{th} = \alpha (T - T_{réf}) \delta_{ij}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifient les équations d'équilibre.

De la même façon, le terme  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \nabla \theta)$  peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \nabla \theta) = S2 - S2TH$$

$$\text{avec : } S2 = C1 \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) (1 - \delta_{ij}) \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \right] \\ + C2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) (1 - \delta_{jk}) \right] \\ + C3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right) (1 - \delta_{jk}) \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right]$$

et :

$$S2TH = \frac{TH1}{2} 3K\alpha (T_u - T_{réf}) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right) + \frac{THA}{2} 3K\alpha (T_v - T_{réf}) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right)$$

où  $TH1 = 1$  en D\_PLAN et en 3D et  $TH1 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$  en C\_PLAN.

Finalement le terme classique s'écrit :

$$TCLA = (S2 - S2TH) - \frac{1}{2} (SI - S1TH) \operatorname{div} \theta$$

## 2.3.2 Terme force volumique

$$TFOR = (\nabla f \cdot \theta) \mathbf{u} + f \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} \theta$$

En toute rigueur, l'expression bilinéaire symétrique de  $TFOR$  s'écrit en  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  :

$$TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [(\nabla f_u \cdot \theta) \mathbf{v} + (\nabla f_v \cdot \theta) \mathbf{u} + (f_u \cdot \mathbf{v} + f_v \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \theta]$$

où  $f_u$  sont les forces volumiques associées au champ de déplacement  $\mathbf{u}$  pour le problème élastique.

Comme les expressions que nous sommes amenés à calculer sont du type  $TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  et  $TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{u}^S)$ , où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^S$  sont respectivement le champ de déplacement et le champ singulier, et que :

$$f_{u^S} = \text{div}(\sigma(\mathbf{u}^S)) = 0 \text{ sur } \Omega$$

On se limite à écrire :

$$TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = CS [(\nabla F_u \cdot \theta) \mathbf{v} + F_u \cdot \mathbf{v} \text{div } \theta] \text{ avec } \begin{cases} CS = 0.5 & \mathbf{v} = \mathbf{u}^S \\ CS = 1 & \mathbf{v} = \mathbf{u} \end{cases}$$

La même remarque est valable pour le terme classique thermique, le terme supplémentaire dû à la thermique et les termes dus aux forces surfaciques.

### 2.3.3 Terme thermique

On fait l'hypothèse que les caractéristiques du matériau  $(E, \nu, \alpha)$  ne dépendent pas de la température.

$$\text{en D\_PLAN et en C\_PLAN : } TTHE = \frac{-\partial \Psi}{\partial T} (\nabla T \cdot \theta) = \frac{1}{2} 3 K \alpha \text{tr } \varepsilon \left( \frac{\partial T}{\partial x} \theta_x + \frac{\partial T}{\partial y} \theta_y \right)$$

$$\text{en 3D : } TTHE = \frac{1}{2} 3 K \alpha \text{tr } \varepsilon \left( \frac{\partial T}{\partial x} \theta_x + \frac{\partial T}{\partial y} \theta_y + \frac{\partial T}{\partial z} \theta_z \right)$$

### 2.3.4 Terme force surfacique

Le terme force surfacique s'écrit :

$$TSUR = (\nabla F \cdot \theta) \mathbf{u} + F \cdot \mathbf{u} \left( \text{div } \theta - n \cdot \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)$$

Le terme en  $n \cdot \frac{\partial \theta}{\partial n}$  est nul car le gradient de  $\theta$  est orthogonal à  $n$ . Comme pour le terme force volumique, l'expression bilinéaire  $TSUR(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  s'obtient en considérant que  $\mathbf{v}$  est soit égal au déplacement  $\mathbf{u}$  (et donc  $F_v = F_u$ ), soit à un champ singulier  $\mathbf{u}^S$  (et donc  $F_v = 0$ ). On a alors :

$$TSUR(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = CS [(\nabla F_u \cdot \theta) \mathbf{v} + F_u \cdot \mathbf{v} \text{div } \theta] \text{ avec } \begin{cases} CS = 0.5 & \mathbf{v} = \mathbf{u}^S \\ CS = 1 & \mathbf{v} = \mathbf{u} \end{cases}$$

### 2.3.5 Terme de dynamique modale

Dans le cas des problèmes dynamiques, un terme supplémentaire  $TDYN$  apparaît dans la décomposition de taux de restitution d'énergie exprimée dans le paragraphe 1.3 :

$$TDYN = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \text{div } \sigma \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \nabla \dot{\mathbf{u}} \cdot \theta \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \ddot{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{u} \cdot \theta \cdot d\Omega$$

où  $\dot{\mathbf{u}}$  et  $\ddot{\mathbf{u}}$  sont respectivement la dérivée première et seconde du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  par rapport au temps. Pour les problèmes harmoniques, ce terme peut se simplifier [bib 10]. En notant  $\omega$

la pulsation du mode propre étudié et  $\rho$  la masse volumique, la forme bilinéaire du terme dynamique s'écrit ainsi :

$$TDYN(u, v) = -\frac{1}{2}(\rho\omega^2 u_k v_{k,j} \theta_j + \rho\omega^2 v_k u_{k,j} \theta_j).$$

## 2.4 Champs de déplacements singuliers et leurs dérivées

Les champs singuliers  $u_S^I$ ,  $u_S^{II}$  et  $u_S^{III}$ , associés respectivement aux modes  $I$ ,  $II$  et  $III$ , sont connus explicitement ainsi que leurs dérivées. Ils sont écrits en fonction des coordonnées polaires dans le repère lié à la fissure.

L'introduction successive de ces champs singuliers permet, comme indiqué dans le §1, le calcul élémentaire des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ .

## 2.5 Post-traitement des résultats de $K_I$ et $K_{II}$

### 2.5.1 Pour les problèmes 2D

Connaissant les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  pour une fissure donnée, les formules de AMESTOY - BUI et DANG-VAN, permettent le calcul de l'angle de propagation de la fissure selon 3 critères ( $K_I$  maximal,  $K_{II}$  et  $G$  maximal) [bib6].

Soit  $\Omega_m^n$  un domaine identique à  $\Omega$  sauf que la fissure est prolongée dans la direction d'angle  $m$  d'un segment de droite de longueur  $\eta$ .

$$\Omega_m^0 \equiv \Omega$$

Soient  $K_I(\eta, m)$ ,  $K_{II}(\eta, m)$ ,  $G(\eta, m)$  les facteurs d'intensité de contraintes et le taux de restitution d'énergie de  $\Omega_m^n$  soumis au même chargement que  $\Omega$ .

On pose :

$$\begin{aligned} K_I^*(m) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} K_I(\eta, m) \\ K_{II}^*(m) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} K_{II}(\eta, m) \\ G^*(m) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} G(\eta, m) \end{aligned}$$

Les critères cités par AMESTOY - BUI et DANG-VAN [bib6] sont :

- choisir  $m_0$  tel que  $K_I^*(m_0)$  soit maximum,
- choisir  $m_0$  tel que  $K_{II}^*(m_0)$  soit nul,
- choisir  $m_0$  tel que  $G^*(m_0)$  soit maximum.

Ces critères donnent des résultats très voisins [bib8].

Les résultats sont donnés sous forme d'un tableau de 4 coefficients  $K_{11}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{22}$  permettant de calculer  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  dans tous les cas de chargement :

$$\begin{pmatrix} K_I^* \\ K_{II}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix}$$

Angle $m$ (°)	$K_{11}$	$K_{21}$	$K_{12}$	$K_{22}$
0	1	0	0	1
10	0,9886	0,0864	- 0,2597	0,9764
20	0,9552	0,1680	- 0,5068	0,9071
30	0,9018	0,2403	- 0,7298	0,7972
40	0,8314	0,2995	- 0,9189	0,6540
50	0,7479	0,3431	- 1,0665	0,4872
60	0,6559	0,3696	- 1,1681	0,3077
70	0,5598	0,3788	- 1,2220	0,1266
80	0,4640	0,3718	- 1,2293	- 0,0453
90	0,3722	0,3507	- 1,1936	- 0,1988

$$K_{11}(-m) = K_{11}(m), K_{21}(-m) = -K_{21}(m), K_{12}(-m) = -K_{12}(m), K_{22}(-m) = K_{22}(m)$$

La recherche de l'angle  $m_0$  dans CALC\_G est faite de 10 degrés en 10 degrés. L'angle  $\beta$  de propagation n'est calculé et imprimé (dans le fichier MESSAGE) que si INFO vaut 2.

## 2.5.2 Pour les problèmes 3D

La direction de propagation d'une fissure en 3D peut être déterminée par le principe du *Maximum Hoop Stress Criterion* (maximisation de la contrainte circonférentielle) [bib11]. L'angle de propagation s'exprime alors de la façon suivante :

$$\beta = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \cdot \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right]$$

L'angle  $\beta$ , calculé systématiquement, est indiqué dans le tableau résultat produit par la commande CALC\_G (colonne BETA).

## 3 Bibliographie

- 1 H.D. BUI, J.M. PROIX : "Loi de conservation en thermo-élasticité linéaire" - C.R. Acad.Sc.Paris, t.298, Série II, n° 8, 1984.
- 2 H.D. BUI : "Associated path independent J-Integrals for separating mixed modes" - J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, N° 6, pp. 439-448, 1983.
- 3 H.D. BUI : "Mécanique de la rupture fragile" - Masson, 1977.
- 4 P.; DESTUYNDER, M. DJAOUA : "Sur une interprétation de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, Mathematics Methods in the Applied Sciences" - Vol. 3, pp. 70-87, 1981.
- 5 P. MIALON : "Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode thêta" - E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n° 3, 1988, pp. 1-28.
- 6 M. AMESTOY, H.D. BUI, K. DANG-VAN : "Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire" - C.R. Acad. Sc. Paris, t.289 (24 septembre 1979), Série B-99.

- 7 E. VISSE : "Calcul des facteurs d'intensité de contraintes en élasticité linéaire plane" - Note interne EDF-DER-MMN, HI-75505D du 05/07/94.
- 8 P.MIALON : "Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure", note interne E.D.F. HI/4740-07 - 1984.
- 9 J.B. LEBLOND : "Mécanique de la rupture fragile et ductile" – Lavoisier, 2003.
- 10 E. GALENNE, S. DI DOMIZIO : "Méthode thêta en mécanique de la rupture : développement de la forme bilinéaire de G en 3D et application au cas de la dynamique modale basse fréquence", note interne E.D.F. R&D HT-65/05/024 - 2006.
- 11 G. ERDOGAN, G.C. SIH, "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", Journal of Basic Engineering, 85, 519-27, 1963.
- 12 R.A. CHAUDHURI, "Three-dimensional asymptotic stress field in the vicinity of the circumference of a penny shaped discontinuity", Int. J. of Solids and Structures, 40, 3787-3805, 2003.

## 4 Description des versions du document

---

Indice doc	Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
A	4	E.Visse EDF/R&D/MMN	Texte intial
B	7.4	E.Galenne EDF/R&D/AMA	modifications mineures
C	8.4	E.Galenne EDF/R&D/AMA	Extension au 3D, termes volumiques et thermiques
D	9.4	E.Galenne EDF/R&D/AMA	Fiche 11175 CALC_K_G en axisymétrique