Éléments finis en acoustique

Résumé :

Ce document décrit en acoustique stationnaire à basse fréquence les équations utilisées, les formulations variationnelles qui en découlent ainsi que la traduction correspondante en éléments finis à l'aide d'une formulation classique à une inconnue p (pression acoustique). Ce document correspond à `PHENOMENE='ACOUSTIQUE'`.

Table des matières

1 Introduction

Une option de modélisation a été développée dans *Code_Aster*, permettant d'étudier la propagation acoustique stationnaire à basse fréquence, en milieu clos, pour des domaines de propagation à topologie complexe, c'est-à-dire y résoudre dans les conditions citées l'équation de Helmholtz.
Pour connaître les chemins de propagation de l'énergie dans le fluide, l'acousticien dispose de l'intensité acoustique active I :

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[p\,v^*\right] \quad (1)$$

Et de l'intensité acoustique réactive J :

$$J=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[p\,v^*\right] \quad (2)$$

Où v^* désigne le conjugué complexe de la vitesse vibratoire. La connaissance de ces grandeurs apporte un complément d'information très important dans la résolution de problèmes de toutes sortes, par exemple la mesure des puissances rayonnées par les machines, la reconnaissance et la localisation des sources.

2 Équations et conditions aux limites du problème

2.1 Équations et conditions aux limites

L'équation à résoudre est l'équation de Helmholtz [bib2] :

$$(\Delta+k^2)\, p=s \tag{3}$$

p est une grandeur complexe désignant la pression acoustique et s, également complexe, représente les termes sources du problème. Le paramètre k désigne le nombre d'onde du problème traité ; il peut être complexe ou réel, suivant que la propagation s'effectue ou non dans un domaine poreux [bib6] :

$$k=\frac{\omega}{c} \tag{4}$$

Avec c désignant la célérité du son, qui peut être complexe dans le cas d'une propagation en milieu poreux et ω est un réel dans tous les cas, qui désigne la pulsation telle que :

$$\omega=2\pi f \tag{5}$$

f est la fréquence de travail du problème harmonique. Nous représentons sur la figure 2.1-1 le domaine confiné quelconque où s'applique l'équation de Helmholtz (3) et les conditions aux frontières. Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ régulière, partitionnée en $\partial\Omega_v$ et $\partial\Omega_z$:

$$\partial\Omega=\partial\Omega_v\cup\partial\Omega_z \tag{6}$$

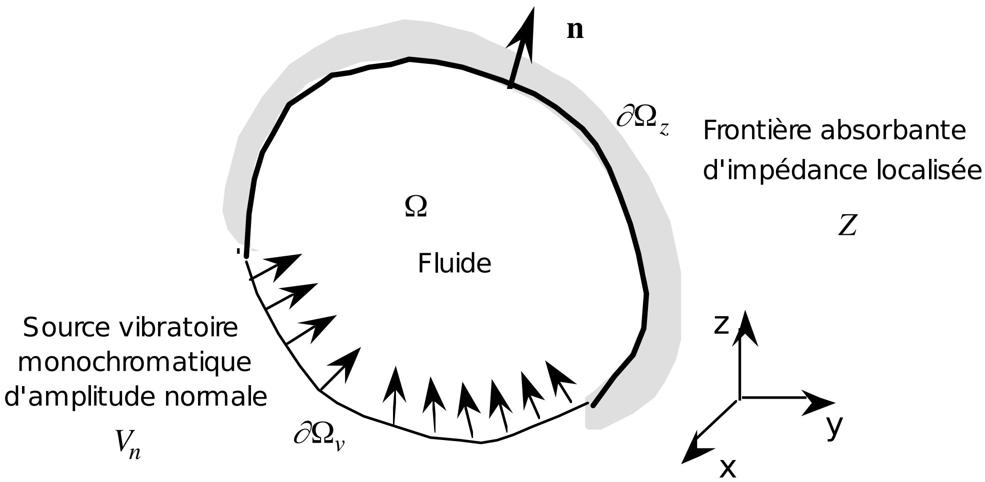

Figure 2.1-1: Configuration du problème

L'équation (3) est à résoudre dans un domaine clos Ω. Les conditions aux limites à prendre en compte sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω s'expriment sous leur forme la plus générale comme :

$$\alpha\, p+\beta\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}=\gamma \tag{7}$$

Classiquement, $\partial/\partial\boldsymbol{n}$ désigne l'opérateur de dérivée normale. α, β et γ sont des opérateurs complexes, qui peuvent être des scalaires, ou des opérateurs intégraux suivant que la frontière d'application de la condition à la limite est à réaction locale ou à réaction non locale (cas de l'interaction fluide-structure).

Les développements actuellement réalisés dans *Code_Aster* concernent uniquement des conditions à la limite à réaction locale, pour lesquelles α, β et γ sont des scalaires ; les cas spécifiables sont les suivants :

- Le cas $\alpha=0$, $\beta\neq0$ et $\gamma\neq0$ désigne une frontière du domaine à vitesse vibratoire imposée. En effet, il existe une relation reliant le gradient de pression acoustique complexe à la vitesse vibratoire particulaire complexe. C'est-à-dire :

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = -j\omega\rho_0 V_n \tag{8}$$

Où ρ_0 désigne la masse volumique du fluide considéré, et on impose V_n, la vitesse vibratoire normale à la paroi ($V_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ où $\boldsymbol{n}$ désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$).

- Le cas $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma = 0$ concerne une frontière à impédance acoustique Z imposée. L'impédance acoustique Z est définie comme le rapport de la pression à la vitesse vibratoire particulaire au voisinage de la paroi à impédance imposée :

$$Z = \frac{p}{V_n} \tag{9}$$

- Le cas $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ et $\gamma \neq 0$ représente le cas où l'on impose la pression acoustique p à une frontière (le plus souvent $\gamma = 0$, correspondant à $p = 0$).

3 Formulation en pression

3.1 Expression mathématique du problème

On utilise la procédure standard visant à poser le problème aux éléments finis classiques. On suppose la solution du problème suffisamment régulière, $p \in H^2(\Omega)$. On multiplie l'équation de Helmoltz (3) sans terme source s par une fonction test φ. On intègre sur Ω et on utilise la formule de Green. D'après (6), la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω, se subdivise en deux zones, une zone à vitesse vibratoire imposée, $\partial\Omega_v$ et une zone à impédance acoustique imposée, $\partial\Omega_Z$. L'équation obtenue peut être réécrite sous la forme :

$$\int_\Omega \boldsymbol{grad}(p) \cdot \boldsymbol{grad}(\varphi) dV - \int_\Omega \frac{\omega^2}{c^2} p \varphi dV + j \int_{\partial\Omega_Z} \frac{\rho_0 \omega}{Z} p \varphi dS + j \int_{\partial\Omega_v} \rho_0 \omega V_n \varphi dS = 0 \quad (10)$$

Où dV représente un élément de volume différentiel dans Ω et dS représente un élément de surface sur $\partial\Omega$. La vitesse vibratoire particulaire est ensuite déterminée par :

$$\boldsymbol{v} = \frac{j}{\rho_0 \omega} \boldsymbol{grad}(p) \quad (11)$$

3.2 Discrétisation par éléments finis

Dans le cas des éléments finis classiques, les intégrales élémentaires sont $\boldsymbol{K}^e$, $\boldsymbol{M}^e$, $\boldsymbol{C}^e$ et $\boldsymbol{S}^e$ suivant la décomposition indiquée par (14) ($\boldsymbol{K}^e$ est la matrice de rigidité, $\boldsymbol{M}^e$ la matrice de masse, $\boldsymbol{C}^e$ la matrice d'amortissement et $\boldsymbol{S}^e$ le vecteur source). Deux d'entre elles proviennent d'intégrales volumiques, les deux autres sont le résultat d'intégrales respectivement sur une surface vibrante et sur une surface à impédance imposée. On supposera que les coordonnées globales d'un élément peuvent s'écrire grâce à la donnée de m fonctions de forme élémentaires H_i :

$$\boldsymbol{OM}^e = \sum_{i=1}^m N_i \boldsymbol{OM}_i^e \quad (12)$$

On se donne en outre, des fonctions de base N_i, pour décrire la pression élémentaire. La pression à l'intérieur d'un élément pourra s'écrire :

$$p^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^m N_i p_i^e \quad (13)$$

Où p_i^e est la pression au nœud i de l'élément e. Dans le cas des éléments finis isoparamétriques, les fonctions de base N_i sont égales aux fonctions de forme H_i. Sur chaque élément du domaine, le problème aux éléments finis en pression s'écrit :

$$\left(\boldsymbol{K}^e - \omega^2 \boldsymbol{M}^e + j \omega \boldsymbol{C}^e\right) \boldsymbol{p}^e = -j \omega \boldsymbol{S}^e \quad (14)$$

Où $\boldsymbol{p}^e$ est le vecteur-colonne des valeurs nodales de la pression sur l'élément.

3.2.1 La matrice de rigidité

La matrice de rigidité $\boldsymbol{K}^e$ correspond au calcul du premier terme de (10), soit :

$$\int_{\Omega^e} \left(\boldsymbol{grad}(p) \cdot \boldsymbol{grad}(\varphi)\right) dV \quad (15)$$

Elle admet comme terme général :

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\nabla N_i \nabla N_j\right) . dV \quad (16)$$

3.2.2 La matrice de masse

La matrice de rigidité $\boldsymbol{M}^e$ correspond au calcul du deuxième terme de (10), soit :

$$M_{ij}^{e}=\int_{\Omega^e}\frac{1}{c^2}\,p\,\varphi\,dV \tag{17}$$

Elle admet comme terme général :

$$M_{ij}^{e}=\int_{\Omega^e}\frac{1}{c^2}N_i N_j\,.\,dV \tag{18}$$

3.2.3 La matrice d'amortissement

La matrice d'amortissement $\boldsymbol{C}^e$ correspond au calcul du troisième terme de (10), soit :

$$C_{ij}^{e}=\int_{\partial\Omega_Z^e}\frac{\rho_0}{Z}\,p\,\varphi\,dS \tag{19}$$

Elle admet comme terme général :

$$C_{ij}^{e}=\int_{\partial\Omega_Z^e}\frac{\rho_0}{Z}N_i N_j\,dS \tag{20}$$

3.2.4 Le vecteur source

Le vecteur source $\boldsymbol{S}^e$ correspond au calcul du dernier terme de (10), soit :

$$S_i^{e}=\int_{\partial\Omega_v}\rho_0 V_n\varphi\,dS=0 \tag{21}$$

Il admet comme terme général :

$$S_i^{e}=\int_{\partial\Omega_v^e}\rho_0 V_n N_i\,dS \tag{22}$$

4 Commandes spécifiques à la modélisation acoustique

Lors d'une étude par modélisation en éléments finis acoustiques avec *Code_Aster* on utilise des commandes générales et des commandes qui sont propres à l'acoustique, ou dont les mots-clés et options sont particulières à cette discipline ; nous en présentons ci-dessous la liste.

4.1 Définition des caractéristiques des milieux de propagation

Il est nécessaire de donner la masse volumique (valeur réelle) et la célérité de propagation (valeur complexe) ; on utilise pour cela la commande `DEFI_MATERIAU` avec les mots-clés suivants :

mot-clé facteur :	`FLUIDE`	
mots-clés :	`RHO`	(masse volumique ρ_0)
	`CELE_C`	(célérité c)

Exemple :

```
air = DEFI_MATERIAU(FLUIDE=_F(RHO= 1.3, CELE_C = ('RI',343.0,0.,))
```

Dans ce cas : $\rho_0 = 343$ est réel (la partie imaginaire est nulle)

4.2 Conditions aux limites

On doit affecter des valeurs de vitesse vibratoire normale par face (ou arête en bidimensionnel) aux mailles définissant les frontières sources, et aussi des valeurs d'impédance acoustique par face (arête en bidimensionnel) aux mailles définissant les frontières à impédance imposée. On utilise la commande spécifique à l'acoustique `AFFE_CHAR_ACOU` avec les mots-clés suivants :

Mot-clé :	`MODELE`	
Mot-clé facteur :	`VITE_FACE`	
Mot-clé :	`MAILLE`	
	`GROUP_MA`	
	`VNOR`	(vitesse vibratoire normale V_n)
Mot-clé facteur :	`IMPE_FACE`	
Mot-clé :	`MAILLE`	
	`GROUP_MA`	
	`IMPE`	(impédance acoustique Z)
Mot-clé facteur :	`PRES_IMPO`	
	`NŒUD`	
	`GROUP_NO`	
	`PRES`	(pression p imposée aux nœuds)

4.3 Calcul des matrices élémentaires

Les différentes matrices élémentaires (rigidité, masse et amortissement) sont calculées par des options spécifiques. On emploie la commande `CALC_MATR_ELEM` avec le mot-clé `OPTION` pour lequel on spécifie les valeurs d'affectation possibles :

Mots-clés :	`OPTION`	`'RIGI_ACOU'`
		`'MASS_ACOU'`
		`'AMOR_ACOU'`

Remarque :

Les matrices assemblées peuvent être obtenue directement avec la macro commande `ASSEMBLAGE` et les mêmes options.

4.4 Calcul du vecteur source élémentaire

Le vecteur élémentaire est calculé par une option spécifique ; il faut obligatoirement indiquer le chargement. On emploie la commande `CALC_VECT_ELEM` avec le mot-clé `OPTION` pour lequel on spécifie la seule valeur d'affectation possible :

Mots-clés :	`OPTION`	`'CHAR_ACOU'`
Mots-clés :	`CHARGE`	

4.5 Calcul de la solution

Après assemblage des matrices et vecteur élémentaires la solution harmonique peut se calculer directement avec la commande `DYNA_VIBRA`.

4.6 Post-traitements

À partir du résultat de la résolution, des commandes de post-traitement permettent d'obtenir les champs nodaux de grandeurs acoustiques suivantes :

- Niveau L_p de pression acoustique p en dB : $L_p = 20\log_{10}\left[\frac{|p|}{2{,}0\times 10^{-5}}\right]$
- partie réelle de la pression acoustique
- partie imaginaire de la pression acoustique
- intensité acoustique active $I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[p\,v^*\right]$
- intensité acoustique réactive $J=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[p\,v^*\right]$

Ces champs sont calculés par utilisation de la commande de post-traitement `CALC_CHAMP` (le concept du résultat est du type `'ACOU_HARMO'` ou 'MODE_ACOU') avec les mots-clés `RESULTAT` et `OPTION` pour lequel on spécifie les valeurs d'affectation possibles :

Mot-clé :	`RESULTAT`		
Mot-clé :	`ACOUSTIQUE`	`'PRAC_ELNO'`	(niveau de pression en décibels) (partie réelle de la pression) (partie imaginaire de la pression)
		`'INTE_ELNO'`	(intensité active) (intensité réactive)

5 Conclusion

Une modélisation a donc été ajoutée dans *Code_Aster*, permettant de faire des calculs d'acoustique intérieure en basses fréquences pour des géométries complexes par des éléments finis acoustiques classiques. La formulation a été validée par comparaison à une solution analytique ; des cas tests sont présentés dans le manuel de validation V7 sous la codification AHLV100.

6 Bibliographie

1) A. BOUIZI : 'Mise en oeuvre d'un code de calcul d'éléments finis en vue du traitement de l'équation de Helmholtz en espace clos' - Travail de fin d'études, E.C.L. 1986.

2) A. BOUIZI : 'Analyse spectrale de l'équation de Helmholtz.' - Rapport de DEA, Ecole Centrale de Lyon, 1986.

3) A. BOUIZI : 'Eléments finis mixtes en acoustique linéaire stationnaire : Développement du code AIRMEF' - Département Acoustique. DER - EDF. HE-24 / 88.02. 1988.

4) A. BOUIZI, M. COURTADE, D. JEANDEL, E. LUZZATO, A. MIGNOT, C. SURRY. : 'Conditions de compatibilité de Brezzi-Babuska pour des méthodes d'éléments finis mixtes conformes en Mécanique et Acoustique' AUM, Actes du 8ème Congrès Français de Mécanique, Nantes, 1987.

5) A. BOUIZI, M. COURTADE, D. JEANDEL, E. LUZZATO, C. SURRY : 'Traitement de l'équation de Helmholtz par un code d'éléments finis mixtes en espace clos' GAMI, Colloque Vibrations Chocs, 1988, ECL, 1988.

6) A. BOUIZI : 'Résolution des équations de l'Acoustique linéaire par une méthode d'éléments finis mixtes'. Thèse présentée devant l'Ecole Centrale de Lyon -Spécialité : Mécanique -. Soutenue le 02/03/89.

7) C. HABASQUE : 'Validation expérimentale du code de calcul d'acoustique interne, Basse Fréquence'. Rapport de stage de DEA. ECL 1986 (+ Projet de fin d'études).

8) A.ADOBES : 'Etude numérique et expérimentale des champs d'ondes stationnaires' Rapport DER / EDF - HE-2287.22

9) F. STIFKENS, A.ADOBES : 'Bilan de l'intégration des éléments finis classiques dans Aster' - Rapport DER / EDF - HP-64/91.149

10) F. STIFKENS : 'Intégration des éléments finis acoustiques mixtes dans *Aster*' Rapport DER / EDF – HP-61/92.081

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	F.STIFKENS EDF-R&D/AMV	Texte initial
13.2	M.Abbas EDF R&D – AMA	Suppression de la formulation mixte