

Relation de comportement BETON_BURGER_FP pour le fluage propre du béton

Résumé :

Ce document présente le modèle de fluage propre BETON_BURGER_FP, qui est une façon de modéliser le fluage propre du béton. Ce modèle s'inspire fortement de la structure déjà mise en place dans le modèle BETON_UMLV_FP.

On y détaille également l'écriture et le traitement numérique du modèle. L'intégration du modèle (c'est à dire la mise à jour des contraintes) est réalisé suivant un schéma implicite à partir de l'incrément de déformations totales fourni par le schéma de résolution global.

Table des Matières

1	Introduction.....	3
2	Hypothèses.....	3
3	Description du modèle.....	5
3.1	Description de la partie sphérique.....	5
3.2	Description de la partie déviatorique.....	5
3.3	Description de la non linéarité visqueuse.....	6
3.4	Restriction du nombre de paramètres du modèle.....	6
4	Discretisation des équations constitutives du modèle.....	7
4.1	Discretisation des équations du fluage réversible.....	7
4.2	Discretisation des équations du fluage irréversible.....	8
4.3	Discretisation des équations du fluage de dessiccation.....	10
5	Schéma général d'intégration locale.....	11
5.1	Phase de prédiction.....	11
5.2	Phase de correction.....	11
5.3	Phase de mise à jour.....	12
6	Opérateur tangent consistant.....	13
7	Description des variables internes.....	14
8	Notations.....	14
9	Bibliographie.....	16
10	Fonctionnalités et vérification.....	16
11	Description des versions du document.....	16

1 Introduction

Dans le cadre des études du comportement à long terme de structures en béton, une part prépondérante des déformations mesurées sur structure concerne les déformations différées qui apparaissent dans le béton au cours de sa vie. Elles comportent les retraits au jeune âge, le retrait de dessiccation, le fluage propre et le fluage de dessiccation.

Le modèle présenté ici est dédié à la modélisation de la déformation différée associée au fluage propre. Le fluage propre est, en complément du fluage de dessiccation, la part de fluage du béton qu'on observerait lors d'un essai sans échange d'eau avec l'extérieur. Expérimentalement le béton en fluage propre présente un comportement visqueux vieillissant. La déformation de fluage observée est proportionnelle à la contrainte de chargement, dépend de la température et de l'hygrométrie.

Les modèles de fluage des bétons existants (ex. : modèle de Granger – voir [bib4] et [R7.01.01]) ont été développés dans l'optique de prédire les déformations longitudinales de fluage sous des contraintes uniaxiales. La généralisation de ces modèles, afin de prendre en compte un état de contraintes multiaxiales, se fait alors par l'intermédiaire d'un coefficient de Poisson de fluage arbitraire, constant et égal, ou proche, du coefficient de Poisson élastique. Or, la détermination *a posteriori* du coefficient de Poisson de fluage effectif montre sa dépendance vis-à-vis du chemin de chargement. Par ailleurs, le béton de certains ouvrages du Parc EDF, telles les enceintes de confinement de réacteur nucléaire, est soumis à un état de contraintes biaxiales. Ce constat a conduit à la mise au point de la loi de déformations de fluage propre UMLV (Université de Marne-la-Vallée, partenaire dans le développement de ce modèle) pour laquelle le coefficient de Poisson de fluage est une conséquence directe du calcul des déformations principales.

Le modèle BETON_UMLV_FP suppose pour sa part des vitesses de déformation à long terme constante, rhéologie qui semble peu vraisemblable au vu des résultats expérimentaux issus des travaux de Brooks [bib7]. En conservant la structure du modèle BETON_UMLV_FP, on ajoute une non linéarité sur les vitesses de déformation à long terme pour corriger ce point, méthodologie également employée par Sellier et al. [bib6]. Le nouveau modèle développé est décrit comme phénoménologique

Dans *Code_Aster*, le modèle est utilisé sous le nom de BETON_BURGER_FP.

2 Hypothèses

Hypothèse 1 (H.P.P.)

Le loi est écrite dans le cadre des petites perturbations.

Hypothèse 2 (partition des déformations)

En petites déformations, le tenseur des déformations totales est décomposé en plusieurs termes relatifs aux processus considérés. S'agissant de la description des différents mécanismes de déformations différées des bétons, on admet que la déformation totale s'écrive :

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon^e}_{\text{déformation élastique}} + \underbrace{\varepsilon^{fp}}_{\text{fluage propre}} + \underbrace{\varepsilon^{fdess}}_{\text{fluage de dessiccation}} + \underbrace{\varepsilon^{9R}}_{\text{retrait endogène}} + \underbrace{\varepsilon^{rd}}_{\text{retrait de dessiccation}} + \underbrace{\varepsilon^{th}}_{\text{déformation thermique}} \quad \text{éq 2-1}$$

Dans le cadre de cette documentation, on se limitera à la description du fluage propre.

A des fins de simplification d'écriture, l'exposant *f* désignera la déformation de fluage propre de sorte que [éq 2-1] se réduise à :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f \quad \text{éq 2-2}$$

N.B. :

| Dans la suite le terme « fluage » désignera exclusivement le fluage propre.

Hypothèse 3 (décomposition des composantes de fluage)

De façon générale, le fluage propre peut être modélisé en combinant le comportement élastique du solide et le comportement visqueux du fluide. Pour la loi présentée, le fluage est décrit comme la combinaison du comportement élastique des hydrates et des granulats et du comportement visqueux de l'eau.

Dans le cas du modèle BETON_BURGER_FP, on effectue l'hypothèse que le fluage puisse être décomposé en un processus découplant une partie sphérique et une partie déviatorique. Le tenseur des déformations totales de fluage s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^f = \underbrace{\varepsilon^{fs} \cdot \underline{\underline{1}}}_{\substack{\text{partie} \\ \text{sphérique}}} + \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}}_{\substack{\text{partie} \\ \text{déviatorique}}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon^{fs} = \frac{1}{3} \cdot \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^f \quad \text{éq 2-3}$$

Le tenseur des contraintes peut être développé suivant une forme similaire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\sigma^s \cdot \underline{\underline{1}}}_{\substack{\text{partie} \\ \text{sphérique}}} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^d}_{\substack{\text{partie} \\ \text{déviatorique}}} \quad \text{éq 2-4}$$

Le modèle de fluage BETON_BURGER_FP suppose un découplage total entre les composantes sphériques et déviatoriques : les déformations induites par les contraintes sphériques sont purement sphériques et les déformations induites par les contraintes déviatoriques sont purement déviatoriques. En revanche, les déformations visqueuses cumulées ont un effet sur les propriétés visqueuses du fluide, quelque soit sa provenance (sphérique ou déviatorique). Pour tenir compte de l'effet de l'humidité interne, les déformations sont multipliées par l'humidité relative interne :

$$\varepsilon^s = h \cdot f(\sigma^s) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^d = h \cdot f(\underline{\underline{\sigma}}^d) \quad \text{éq 2-5}$$

Ou h désigne l'humidité relative interne.

La condition [éq 2-5] permet de vérifier a posteriori que les déformations de fluage propre sont proportionnelles à l'humidité relative.

3 Description du modèle

Pour modéliser le phénomène de fluage propre, le modèle proposé s'appuie sur des modèles rhéologiques simples (figure 3-1) comprenant en série un corps élastique (décrit par le comportement ELAS), un solide de Kelvin Voigt linéaire pour la modélisation du fluage réversible (recouvrance), et un liquide de Maxwell avec une viscosité non linéaire pour modéliser le fluage à long terme. Les chaînes sphérique et déviatorique sont équivalentes dans leur construction.

L'étage de Kelvin Voigt a une limite de déformation gérée par le module d'élasticité (décrit sur la figure 4.1-1). La particularité du modèle repose sur le choix de la non linéarité affectée à la viscosité du corps de Maxwell (figure 4.2-1).

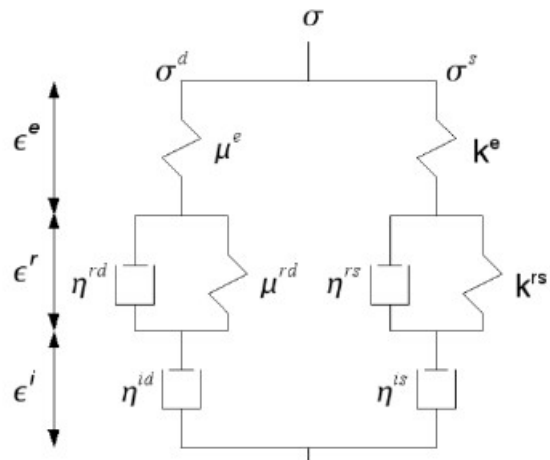


Figure 3-1: Schéma rhéologique distinguant la partie sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes

3.1 Description de la partie sphérique

La déformation sphérique de fluage s'écrit comme la somme d'une partie réversible et d'une partie irréversible :

$$\varepsilon^{fs} = \underbrace{\varepsilon_r^{fs}}_{\text{partie réversible}} + \underbrace{\varepsilon_i^{fs}}_{\text{partie irréversible}} \quad \text{éq 3.1-1}$$

Le processus de déformation sphérique du fluage est gouverné par les équations suivantes (équations [éq 3.1-2] et [éq 3.1-3]) :

$$h \cdot \sigma^s = k^{rs} \cdot \varepsilon_r^{fs} + \eta^{rs} \cdot \dot{\varepsilon}_r^{fs} \quad \text{éq 3.1-2}$$

et

$$h \cdot \sigma^s = \eta^{is} \cdot \dot{\varepsilon}_i^{fs} \quad \text{éq 3.1-3}$$

avec :

- k_r^s le module de compressibilité associé au fluage propre sphérique réversible,
- η_r^s la viscosité de l'étage de Kelvin Voigt associé au fluage propre sphérique réversible,
- η_i^s la viscosité sphérique non linéaire du fluide de Maxwell.

L'indicateur $\dot{}$ associé à toute variable décrit la vitesse d'évolution de cette variable.

3.2 Description de la partie déviatorique

La déformation déviatorique de fluage s'écrit également comme la somme tensorielle d'une partie réversible et d'une partie irréversible :

$$\underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{fd}}}_{\substack{\text{déformation} \\ \text{déviatorique} \\ \text{totale}}} = \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}_r^{\text{fd}}}_{\substack{\text{contribution} \\ \text{réversible}}} + \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{\text{fd}}}_{\substack{\text{contribution} \\ \text{irréversible}}} \quad \text{éq 3.2-1}$$

La $j^{\text{ème}}$ composante principale de la déformation déviatorique totale est régie par les équations [éq 3.2-2] et [éq 3.2-3] :

$$\eta_r^d \cdot \dot{\varepsilon}_r^{\text{fd},j} + k_r^d \cdot \varepsilon_r^{\text{fd},j} = h \cdot \sigma^{d,j} \quad \text{éq 3.2-2}$$

et

$$\eta_i^d \cdot \dot{\varepsilon}_i^{\text{fd},j} = h \cdot \sigma^{d,j} \quad \text{éq 3.2-3}$$

avec :

- k_r^d le module de cisaillement associé au fluage propre déviatorique réversible,
- η_r^d la viscosité de l'étage de Kelvin Voigt associé au fluage propre déviatorique réversible,
- η_i^d la viscosité déviatorique non linéaire du fluide de Maxwell.

3.3 Description de la non linéarité visqueuse

La non linéarité de la viscosité est interprétée selon [bib6] comme le résultat d'une consolidation sphérique de l'échantillon ([bib7]) et d'un enchevêtrement ou blocage des déplacements des feuillettes CSH, constituants du mortier. Un coefficient de « consolidation » est donc introduit selon la même idée pour contrôler l'évolution des viscosités. Ce coefficient supplémentaire intervient sur les lois d'évolutions des corps de Maxwell (sphérique et déviatorique). Il dépend directement de la norme du tenseur des déformations différées irréversibles cumulées. Cette extension des hypothèses posées par [bib6] permet une prise en compte de la non linéarité pour tout type de trajets (avec ou sans chargement sphérique). La formulation explicite des corps de Maxwell est la suivante :

$$\eta_i^s = \eta_{i,0}^s \cdot \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_m^{\text{fi}}\|}{\kappa}\right) \quad \text{et} \quad \eta_i^d = \eta_{i,0}^d \cdot \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_m^{\text{fi}}\|}{\kappa}\right) \quad \text{éq 3.3-1}$$

avec :

- $\eta_{i,0}^s$ la viscosité initiale du fluide de Maxwell portant sur la partie sphérique
- $\eta_{i,0}^d$ la viscosité initiale du fluide de Maxwell portant sur la partie déviatorique
 - κ la déformation caractéristique liée à une viscosité amplifiée d'un facteur $\exp(1)$.
 - $\|\underline{\underline{\varepsilon}}_m^{\text{fi}}\|$ La déformation équivalente irréversible, c'est à dire la norme du tenseur complet (sphérique et déviatorique) de déformations de fluage irréversible, valeur maximale atteinte au cours du chargement.

La construction de $\|\underline{\underline{\varepsilon}}_m^{\text{fi}}\|$ suit la logique suivante : $\|\underline{\underline{\varepsilon}}_m^{\text{fi}}\| = \max\left(\|\underline{\underline{\varepsilon}}_m^{\text{fi}}\|, \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{fi}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{fi}}}\right)$.

3.4 Restriction du nombre de paramètres du modèle

L'équivalence des chaînes rhéologiques déviatorique et sphérique permet d'obtenir, en respectant l'expression suivante [éq 3.4-1], un coefficient de Poisson apparent de fluage constant :

$$\frac{\eta_{i,0}^s}{\eta_{i,0}^d} = \frac{\eta_r^s}{\eta_r^d} = \frac{k_r^s}{k_r^d} = \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2 \cdot \nu)} = \beta \quad \text{éq. 3.4-1}$$

Pour l'utilisation du modèle BETON_BURGER_FP sur des essais uniaxiaux de fluage, on dispose rarement des déformations radiales des échantillons rendant difficile l'identification de l'ensemble des paramètres du modèle. Une première approximation consiste à assumer la relation [éq. 3.4-1] et limite ainsi le nombre de paramètres à déterminer à 4.

4 Discrétisation des équations constitutives du modèle

La discrétisation employée est similaire pour les parties sphérique et déviatorique dans le traitement des déformations de fluage réversible (identique à l'approche employée sur le fluage réversible déviatorique pour le modèle BETON_UMLV_FP [R7.01.06]). Cette approche est rendue possible par le choix commun d'une chaîne de Burger pour représenter les déformations sphérique et déviatorique. La non linéarité introduite sur les corps de Maxwell ne permet plus par la suite de suivre le même schéma d'intégration. Une approche implicite via un schéma de Newton local sera mis en place pour résoudre l'ensemble des équations.

La première hypothèse consiste à linéariser au premier ordre le produit des contraintes ($\underline{\sigma}$) et de l'humidité relative (h) sur l'intervalle temporel de résolution $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\underline{\sigma}(t) \cdot h(t) \approx \underline{\sigma}_n \cdot h_n + \frac{t-t_n}{\Delta t_n} (\Delta \underline{\sigma}_n \cdot h_n + \underline{\sigma}_n \cdot \Delta h_n) \quad \text{éq 4.1}$$

avec $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, $\Delta \underline{\sigma}_n = \underline{\sigma}_{n+1} - \underline{\sigma}_n$ et $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$.

Les indices portés sur les contraintes et l'humidité relative suivent la règle d'écriture suivante : $h_n = h_{t_n}$.

4.1 Discrétisation des équations du fluage réversible

Les distinctions partie sphérique et déviatorique ne sont plus portées sur les équations suivantes, mais la démarche est identique.

L'expression de l'étage de Kelvin Voigt prend la forme suivante, où la visco-élasticité tensorielle se traite de façon analogue à l'élasticité [bib8] :

$$\eta_r \cdot \dot{\varepsilon}_r^f(t) + k_r \cdot \varepsilon_r^f(t) = h(t) \cdot \sigma(t) \quad \text{éq 4.1-1}$$

avec :

- η_r la viscosité reliant les contraintes aux vitesses de déformation réversibles, $\dot{\varepsilon}_r^f(t)$
- k_r la rigidité liée aux déformations réversibles $\varepsilon_r^f(t)$
- $h(t)$ l'humidité relative du milieu
- $\sigma(t)$ l'état de contraintes à l'instant t .

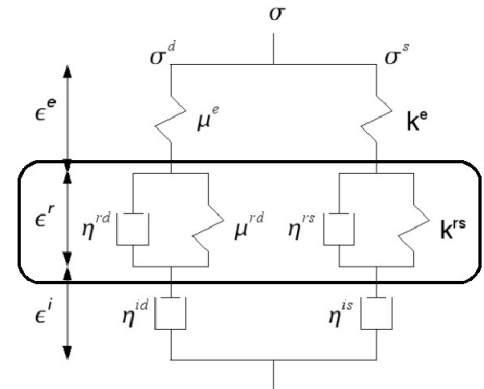


Figure 4.1-1: Étage de Kelvin Voigt du modèle BETON_BURGER_FP

Après s'être assuré de la stricte positivité des paramètres η_r et k_r , on peut résoudre l'équation différentielle homogène suivante :

$$\eta_r \cdot \dot{\varepsilon}_r^f(t) + k_r \cdot \varepsilon_r^f(t) = 0 \quad \text{éq 4.1-2}$$

La solution homogène est de la forme : $\varepsilon_r^{fh}(t) = \alpha_r \cdot \exp(-k_r / \eta_r \cdot t)$

La solution particulière de l'équation différentielle d'ordre 1 présentée ci-dessus prend la forme suivante : $\varepsilon_r^{fp}(t) = \beta_r + \gamma_r \cdot (t - t_n)$.

L'expression finale des déformations de fluage réversible se présente comme suit :

$$\varepsilon_r^f(t) = \varepsilon_r^{fh}(t) + \varepsilon_r^{fp}(t) = \alpha_r \cdot \exp(-k_r / \eta_r \cdot t) + \beta_r + \gamma_r \cdot (t - t_n)$$

L'expression des paramètres α_r , β_r et γ_r est la suivante :

$$\begin{cases} \alpha_r &= \exp(-k_r/\eta_r \cdot t_n) \cdot (\varepsilon_{r,n} - \beta_r) \\ \beta &= \frac{1}{k_r} \cdot \left[\sigma_n \cdot h_n - \frac{\eta_r}{k_r} \cdot \left(\frac{\Delta \sigma_n \cdot h_n + \sigma_n \cdot \Delta h_n}{\Delta t_n} \right) \right] \\ \gamma_r &= \frac{1}{k_r} \cdot \left[\frac{\Delta \sigma_n \cdot h_n + \sigma_n \cdot \Delta h_n}{\Delta t_n} \right] \end{cases} \quad \text{éq. 4.1-3}$$

Il est à présent possible d'exprimer la variation de la déformation de fluage propre réversible sous la forme :

$$\Delta \underline{\varepsilon}_r^f = \underline{a}_n^{fr} + b_n^{fr} \cdot \underline{\varepsilon}_n + c_n^{fr} \cdot \underline{\varepsilon}_{n+1} \quad \text{éq. 4.1-4}$$

Les expressions attendues de \underline{a}_n^{fr} , b_n^{fr} et c_n^{fr} sont les suivantes et référencées comme étant [éq. 4.1-3] :

$$\begin{cases} \underline{a}_n^{fr} &= (\exp(-k_r/\eta_r \cdot \Delta t_n) - 1) \cdot \underline{\varepsilon}_{r,n} \\ b_n^{fr} &= \frac{1}{k_r} \cdot \left[\left(-\left(\frac{2 \cdot \eta_r}{k_r \cdot \Delta t_n} + 1 \right) \cdot h_n + \frac{\eta_r}{k_r \cdot \Delta t_n} \cdot h_{n+1} \right) \cdot \exp\left(-\frac{k_r \cdot \Delta t_n}{\eta_r}\right) + \left(\left(\frac{2 \cdot \eta_r}{k_r \cdot \Delta t_n} - 1 \right) h_n - \frac{\eta_r \cdot h_{n+1}}{k_r \cdot \Delta t_n} + h_{n+1} \right) \right] \\ c_n^{fr} &= \frac{h_n}{k_r} \cdot \left(\frac{\eta_r}{k_r \cdot \Delta t_n} \cdot \exp\left(-\frac{k_r \cdot \Delta t_n}{\eta_r}\right) - \frac{\eta_r}{k_r \cdot \Delta t_n} + 1 \right) \end{cases}$$

4.2 Discrétisation des équations du fluage irréversible

L'expression des déformations issues des corps de Maxwell non linéaires est décrite par la suite sous forme tensorielle. Ce changement est dû à l'emploi de la norme du tenseur des déformations irréversibles de fluage propre. Cette grandeur contrôle la non linéarité introduite dans la définition du corps de Maxwell [éq. 3.3-1].

Lors de l'intégration de ces équations, une évolution linéaire des déformations sur l'intervalle de temps est considérée. Soit \underline{n} le tenseur directionnel de l'incrément de déformations défini tel que :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^f(t) = \underline{n} \cdot \frac{d \|\underline{\varepsilon}_i^f\|}{dt} \quad \text{éq. 4.2-1}$$

A partir de [éq. 3.3-1], on peut alors écrire le développement suivant :

$$\underline{n}_i \cdot \frac{d \|\underline{\varepsilon}_i^f\|}{dt} = h_n \cdot \underline{\varepsilon}_n + \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \cdot (\Delta \underline{\varepsilon}_n \cdot h_n + \underline{\varepsilon}_n \cdot \Delta h_n) \quad \text{éq. 4.2-2}$$

avec $\underline{n}_i = \underline{n}_{i,0} \cdot \exp\left(\frac{\|\underline{\varepsilon}_m^f\|}{\kappa}\right)$.

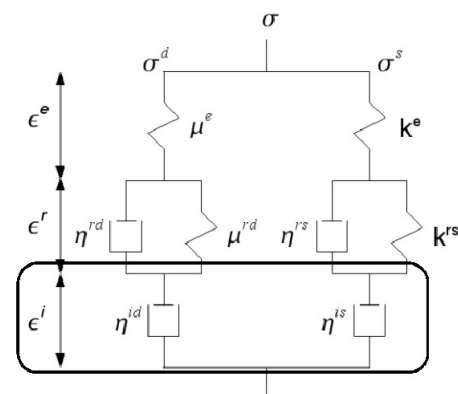


Figure 4.2-1: Corps de Maxwell du modèle BETON_BURGER_FP

On peut alors réaliser l'intégration des termes de gauche et de droite de l'égalité précédente suivant deux approches. La première considère que le chargement appliqué durant cet intervalle conduit à une décharge locale. La résolution de cette équation est alors présentée à l'équation 4.2-6. La deuxième voie d'intégration du fluage irréversible voit une évolution du terme $\|\underline{\underline{\varepsilon}}_m^f\|$ sous le chargement imposé :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\eta}}_{i,0} : \underline{\underline{\eta}} \int_{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_i^f\|}^{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n+1}^f\|} \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_i^f\|}{\kappa}\right) d\|\underline{\underline{\varepsilon}}_i^f\| &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(h_n \cdot \underline{\underline{\sigma}}_n + \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \cdot (\Delta \underline{\underline{\sigma}}_n \cdot h_n + \underline{\underline{\sigma}}_n \cdot \Delta h_n) \right) dt \\ \underline{\underline{\eta}}_{i,0} : \underline{\underline{\eta}} \left[\kappa \cdot \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_i^f\|}{\kappa}\right) \right]_{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_i^f\|}^{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n+1}^f\|} &= \left[\left(h_n \cdot \underline{\underline{\sigma}}_n \cdot t + \frac{(t-t_n)^2}{2 \cdot \Delta t_n} \cdot (\Delta \underline{\underline{\sigma}}_n \cdot h_n + \underline{\underline{\sigma}}_n \cdot \Delta h_n) \right) \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \\ \kappa \underline{\underline{\eta}}_{i,0} : \underline{\underline{\eta}} \left[\exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n+1}^f\|}{\kappa}\right) - \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\|}{\kappa}\right) \right] &= \Delta t_n \cdot \left[h_n \cdot \underline{\underline{\sigma}}_n + \frac{1}{2} \cdot (\Delta \underline{\underline{\sigma}}_n \cdot h_n + \underline{\underline{\sigma}}_n \cdot \Delta h_n) \right] \end{aligned}$$

Puis,

$$\kappa \underline{\underline{\eta}}_{i,0} : \underline{\underline{\eta}} \left[\exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n+1}^f\|}{\kappa}\right) - \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\|}{\kappa}\right) \right] = \frac{\Delta t_n}{2} \cdot [h_n \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} + h_{n+1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_n] \quad \text{éq. 4.2-3}$$

La relation éq.4.2-3 fera partie du système d'équations non linéaires à résoudre par la méthode de Newton locale.

Par la suite, en utilisant la relation $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^f = \Delta \|\underline{\underline{\varepsilon}}_i^f\| \cdot \underline{\underline{\eta}}$, on obtient l'expression suivante :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f = \frac{\Delta \|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\| \cdot \Delta t_n \cdot [h_n \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} + h_{n+1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_n]}{2 \cdot \kappa \underline{\underline{\eta}}_{i,0} \cdot \left[\exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n+1}^f\|}{\kappa}\right) - \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\|}{\kappa}\right) \right]} \quad \text{éq. 4.2-4}$$

L'écriture de cette relation sous la forme $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^f = \underline{\underline{a}}_n^{fi} + b_n^{fi} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_n + c_n^{fi} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ est possible. Le terme tensoriel $\underline{\underline{a}}_n^{fi}$ est nul et l'expression de b_n^{fi} et c_n^{fi} contient la valeur $\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n+1}^f\|$, quantité connue seulement après l'intégration locale du modèle :

$$\begin{cases} b_n^{fi} = \frac{(\eta_{i,0})^{-1} \cdot \Delta \|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\| \cdot \Delta t_n \cdot h_{n+1}}{2 \cdot \kappa \cdot \left[\exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n+1}^f\|}{\kappa}\right) - \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\|}{\kappa}\right) \right]} \\ c_n^{fi} = \frac{(\eta_{i,0})^{-1} \cdot \Delta \|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\| \cdot \Delta t_n \cdot h_n}{2 \cdot \kappa \cdot \left[\exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n+1}^f\|}{\kappa}\right) - \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\|}{\kappa}\right) \right]} \end{cases} \quad \text{éq. 4.2-5}$$

Le terme $\eta_{i,0}$ apparaît sous forme d'un scalaire, car après décomposition en partie sphérique et déviatorique des tenseurs de contraintes et déformations, le terme de viscosité se réduit à cette expression. La forme présentée ci-dessus est générique et ne distingue pas les deux parties.

L'expression du corps de Maxwell non linéaire ne permet pas d'obtenir une relation du type $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^f = \underline{\underline{a}}_n^{fi} + b_n^{fi} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_n + c_n^{fi} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}$, avec $\underline{\underline{a}}_n^{fi}$, b_n^{fi} et c_n^{fi} construits uniquement à partir de quantités définies à l'instant t_n . Cet aspect modifie considérablement le schéma d'intégration du modèle en comparaison de l'approche établie pour le modèle BETON_UMLV_FP [R7.01.06]. Dès lors, l'intégration du modèle sous cette forme conduit à considérer la résolution d'un système d'équations non linéaires par la méthode de Newton (§ 11).

Pour simplifier et retrouver une approche similaire au modèle BETON_UMLV_FP, on peut linéariser au 1^{er} ordre autour de leur position initiale les termes en exponentielle. Sous ces hypothèses, l'évaluation des déformations de fluage irréversibles suivant une formule du type $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_i^f = \underline{\underline{a}}_n^{fi} + b_n^{fi} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_n + c_n^{fi} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}$ est possible. L'équation à considérer devient alors :

$$\underline{\underline{n}}_{i,0} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f = \exp\left(\frac{-\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\|}{\kappa}\right) \cdot \frac{\Delta t_n}{2} \cdot [h_n \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} + h_{n+1} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_n] \quad \text{éq. 4.2-6}$$

L'expression des termes $\underline{\underline{a}}_n^{fi}$, b_n^{fi} et c_n^{fi} est générique et doit être déclinée aux parties sphérique et déviatorique des tenseurs de déformations et de contraintes. Sous cette forme, la viscosité tensorielle se traite de façon analogue à l'élasticité [bib8] :

$$\begin{cases} \underline{\underline{a}}_n^{fi} &= 0 \\ b_n^{fi} &= \frac{(\eta_{i,0})^{-1} \cdot \Delta t_n \cdot h_{n+1}}{2 \cdot \exp(\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\|/\kappa)} \\ c_n^{fi} &= \frac{(\eta_{i,0})^{-1} \cdot \Delta t_n \cdot h_n}{2 \cdot \exp(\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{i,n}^f\|/\kappa)} \end{cases} \quad \text{éq. 4.2-7}$$

Cette linéarisation des équations sera utilisée comme prédicteur d'Euler pour la méthode de résolution locale de Newton.

4.3 Discrétisation des équations du fluage de dessiccation

Les termes liés à la prise en compte du fluage de dessiccation se décomposent suivant le même concept que les termes de fluage propre réversible [bib3] :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{fdess} = \underline{\underline{a}}_n^{fdess} + b_n^{fdess} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_n + c_n^{fdess} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} \quad \text{éq. 4.3-1}$$

L'expression des différents termes est la suivante :

$$\begin{cases} \underline{\underline{a}}_n^{fdess} &= 0 \\ b_n^{fdess} &= \frac{\Delta h_n}{2 \cdot \eta^{fd}} \\ c_n^{fdess} &= \frac{\Delta h_n}{2 \cdot \eta^{fd}} \end{cases} \quad \text{éq. 4.3-2}$$

5 Schéma général d'intégration locale

Le schéma d'intégration locale choisi pour l'implantation du modèle `BETON_BURGER_FP` est entièrement implicite et formulé sur le problème incrémental. Il utilise une prédiction élastique puis des itérations de correction, si nécessaire. Il a pour but de produire, un incrément de déformations $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ étant fourni, la valeur des contraintes et variables internes à l'instant t_{n+1} .

Code-Aster ne propose pas actuellement d'intégration explicite pour ce modèle.

5.1 Phase de prédiction

La phase de prédiction « élastique » est basée sur l'approche utilisée par le schéma employé pour le modèle `BETON_UMLV_FP`. En effet, la prédiction est établie à partir de la linéarisation au 1er ordre des termes de déformations irréversibles [éq 4.2-7]. L'algorithme est basé sur la capacité de décomposer les étages de Kelvin Voigt et corps de Maxwell non linéaires sous la forme $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^f = \underline{\underline{a}}_n^f + b_n^f \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_n + c_n^f \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}$, où les termes $\underline{\underline{a}}_n^f$, b_n^f et c_n^f dépendent uniquement de quantités définies à l'instant t_n . L'évaluation des états de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ est obtenue par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \frac{\left[\underline{\underline{E}}(t_{n+1}) : \left(\underline{\underline{E}}(t_n) \right)^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}_n \right] + \underline{\underline{E}}(t_{n+1}) : \left[\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{a}}_n - b_n : \underline{\underline{\varepsilon}}_n \right]}{\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{E}}(t_{n+1}) : \underline{\underline{\underline{c}}}_n} \quad \text{éq. 5.1-1}$$

La valeur obtenue des contraintes permet ensuite de définir une première estimation pour les déformations de fluage propre et de dessiccation.

La norme de la différence entre les termes de gauche et de droite de l'équation [éq. 4.2-3] est testée par rapport à une valeur de convergence précisée par l'utilisateur [`RESI_INTE_REL`]. Si cette différence est inférieure à la valeur attendue par l'utilisateur, on se restreint à cette évaluation. Dans le cas contraire, le processus de phase de correction « plastique » est engagé.

De même que précisé ci-dessus, si le chargement ne conduit pas une augmentation de $\|\underline{\underline{\varepsilon}}_m^{fi}\|$, alors le prédicteur obtenu (éq. 5.1-1) est la solution exacte de l'équation à résoudre.

5.2 Phase de correction

Les inconnues du système d'équations non linéaires sont les contraintes, $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ et les déformations irréversibles totales $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{fi}$ (sphérique et déviatorique). Le vecteur des inconnues comporte donc au maximum pour des modélisations 3D 12 inconnues (6 par tenseur).

Les équations non linéaires à résoudre sont les suivantes :

- Décomposition des déformations totales (6 équations scalaires) (E1) :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \left(\underline{\underline{E}}(t_{n+1}) \right)^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} + \left(\underline{\underline{E}}(t_n) \right)^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}_n - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{fr}(\underline{\underline{\sigma}}_n, \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}) - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{fi} - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{fdes}(\underline{\underline{\sigma}}_n, \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}) = \underline{\underline{0}} \quad \text{éq.5.2-1}$$

- Corps de Maxwell non linéaire (6 équations scalaires) (E2) :

$$\kappa \underline{\underline{n}}_{i,0} : \underline{\underline{n}} \left[\exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{fi}\|}{\kappa}\right) - \exp\left(\frac{\|\underline{\underline{\varepsilon}}_{n,n}^{fi}\|}{\kappa}\right) \right] - \frac{\Delta t}{2} \cdot [h_n : \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} + h_{n+1} : \underline{\underline{\sigma}}_n] = \underline{\underline{0}} \quad \text{éq.5.2-2}$$

Ces équations constituent un système carré $R(\Delta Y)$, où les inconnues sont $\Delta Y = (\Delta \underline{\underline{\sigma}}, \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{fi})$.

A l'itération j de la boucle de correction locale de Newton, on résout l'équation matricielle suivante :

$$\frac{dR(\Delta Y^j)}{d \Delta Y^j} \cdot \delta(\Delta Y^{j+1}) = -R(\Delta Y^j) \quad \text{éq. 5.2-3}$$

La matrice jacobienne $\frac{dR(\Delta Y^j)}{d \Delta Y^j}$, non symétrique, se construit de la façon suivante :

$$\frac{dR(\Delta Y^j)}{d \Delta Y^j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E1}{\partial \sigma_{n+1}^j} & \frac{\partial E1}{\partial \varepsilon_{n+1}^{fi,j}} \\ \frac{\partial E2}{\partial \sigma_{n+1}^j} & \frac{\partial E2}{\partial \varepsilon_{n+1}^{fi,j}} \end{bmatrix}, \text{ soit } \frac{dR(\Delta Y^j)}{d \Delta Y^j} = \begin{bmatrix} -\left[\left(\underline{E}(t_{n+1}) \right)^{-1} + \underline{c}_n^{fr} + \underline{c}_n^{fdess} \right] & -\underline{1} \\ \frac{-\Delta t}{2} \cdot h_n \cdot \underline{1} & \frac{\partial E2}{\partial \varepsilon_{n+1}^{fi,j}} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\frac{\partial E2}{\partial \varepsilon_{n+1}^{fi,j}} = \kappa \cdot \underline{n}_{i,0} : \left[\frac{\underline{n}}{\kappa} \otimes \frac{\underline{\varepsilon}_{n+1}^{fi,j}}{\|\underline{\varepsilon}_{n+1}^{fi,j}\|} \cdot \exp\left(\frac{\|\underline{\varepsilon}_{n+1}^{fi,j}\|}{\kappa}\right) + \left(\exp\left(\frac{\|\underline{\varepsilon}_{n+1}^{fi,j}\|}{\kappa}\right) - \exp\left(\frac{\|\underline{\varepsilon}_{m,n}\|}{\kappa}\right) \right) \cdot \frac{\|\Delta \underline{\varepsilon}_n^{fi}\| - \Delta \underline{\varepsilon}_n^{fi} \otimes \frac{\Delta \underline{\varepsilon}_n^{fi}}{\|\Delta \underline{\varepsilon}_n^{fi}\|}}{\|\Delta \underline{\varepsilon}_n^{fi}\|^2} \right]$$

Dans le but d'uniformiser les échelles entre les différentes équations à résoudre, on fait le choix de mettre à l'échelle des déformations l'équation E2 portant sur les déformations de fluage propre irréversible. On applique pour cela l'inverse du coefficient ETA_IS ($\eta_{i,0}^s$) paramètre matériau. Ce choix permet d'assurer une convergence plus uniforme sur l'ensemble du système.

La convergence est réputée acquise dès lors que $\|R(\Delta Y^{j+1})\| < \text{RESI_INTE_RELA}$.

5.3 Phase de mise à jour

La mise à jour du vecteur solution est réalisée selon l'opération suivante :

$$\Delta Y = \Delta Y^{j+1} = \Delta Y^j + \delta \Delta Y^{j+1} \quad \text{éq. 5.3-1}$$

Cette phase de mise à jour consiste à reporter l'évolution des contraintes, déformations de fluage réversibles, irréversibles et de dessiccation.

6 Opérateur tangent consistant

L'opérateur tangent peut être obtenu directement à partir du système d'équations non linéaires précédent. En effet, le système formé des équations du modèle à convergence est vérifié en fin d'incrément. Pour une petite variation de R , en considérant cette fois l'accroissement de déformation totale $\Delta \varepsilon_n$ comme variable et non comme paramètre, le système reste à l'équilibre et on vérifie $dR=0$, c'est à dire :

$$\frac{\partial R}{\partial \underline{\sigma}} \delta \underline{\sigma} + \frac{\partial R}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} \delta \Delta \underline{\varepsilon}_n + \frac{\partial R}{\partial \underline{\varepsilon}_i^f} \delta \underline{\varepsilon}_i^f = 0 \quad \text{éq. 6-1}$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial R}{\partial Y} \delta Y = X, \text{ avec } Y = \begin{bmatrix} \sigma \\ \varepsilon_i^f \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} \delta \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{éq. 6-2}$$

En écrivant la matrice jacobienne sous la forme :

$$J \cdot \delta Y = \begin{bmatrix} Y_0 & Y_1 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \sigma \\ \delta \varepsilon_i^f \end{bmatrix} \quad \text{éq. 6-3}$$

En opérant par éliminations et substitutions successives, l'opérateur tangent recherché peut s'écrire directement :

$$\begin{bmatrix} \delta \Delta \sigma \\ \delta \Delta \varepsilon_n \end{bmatrix} = \left[Y_0 - Y_1 \cdot (Y_3)^{-1} Y_2 \right]^{-1} \quad \text{éq. 6-4}$$

7 Description des variables internes

Le tableau suivant donne la correspondance entre le numéro des variables internes accessibles par Code_Aster et leur description :

Numéro de la variable	Description
1	Déformation sphérique réversible
2	Déformation sphérique irréversible
3	Déformation déviatorique réversible, composante 11
4	Déformation déviatorique irréversible, composante 11
5	Déformation déviatorique réversible, composante 22
6	Déformation déviatorique irréversible, composante 22
7	Déformation déviatorique réversible, composante 33
8	Déformation déviatorique irréversible, composante 33
9	Fluage de dessiccation, composante 11
10	Fluage de dessiccation, composante 22
11	Fluage de dessiccation, composante 33
12	Déformation déviatorique réversible, composante 12
13	Déformation déviatorique irréversible, composante 12
14	Déformation déviatorique réversible, composante 13
15	Déformation déviatorique irréversible, composante 13
16	Déformation déviatorique réversible, composante 23
17	Déformation déviatorique irréversible, composante 23
18	Fluage de dessiccation, composante 12
19	Fluage de dessiccation, composante 13
20	Fluage de dessiccation, composante 23
21	Déformation équivalente irréversible maximale

8 Notations

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ tenseur des déformations totales

$\underline{\underline{\varepsilon}}^f$ tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ tenseur des déformations élastiques

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fs} \mathbf{1}$ partie sphérique du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}_r^{fs} \mathbf{1}$ partie sphérique réversible du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{fs} \mathbf{1}$ partie sphérique irréversible du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}$ partie déviatorique du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}_r^{fd}$ partie déviatorique réversible du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{fd}$ partie déviatorique irréversible du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fi}$ tenseur complet des déformations de fluage irréversible

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fdess}$ tenseur des déformations de fluage de dessiccation

$\underline{\underline{\sigma}}$ tenseur des contraintes totales

$\underline{\underline{\sigma}}^s \mathbf{1}$ partie sphérique du tenseur des contraintes

$\underline{\underline{\sigma}}^d$ partie déviatorique du tenseur des contraintes

h humidité relative interne

k_r^s rigidité apparente associée au Kelvin Voigt sphérique

k_r^d rigidité apparente associée au Kelvin Voigt déviatorique

η_i^s viscosité apparente associée aux déformations irréversibles sphériques

η_r^s viscosité apparente associée au Kelvin Voigt sphérique

η_i^d viscosité apparente associée aux déformations irréversibles déviatoriques

η_r^d viscosité associée au Kelvin Voigt déviatorique

$x, \underline{x}, \underline{\underline{x}}$ désignent respectivement un scalaire, un vecteur et un tenseur d'ordre 2.

$x_n, x_{n+1}, \Delta x_n$ désignent respectivement la valeur de la quantité x au temps t_n , au temps t_{n+1} et la variation de x pendant l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$.

9 Bibliographie

- 1) BENBOUDJEMA F. : Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux bâtiments réacteurs de centrales nucléaires, Mémoire de D.E.A. Matériaux Avancés – Ingénierie des Structures et des Enveloppes, 38 p. (+ annexes) (1999).
- 2) BENBOUDJEMA F., MEFTAH F., HEINFLING G., LE PAPE Y. : Etude numérique et analytique de la partie sphérique du modèle de fluage propre UMLV pour le béton, note technique HT-25/02/040/A, 56 p (2002).
- 3) BENBOUDJEMA F., MEFTAH F., TORRENTI J.M., LE PAPE Y. : Algorithme du modèle de fluage propre et de dessiccation UMLV couplé à un modèle élastique, note technique HT-25/02/050/A, 68 p (2002).
- 4) GRANGER L. : Comportement différée du béton dans les enceintes de centrale nucléaire : analyse et modélisation, Thèse de Doctorat de l'ENPC (1995).
- 5) RAZAKANAIVO A. : Relation de comportement de Granger pour le fluage propre du béton, Documentation Code_Aster [R7.01.01], 16 p (2001).
- 6) SELLIER A., BUFFO-LACARRIERE L.: Vers une modélisation simple et unifiée du fluage propre, du retrait et du fluage en dessiccation du béton, EJECE, volume 13(10), pages 1161-1182, 2009.
- 7) ACKER P. : Sur les origines du retrait et du fluage du béton. Revue Française de Génie Civil, vol.7, n°6, p.761-776.
- 8) MANDEL, J : Cours de Mécanique des Milieux Continus. Tome II, Mécanique des solides. Gauthier-Villard Éditeur, 837 pages, 1966.

10 Fonctionnalités et vérification

Ce document concerne la loi de comportement BETON_BURGER_FP (mot clé COMP_INCR de STAT_NON_LINE) et son matériau associé BETON_BURGER_FP (commande DEFI_MATERIAU).

Cette loi de comportement est vérifiée par les cas tests suivants :

SSNV163	Calcul de fluage propre	[V6.04.163]
SSNV174	Prise en compte du retrait dans les modèles BETON_UMLV_FP et BETON_BURGER_FP	[V6.04.174]
SSNV180	Prise en compte de la dilatation thermique et du fluage de dessiccation dans les modèles BETON_UMLV_FP et BETON_BURGER_FP	[V6.04.180]
SSNV181	Vérification de la bonne prise en compte du cisaillement dans les modèles BETON_UMLV_FP et BETON_BURGER_FP	[V6.04.181]
COMP003	Test de comportements spécifiques aux bétons. Simulation en un point matériel	V6.07.103
COMP011	Validation thermo-mécanique des lois pour le béton	V6.07.111

11 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
11.2	A. Foucault EDF/R&D/AMA	Texte initial

