

Élasticité anisotrope

Résumé

Ce document traite de la thermoélasticité anisotrope, utilisée pour les modélisations de milieux continus 3D et 2D (C_PLAN, D_PLAN, AXIS), ou les couches des coques composites.

Le milieu thermoélastique peut être anisotrope suivant les 3 directions (on parle d'élasticité orthotrope), ou bien dans isotrope dans deux directions (on parle d'élasticité isotrope transverse), ou bien il peut présenter une symétrie cubique.

Table des matières

Table des Matières

1 Introduction.....	3
2 Typologie des matrices de Hooke.....	3
2.1 L'orthotropie.....	3
2.2 Isotropie transverse.....	4
2.3 Isotropie.....	4
3 Matrice de Hooke et matrice de souplesse.....	4
3.1 Notations.....	4
3.2 Cas 3D.....	6
3.2.1 Orthotropie.....	6
3.2.1.1 Matrice de souplesse.....	6
3.2.1.2 Matrice de Hooke.....	6
7	
3.2.2 Isotropie transverse.....	7
3.2.2.1 Matrice de souplesse.....	7
3.2.2.2 Matrice de Hooke.....	8
3.2.3 Élasticité à symétrie cubique.....	8
3.2.4 Isotropie.....	9
3.2.4.1 Matrice de souplesse en fonction de et.....	9
3.2.4.2 Matrice de Hooke en fonction de et.....	10
3.2.4.3 Matrice de souplesse en fonction des coefficients de Lamé et.....	10
3.2.4.4 Matrice de Hooke en fonction des coefficients de Lamé et.....	11
3.3 Cas 2D orthotrope en déformations planes et axisymétrique.....	11
3.3.1 Matrice de souplesse.....	11
3.3.2 Matrice de Hooke.....	11
3.4 Cas 2D orthotrope en contraintes planes.....	12
3.4.1 Matrice de souplesse.....	12
3.4.2 Matrice de Hooke.....	12
4 Utilisation dans Code_Aster.....	13
5 Bibliographie.....	13
6 Description des versions du document.....	14

1 Introduction

L'objectif de ce document est de donner l'expression des matrices de souplesse et de Hooke pour des matériaux thermoélastiques orthotrope, isotrope transverse et à symétrie cubique dans les cas 3D, 2D-contraintes planes, 2D-déformations planes et axisymétrie.

En toute rigueur, pour les matériaux thermoélastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations et du différentiel de température. On écrit :

$$\sigma_{ij} = H_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} (T - T_{réf}) \right)$$

Nous parlons de « matrices » de Hooke car, par souci de simplification, nous n'avons pas adopté la notation d'un tenseur d'ordre 4 pour \mathbf{H} , au profit de la notation de W.VOIGT, où les tenseurs d'ordre 2 sont représentés par des vecteurs à 6 composantes et les tenseurs d'ordre 4 par des matrices 6×6 .

La nature symétrique de σ et ε et l'adoption pour ces tenseurs d'ordre 2 d'une forme vectorielle permet d'écrire :

$$|\sigma\rangle = [\mathbf{H}] \left(|\varepsilon\rangle - |\alpha\rangle (T - T_{réf}) \right)$$

où $|\sigma\rangle$ et $|\varepsilon\rangle$ sont la représentation vectorielle des tenseurs d'ordre 2 σ et ε , et où $[\mathbf{H}]$, la matrices de Hooke, est une matrice 6×6 , nécessairement symétrique, soit a priori 21 coefficients indépendants, dans le cas tridimensionnel :

$$[\mathbf{H}] = \begin{matrix} \begin{matrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ & & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ SYM & & & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ & & & & H_{55} & H_{56} \\ & & & & & H_{66} \end{matrix} \end{matrix}$$

Le vecteur $|\alpha\rangle$ désigne la représentation vectorielle du tenseur d'ordre 2 de dilatation thermique, nécessairement symétrique, soit a priori 6 coefficients indépendants, dans le cas tridimensionnel.

2 Typologie des matrices de Hooke

2.1 L'orthotropie

Il s'agit d'une situation où le matériau élastique exhibe deux symétries par rapport à deux plans perpendiculaires (symétrie *orthorhombique*). Le tenseur d'élasticité possède a priori 9 coefficients indépendants, conséquence des relations obtenues avec ces deux symétries entre les 21 coefficients.

Le tenseur de dilatation thermique possède a priori 3 coefficients indépendants, conséquence des relations obtenues avec ces deux symétries.

Dans les axes d'orthotropie :

$$[\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & H_{33} & 0 & 0 & 0 \\ SYM & & & H_{44} & 0 & 0 \\ & & & & H_{55} & 0 \\ & & & & & H_{66} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Isotropie transverse

L'isotropie transverse (ou de révolution) est une restriction de l'orthotropie dans où l'on a l'isotropie dans l'un des deux plans orthogonaux de symétrie élastique, suite à une invariance par rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe orthogonal au plan d'isotropie transverse par exemple $x_3=0$. Le tenseur d'élasticité possède a priori 5 coefficients indépendants.

La matrice $[\mathbf{H}]$ aura la même forme que pour l'orthotropie mais avec quatre relations supplémentaires entre les composantes. Ainsi on aura ainsi pour l'isotropie transverse dans le plan $x_3=0$:

$$H_{11}=H_{22} ; H_{13}=H_{23} ; H_{44}=H_{55} \quad \text{et} \quad 2H_{44}=H_{11}-H_{12} \quad [\text{éq 2.2-1}]$$

Le tenseur de dilatation thermique possède a priori 2 coefficients indépendants :

$$\alpha_{11}=\alpha_{22} \quad \text{éq 2.2-2}]$$

2.3 Isotropie

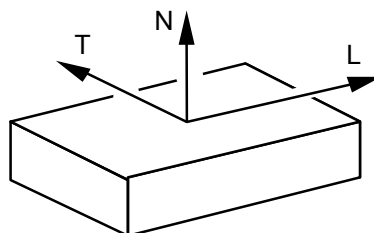
Le matériau est isotrope si $[\mathbf{H}]$ reste invariant dans tout changement de repère. Le tenseur d'élasticité possède a priori 2 coefficients indépendants. Il n'y a qu'un coefficient de dilatation thermique

3 Matrice de Hooke et matrice de souplesse

3.1 Notations

Au lieu d'utiliser les indices 1, 2 et 3 pour repérer les axes du repère cartésien, on va utiliser les indices correspondants L , T et N :

1. L pour longitudinal
2. T pour transversal
3. N pour normal



Les coefficients qui interviennent sont les suivants :

Mot clé	Notation	signification
E_L	E_L	Module de Young longitudinal
E_T	E_T	Module de Young transversal
E_N	E_N	Module de Young normal
G_LT	G_{LT}	Module de cisaillement dans le plan (L, T)
G_TN	G_{TN}	Module de cisaillement dans le plan (T, N)
G_LN	G_{LN}	Module de cisaillement dans le plan (L, N)
NU_LT	ν_{LT}	Coefficient de Poisson dans le plan (L, T)
NU_TN	ν_{TN}	Coefficient de Poisson dans le plan (T, N)
NU_LN	ν_{LN}	Coefficient de Poisson dans le plan (L, N)
ALPHA_L	α_L	Coefficient de dilatation thermique moyen longitudinal
ALPHA_T	α_T	Coefficient de dilatation thermique moyen transversal
ALPHA_N	α_N	Coefficient de dilatation thermique moyen normal

Remarque très importante :

ν_{LT} est différent de ν_{TL} :

Si l'on applique une traction suivant l'axe L :

$$\varepsilon_{LL} = \frac{\sigma_{LL}}{E_L} \quad (\text{loi de Hooke suivant une direction}).$$

Cette traction est accompagnée, proportionnellement, d'une contraction $-\nu_{LT} \cdot \frac{\sigma_{LL}}{E_L}$ suivant l'axe

T, et d'une contraction $-\nu_{LN} \cdot \frac{\sigma_{LL}}{E_L}$ suivant l'axe N.

Le premier indice indique l'axe où s'exerce l'effet du chargement et le second indice indique la direction du chargement.

Ensuite on exerce une traction suivant l'axe T, puis une traction suivant N, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{LL} &= \frac{\sigma_{LL}}{E_L} - \nu_{TL} \frac{\sigma_{TT}}{E_T} - \nu_{NL} \frac{\sigma_{NN}}{E_N} \\ \varepsilon_{TT} &= -\nu_{LT} \frac{\sigma_{LL}}{E_L} + \frac{\sigma_{TT}}{E_T} - \nu_{NT} \frac{\sigma_{NN}}{E_N} \\ \varepsilon_{NN} &= -\nu_{LN} \frac{\sigma_{LL}}{E_L} - \nu_{TN} \frac{\sigma_{TT}}{E_T} + \frac{\sigma_{NN}}{E_N} \end{aligned} \right\} \quad [\text{éq 3.1-1}]$$

La matrice de souplesse $[\mathbf{H}]^{-1}$ étant symétrique ; on en déduit :

$$\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T} \quad ; \quad \frac{\nu_{LN}}{E_L} = \frac{\nu_{NL}}{E_N} \quad ; \quad \frac{\nu_{TN}}{E_T} = \frac{\nu_{NT}}{E_N}$$

3.2 Cas 3D

3.2.1 Orthotropie

3.2.1.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{NL}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{NT}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LN}}{E_L} & \frac{-\nu_{TN}}{E_T} & \frac{1}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{LT}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{LN}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{TN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Orthotropie

3.2.1.2 Matrice de Hooke

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{TN}\nu_{NT})}{\Delta \cdot E_T \cdot E_N} & \frac{(\nu_{TL}+\nu_{NL}\nu_{TN})}{\Delta \cdot E_T \cdot E_N} & \frac{(\nu_{NL}+\nu_{TL}\nu_{NT})}{\Delta \cdot E_T \cdot E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{LT}+\nu_{LN}\nu_{NT})}{\Delta \cdot E_L \cdot E_N} & \frac{(1-\nu_{NL}\nu_{LN})}{\Delta \cdot E_L \cdot E_N} & \frac{(\nu_{NT}+\nu_{NL}\nu_{LT})}{\Delta \cdot E_L \cdot E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{LN}+\nu_{LT}\nu_{TN})}{\Delta \cdot E_L \cdot E_T} & \frac{(\nu_{TN}+\nu_{TL}\nu_{LN})}{\Delta \cdot E_L \cdot E_T} & \frac{(1-\nu_{LT}\nu_{TL})}{\Delta \cdot E_L \cdot E_T} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{LT} & 0 & 0 \\ & & & & G_{LN} & 0 \\ & & & & & G_{TN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

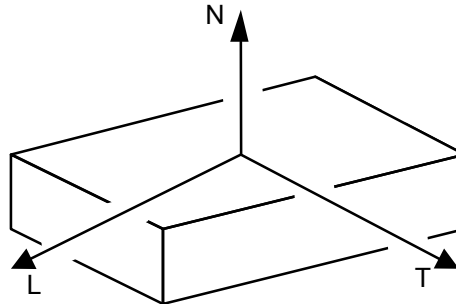
$[\mathbf{H}]$ – Orthotropie

$$\text{avec : } \frac{\nu_{TL}}{E_T} = \frac{\nu_{LT}}{E_L} ; \frac{\nu_{NL}}{E_N} = \frac{\nu_{LN}}{E_L} ; \frac{\nu_{NT}}{E_N} = \frac{\nu_{TN}}{E_T}$$

$$\text{avec : } \frac{1}{\Delta} = \frac{E_L E_T E_N}{1 - \nu_{TN} \nu_{NT} - \nu_{NL} \nu_{LN} - \nu_{LT} \nu_{TL} - 2 \nu_{TN} \nu_{NL} \nu_{LT}}$$

3.2.2 Isotropie transverse

L'isotropie transverse est définie ici dans le plan (L, T) , et la direction d'orthotropie est donc N . On peut attirer l'attention du lecteur sur le fait que cette convention diffère d'une convention usuelle qui désigne par « direction longitudinale » la direction d'orthotropie des matériaux transverse isotropes.



On note que les coefficients de dilatation vérifient : $\alpha_T = \alpha_L$.

3.2.2.1 Matrice de souplesse

La matrice $[\mathbf{H}]^{-1}$ peut être déduite directement de la matrice $[\mathbf{H}]^{-1}$ - Orthotropie en utilisant les propriétés de l'isotropie transverse.

Dans le plan (L, T) , cf. [éq 2.2-1] :

$$\begin{aligned} E_L &= E_T \\ \nu_{TL} &= \nu_{LT} \\ G_{LT} &= \frac{E_L}{2(1 + \nu_{LT})} \end{aligned}$$

Dans les plans (L, N) et (T, N) :

$$\begin{aligned} \nu_{NT} &= \nu_{NL} \\ \nu_{LN} &= \nu_{TN} \\ G_{TN} &= G_{LN} \\ \frac{\nu_{NT}}{E_N} &= \frac{\nu_{LN}}{E_L} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{NL}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_L} & \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{NT}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LN}}{E_L} & -\frac{\nu_{TN}}{E_L} & \frac{1}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu_{LT})}{E_L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{LN}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{TN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ - Isotropie transverse

3.2.2.2 Matrice de Hooke

La matrice $[\mathbf{H}]$ possède les mêmes symétries que $[\mathbf{H}]^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{NL}\cdot\nu_{LN}}{\Delta'\cdot E_L\cdot E_N} & \frac{\nu_{LT}+\nu_{NL}\nu_{LN}}{\Delta'\cdot E_L\cdot E_N} & \frac{\nu_{NL}+\nu_{LT}\nu_{NL}}{\Delta'\cdot E_L\cdot E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{TL}+\nu_{NL}\nu_{LN}}{\Delta'\cdot E_L\cdot E_N} & \frac{1-\nu_{NL}\cdot\nu_{LN}}{\Delta'\cdot E_L\cdot E_N} & \frac{\nu_{LN}+\nu_{LT}\nu_{LN}}{\Delta'\cdot E_L\cdot E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{LN}+\nu_{LT}\nu_{LN}}{\Delta'\cdot E_L^2} & \frac{\nu_{TN}+\nu_{LT}\cdot\nu_{TN}}{\Delta'\cdot E_L^2} & \frac{1-\nu_{LT}^2}{\Delta'\cdot E_L^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{E_L}{2(1+\nu_{LT})} & & \\ & & & & G_{LN} & \\ & & & & & G_{LN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Isotropie transverse

$$\text{avec : } \frac{1}{\Delta'} = \frac{E_L^2 \cdot E_N}{1 - 2\nu_{NL}\cdot\nu_{LN} - \nu_{LT}^2 - 2\nu_{NL}\cdot\nu_{LN}\cdot\nu_{LT}}$$

3.2.3 Élasticité à symétrie cubique

L'élasticité à symétrie cubique advient lorsque outre les trois plans cartésiens de symétrie, les six plans tournés à 45° sont également de symétrie. On a alors 3 coefficients élastiques indépendants. Cela correspond à une matrice d'élasticité de la forme :

$$\begin{bmatrix} H_{1111} & H_{1122} & H_{1122} & & & \\ H_{1122} & H_{1111} & H_{1122} & & & \\ H_{1122} & H_{1122} & H_{1111} & & & \\ & & & H_{1212} & & \\ & & & & H_{1212} & \\ & & & & & H_{1212} \end{bmatrix}$$

Étant donné la symétrie cubique, il reste à déterminer 3 coefficients :

$$E_L = E_N = E_T = E, \quad G_{LT} = G_{LN} = G_{TN} = G, \quad \nu_{LN} = \nu_{LT} = \nu_{LN} = \nu$$

On note que les coefficients de dilatation vérifient : $\alpha_T = \alpha_L = \alpha_N$.

Pour reproduire l'élasticité à symétrie cubique avec ELAS_ORTH, il suffit de calculer les coefficients de l'orthotropie tels que la matrice d'élasticité obtenue soit de la forme ci-dessus :

$$\begin{aligned} H_{1111} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ H_{1122} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ H_{1212} &= G_{LT} = G_{LN} = G_{TN} \end{aligned}$$

donc, tant que $(1+\nu)(1-2\nu) \neq 0$ (c'est à dire ν différent de 0.5).

$$\frac{H_{1122}}{H_{1111}} = \frac{\nu}{1-\nu} \text{ ce qui fournit } \nu = \frac{1}{1 + \frac{H_{1111}}{H_{1122}}} \text{ puis } E = H_{1111} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}$$

3.2.4 Isotropie

La loi de Hooke prend la forme suivante avec les coefficients de Lamé λ et $\mu = G$:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

3.2.4.1 Matrice de souplesse en fonction de E et ν

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Isotropie complète

3.2.4.2 Matrice de Hooke en fonction de E et ν

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Isotropie complète

3.2.4.3 Matrice de souplesse en fonction des coefficients de Lamé λ et μ

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{\mu} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Isotropie complète

3.2.4.4 Matrice de Hooke en fonction des coefficients de Lamé λ et μ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{SYM} & \mu & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

[H] – Isotropie complète avec les coefficients de Lamé

3.3 Cas 2D orthotrope en déformations planes et axisymétrique

3.3.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ 0 \\ 2\varepsilon_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{NL}}{E_N} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{NL}}{E_N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}$$

[H]⁻¹ – Orthotropie plane en déformations planes et axisymétrie

3.3.2 Matrice de Hooke

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{TN}\nu_{NT})}{E_T E_N} & \frac{(\nu_{TL}+\nu_{NL}\nu_{TN})}{E_T \cdot E_N} & \frac{(\nu_{NL}+\nu_{TL}\nu_{NT})}{E_T \cdot E_N} & 0 \\ \frac{(\nu_{LT}+\nu_{LN}\nu_{NT})}{E_L E_N} & \frac{(1-\nu_{NL}\nu_{LN})}{E_L \cdot E_N} & \frac{(\nu_{NT}+\nu_{NL}\nu_{LT})}{E_L \cdot E_N} & 0 \\ \frac{(\nu_{LN}+\nu_{LT}\nu_{TN})}{E_L \cdot E_T} & \frac{(\nu_{TN}+\nu_{TL}\nu_{LN})}{E_L \cdot E_T} & \frac{(1-\nu_{LT}\nu_{TL})}{E_L \cdot E_T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{LT} \cdot \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ 0 \\ 2\varepsilon_{LT} \end{bmatrix}$$

[H] – Orthotropie plane en déformations planes et axisymétrie

avec :
$$\frac{1}{\Delta} = \frac{E_L E_T E_N}{1 - \nu_{TN} \nu_{NT} - \nu_{NL} \nu_{LN} - \nu_{LT} \nu_{TL} - 2 \nu_{TN} \nu_{NL} \nu_{LT}}$$

3.4 Cas 2D orthotrope en contraintes planes

3.4.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Orthotropie plane en contraintes planes

3.4.2 Matrice de Hooke

En utilisant le système d'équations [éq 3.1-1], on obtient :

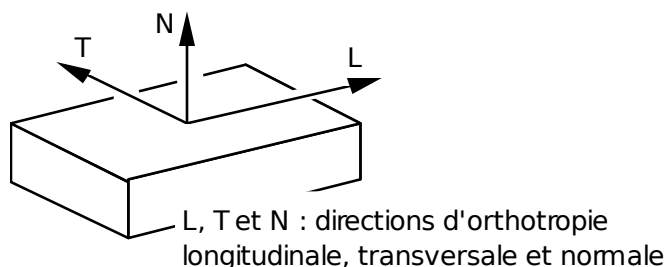
$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ 0 \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_{LT}\cdot\nu_{TL}} \begin{bmatrix} E_L & \nu_{TL}E_T & 0 & 0 \\ \nu_{LT}E_L & E_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Orthotropie en contraintes planes

4 Utilisation dans Code_Aster

Dans Code_Aster, la définition des caractéristiques élastiques orthotropes constantes ou fonctions de la température s'effectuent par la commande `DEFI_MATERIAU`, mots clés `ELAS_ORTH`, `ELAS_ISTR`, `ELAS_ISTR_FO` ou `ELAS_ORTH_FO` pour les éléments de coque et les éléments massifs isoparamétriques ou les couches constitutives d'un composite (voir la commande `DEFI_COMPOSITE`).

Pour définir le repère d'orthotropie (L, T, N) lié aux éléments, on peut se reporter aux documentations [U4.42.03] `DEFI_COMPOSITE` et [U4.42.01] `AFFE_CARA_ELEM`.



```

/ ELAS_ORTH = _F (♦   E_L = ygl   Module de Young longitudinal.
                   ♦   E_T = ygt   Module de Young transversal.
                   ♦   E_N = ygn   Module de Young normal.
                   ♦   GL_T = glt   Module de cisaillement dans le plan LT .
                   ♦   G_TN = gtn   Module de cisaillement dans le plan TN .
                   ♦   G_LN = gln   Module de cisaillement dans le plan LN .
                   ♦   NU_LT = nult  Coefficient de Poisson dans le plan LT .
                   ♦   NU_TN = nutn  Coefficient de Poisson dans le plan TN .
                   ♦   NU_LN = nuln  Coefficient de Poisson dans le plan LN .
                   ♦   ALPHA_L = diln  Coefficient de dilatation thermique moyen longitudinal.
                   ♦   ALPHA_T = dit   Coefficient de dilatation thermique moyen transversal.
                   ♦   ALPHA_N = di n  Coefficient de dilatation thermique moyen normal.

```

al.

Remarque importante :

L'exposé de cette note de référence est basé sur la convention des livres de J.L.Batoz et D.Gay. La documentation de `DEFI_MATERIAU` [U4.43.01] décrit ces choix, et le coefficient `NU_LT` s'interprète de la façon suivante dans Code_Aster :

si l'on exerce une traction selon l'axe L donnant lieu à une déformation selon cet axe égale à $\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{ygl}$, on a une déformation selon l'axe T égale à : $\varepsilon_T = -\nu_{LT} \cdot \frac{\sigma_L}{ygl}$.

5 Bibliographie

- 1) J.C. MASSON : Matrice de Hooke pour les matériaux orthotropes, Rapport interne Applications en Mécanique, n°79-018, CiSi, 1979.
- 2) D. GAY : Matériaux composites, Edition Hermes, 1987.

- 3) J.L. BATOZ, G. DHATT : Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1, Edition Hermes.

6 Description des versions du document

Version Code_Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6.4	A. ASSIRE, EDF-R&D/AMA	Texte initial
8.4	A. ASSIRE, X. DESROCHES, J.M. PROIX, EDF-R&D/AMA	Corrections minimales
15	F.VOLDOIRE, EDF-R&D/ERMES	Corrections (pour une meilleure compréhension)